

CENTRO DE INVESTIGACION Y DE ESTUDIOS  
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITECNICO  
NACIONAL  
UNIDAD ZACATENCO  
Departamento de Control Automático

## **Análisis de estabilidad en controladores PID y neuronales PID sobre robots**

Tesis que presenta:

**M. en C. Roberto Carmona Rodríguez<sup>1</sup>**

Para obtener el grado de:

**Doctor en Ciencias**

En la Especialidad de

**Control Automático**

Director de Tesis:

**Dr. Wen Yu Liu**

México, D.F.,

Diciembre del 2013

<sup>1</sup>Becario del CONACyT

# Resumen

El objetivo del presente trabajo de tesis, es realizar un análisis de estabilidad de distintos controladores utilizados en robots manipuladores..

Dentro de las principales contribuciones del presente trabajos e encuentran: realizar una prueba de estabilidad asintótica semiglobal de un controlador PID con fines de uso industriales, diseño de un controlador Neuronal-PID para uso en la industria así como su prueba de estabilidad asintótica semiglobal y finalmente realizar el diseño de un método iterativo de sintonización para un controlador PID para control de robots utilizados en la industria.

Una forma de minimizar el error en estado estable respecto a incertidumbres en el control de robots, es incrementando la ganancia integral en un controlador PID. Otro método puede ser agregar a un controlador PD un compensador neuronal, el inconveniente es que la acción derivativa del controlador PD puede incrementarse. En este trabajo de tesis se propone un controlador neuronal PID y se prueba su estabilidad asintótica semiglobal. Posteriormente los resultados teóricos se verifican experimentalmente en un robot de dos grados de libertad ubicado en el laboratorio de servicios experimentales del departamento de control automático.

En la ultima sección de este trabajo de tesis se propone un nuevo método de ajuste iterativo de controladores PID para robots manipuladores, el cual utiliza distintas propiedades de la dinámica de robots, este controlador es sistemático, simple para uso industrial, además de que presenta mejoras respecto a un controlador clásico PID, estos datos se corroboran experimentalmente en un robot de dos grados de libertad.

# Abstract

The objective of this thesis is to perform a stability analysis on different controllers used in robot manipulators.

Within the contributions of this thesis are: proof semiglobal asymptotic stability of a PID controller with industrial use, the design of a Neural-PID controller with semi-global asymptotic stability condition, which is industrially applicable in robot control and finally the desing a new iterative tuning method of PID control for robot manipulators.

In order to minimize steady-state error with respect to uncertainties in robot control, the integral gain of PID control should be increased. Another method is to add a compensator to PD control, such as neural compensator, but the derivative gain of this PD control should be large enough. These two approaches deteriorate transient performances. In this thesis, the popular neural PD is extended to neural PID control. The semiglobal asymptotic stability of the neural PID control is proven. The conditions give explicit selection methods for the gains of the linear PID control. A experimental study on a robot manipulator with two degrees of freedom, in the laboratory of experimental services department Automatic Control, what the technical aspects of this section are corroborated.

On the other hand to address a new iterative tuning method of PID control for robot manipulators. Presented in the last section a tuning method uses several properties of the robot control, such as any PD control can stabilize a robot in regulation case, the closed-loop system of PID control can be approximated by a linear system, the control torque to the robot manipulator is linearly independent of the robot dynamic. Compared with the other PID tuning methods, this novel method is simple, systematic, and stable. The transient properties of this PID control are better than the other normal PID controllers. This method is a new systematic tuning method for PID control is proposed. To validate the theoretical aspects, these are applied to the robot of two degrees of freedom above.

# Agradecimientos

## **A mi asesor:**

Dr. Wen Yu Liu.

Quien no solamente me ayudo técnicamente, si no que además me brindo el apoyo de amigo y hermano en estos momentos tan importantes de mi vida, agradezco su sabiduría a pesar de que a veces me señalaba la luna y yo solamente miraba el dedo, le agradezco su paciencia, su disposición de ser guía y por ser un ejemplo a seguir.

## **A los Investigadores:**

Dr. Moisés Bonilla Estrada

Dr. Alejandro Justo Malo Tamayo

Dr. Julio Cesar Tovar Rodríguez.

Dr. Floriberto Ortíz Rodríguez.

Por haber aceptado ser miembros del jurado y por sus valiosos comentarios y sugerencias referentes al presente trabajo de tesis.

## **A mi familia**

A pesar de que jamás podrán leer estas líneas quiero agradecer a mi bebe y a mi madre que su partida me hizo más fuerte y su estancia en esta vida me lleno de amor y dicha le agradezco profundamente a mi madre por sus brazos cálidos y esa enseñanza de lucha infinita.

A Sonia y Constanza quienes me llenan de amor y le ponen ese brillo a mi mañana todos los días.

A todos mis hermanos, sobrinos, cuñados y suegros por todo su cariño

## **A mis amigos.**

Chino, Armando, Canul, Samy, Jesica, Gil, Lyapu, Rouss, Charly, Roger, Coqueto, Niño, Mago, Julio, Beto, Omar, Ru, Caguaman, Carlitos, Hussain, Suresh's 1 y 2.

Por sus consejos, apoyo, confianza y amistad durante todos estos años.

## **A CONACyT.**

Por haberme otorgado la beca para poder realizar mis estudios de doctorado.

## **Al CINVESTAV.**

Por el apoyo económico a congresos y de extensión, por su excelente trato y relación tan cálida con sus estudiantes.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	3
1.2. Objetivos . . . . .	6
1.3. Estructura . . . . .	7
1.4. Publicaciones . . . . .	7
<b>2. Preliminares</b>	<b>9</b>
2.1. Antecedentes de Robótica en el espacio articular. . . . .	9
2.1.1. Dinámica Inversa . . . . .	10
2.1.2. Dinámica de un Robot Manipulador Rígido . . . . .	13
2.2. Modelado de un robot de dos grados de libertad . . . . .	15
2.2.1. Cinemática . . . . .	15
2.2.2. Cálculo de cinemática Directa . . . . .	22
2.2.3. Cinemática para un robot de dos grados de libertad . . . . .	23
2.2.4. Ecuación de Euler-Lagrange . . . . .	27
2.2.5. Cinemática Inversa . . . . .	29
2.2.6. Modelado con compensación por Gravedad . . . . .	30
2.3. Redes Neuronales Artificiales . . . . .	32
<b>3. PID estable en el espacio articular</b>	<b>43</b>
3.1. Introducción . . . . .	43

3.2. Control Estable PD con compensación por gravedad . . . . .	45
3.3. Estabilidad Asintótica semiglobal de un control PID . . . . .	48
3.4. Control lineal PID con velocidades no medibles . . . . .	56
3.5. Resultados experimentales . . . . .	62
3.6. Conclusiones . . . . .	67
<b>4. Controlador neuronal PID</b>	<b>69</b>
4.1. Introducción . . . . .	69
4.2. Estabilidad asintótica semiglobal para un controlador neuronal PID . . . . .	71
4.3. Control Neuronal PID con velocidades no medibles . . . . .	80
4.4. Resultados Experimentales . . . . .	83
4.5. Conclusiones . . . . .	87
<b>5. Nuevo método de Sintonización de controladores PID</b>	<b>89</b>
5.1. Introducción . . . . .	89
5.2. Sintonización PID en lazo cerrado . . . . .	92
5.3. Linealización del sistema en Lazo Cerrado . . . . .	95
5.4. Ajuste PD/PID . . . . .	97
5.5. Condiciones de Estabilidad para las ganancias PID. . . . .	100
5.6. Resultados Experimentales . . . . .	101
5.7. Conclusiones . . . . .	105
<b>6. Conclusiones Finales</b>	<b>107</b>

# Índice de figuras

2.1. Cinemática inversa y cinemática directa . . . . .	10
2.2. Dinámica de un Robot Manipulador . . . . .	14
2.3. Dinámica de un Robot manipulador en lazo cerrado con el ángulo de giro deseado $q^d$ sobre las articulaciones . . . . .	15
2.4. Robot de dos grados de libertad . . . . .	16
2.5. Descripción de parámetros de D-H para un robot de dos grados de libertad .	19
2.6. Diagrama esquemático de Robot de dos grados de libertad para obtención de parámetros geométricos . . . . .	31
2.7. Forma básica de una neurona biológica . . . . .	33
2.8. Estructura de una neurona artificial básica . . . . .	34
2.9. Perceptrón simple . . . . .	35
2.10. Red Neuronal Artificial FeedForward . . . . .	36
2.11. Red neuronal multicapa . . . . .	37
2.12. Estructura de una Red Neuronal de funciones de base radial. . . . .	40
3.1. Control PID mas compensación aproximada de gravedad . . . . .	55
3.2. Plataforma Experimental para un Robot de dos Grados de Libertad. Laboratorio experimental Dpto. Control Automático-CINVESTAV . . . . .	63
3.3. Esquema general de Robot de Dos grados de Libertad . . . . .	64
3.4. Respuesta aproximada al escalón unitario en el robot de dos grados de libertad	65
3.5. Respuesta al escalón unitario utilizando un controlador PD . . . . .	66

3.6.	Respuesta del Controlador PD mas término de gravedad (PD+G) . . . . .	67
3.7.	Comparación entre distintos métodos de ajuste para controladores PID . . . . .	68
4.1.	Controlador neuronal PID . . . . .	84
4.2.	Respuesta al escalón unitario de las leyes de control clásicas PD y PID del robot de dos grados de libertad . . . . .	85
4.3.	Seguimiento de trayectoria del Robot del Controlador Neuronal PD y Controlador Neuronal PID al escalón unitario . . . . .	86
4.4.	Comparación de diferentes controladores aplicados al robot de dos grados de libertad . . . . .	87
5.1.	Esquema de Ajuste PID . . . . .	92
5.2.	Respuesta al escalón de un sistema lineal . . . . .	97
5.3.	Respuesta aproximada al escalón unitario en el robot de dos grados de libertad	103
5.4.	Controlador $u = PD_1 + \hat{g}(q) + PID_2$ sobre el robot manipulador de dos grados de libertad . . . . .	104
5.5.	Controlador $PID_f = PD_1 + \hat{g}(q) + PID_2 + PID_3$ sobre el robot manipulador de dos grados de libertad . . . . .	105
5.6.	Controlador $\tau = PD_1 + \hat{g}(q) + PID_2 + PID_3 + PID_4$ sobre el robot manipulador de dos grados de libertad . . . . .	106



# Capítulo 1

## Introducción

Un Robot manipulador básicamente es un brazo mecánico operado mediante una acción de control, de modo que para efectos de la teoría de control automático sirve como objeto de estudio para probar algunas leyes o algoritmos de control sobre su dinámica la cuál puede estar definida sobre dos espacios: espacio articular ( $Q$ ) y espacio de tarea, en el primero se hace una descripción de la configuración o movimiento de un robot en términos de las posiciones de todas sus articulaciones y esta formado por los valores  $q_i \in \mathbb{R}$ , de modo que se puede describir un conjunto del tipo  $Q = q_1 \times q_2 \times \dots \times q_n \subseteq \mathbb{R}^n$  donde  $n$  es la dimensión del espacio y corresponde al número de articulaciones del Robot. El espacio de tarea del robot esta definido como el conjunto de todas las coordenadas espaciales que puede alcanzar el efector final a partir de la posición de los ángulos de giro en las articulaciones mediante el mapeo cinemático directo  $h : Q \rightarrow W$ . Donde  $W \subseteq \mathbb{R}^m$  y  $m \leq 6$  satisfacen  $W = \{h(\mathbf{q}) : \mathbf{q} \in Q\}$  de tal forma que la dimensión del espacio de tarea puede ser máximo 6 y es el número de variables  $x_i \in \mathbb{R}$  necesarias para definir la tarea del Robot. Así el espacio queda definido por  $\mathbf{X} = [x_1, \dots, x_m]^T$ ,  $x_i \in \mathbb{R}$ , el cuál en ocasiones se escribe como  $\mathbf{X} = [\mathbf{p}, \boldsymbol{\phi}]^T$  donde:  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l$  describe la posición del efector final del robot y  $\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^{m-l}$  describe la orientación.

En el control de robots sobre el espacio articular el esquema más simple para este fin es el esquema de control Proporcional Derivativo ( $PD$ ) el cuál solo con la elección de algu-

na ganancia positiva el controlador puede garantizar la estabilidad [59] en el problema de regulación. Si embargo no se puede garantizar la estabilidad asintótica cuando la dinámica del manipulador incluye: vector de par gravitacional, vector de fricción y de forma general otras incertidumbres, hasta que se aplica una compensación con modelo de referencia. Requiriéndose así el conocimiento de la dinámica del robot. Por ejemplo en los trabajos de compensación adaptable de gravedad de [64][58], compensación por gravedad deseada [35], y control  $PD$  más medición de posición a [50], podemos ver que estos necesitan información estructural del vector de gravedad en el controlador  $PD$ . Por otro lado algunos controladores  $PD$  no lineales también pueden alcanzar la estabilidad asintótica tales como: control  $PD$  con ganancias variantes en el tiempo [53], ganancias no lineales [47], y compensación por modos deslizantes [51]. Una compensación inteligente para un control  $PD$  que no necesita un modelo matemático es conocido como compensador libre de modelo, dentro de este grupo se encuentran: compensadores difusos [43], controles difusos [23], compensadores neuronales [41] y compensadores neuro-difusos [10][19]. La idea básica de estos controladores es el uso de un filtro de error de seguimiento basado en el análisis de Lyapunov [40]. Para un algoritmo de ajuste de pesos apropiados son muy similares los métodos de control adaptable [29], la derivada de la función de Lyapunov es negativa siempre y cuando el error de seguimiento filtrado este fuera de una bola de radio  $\frac{B}{K_v}$ , aquí  $B$  es el límite superior de todas las incertidumbres desconocidas,  $K_v$  es la derivada de la ganancia en el control  $PD$ . Estos controladores neuronales  $PD$  están acotados uniformemente y los errores de seguimiento se hacen más pequeños conforme aumenta la ganancia  $K_v$ . El costo de elegir  $K_v$  suficientemente grande es que el transitorio se vuelve lento. Solo cuando  $K_v \rightarrow \infty$ , el error de seguimiento converge a cero [22].

Existen varios métodos para minimizar el error en estado estable respecto a incertidumbres en el control de robots, uno es utilizando controladores con la ley de control Proporcional Integral Derivativo ( $PID$ ) en el cuál se incrementa la ganancia integral al hacer el error casi cero. Otro método es utilizando controladores  $PD$  en combinación con un compensador neuronal ( $PD+NN$ ) con la condición para una ganancia derivativa suficientemente grande, este método puede extenderse a controladores  $PID$  más una compensación neuronal ( $PID+NN$ )

el cuál garantiza estabilidad asintótica semiglobal.

Existen dos enfoques diferentes para combinar el controlador  $PID$  con el control inteligente. El primer enfoque es que las redes neuronales son formadas dentro de una estructura  $PID$  [14][56][65]. Para una adecuada actualización de las leyes, los parámetros de los controladores  $PID$  se elijen de manera que el sistema en lazo cerrado sea estable. Pero la dificultad para implementarlos industrialmente radica en que las ganancias (pesos) de la acción  $PID$  son variantes en el tiempo.

El segundo método utilizando técnicas de control inteligente es el ajuste de parámetros de los controladores  $PID$ , tales como sintonización difusa [46], sintonización neuronal [26][68] y sintonización experta [33]. De modo que para decrecer el error de trayectoria se puede agregar una ganancia intergral al controlador  $PD + NN$ , es decir; convertir el controlador neuronal  $PD$  a un controlador neuronal  $PID$  y aquí debemos de hacernos una una pregunta: ¿por qué no agregar un integrador en vez de aumentar la ganancia derivada en el control  $PD$  neuronal?.

## 1.1. Motivación

Los controladores  $PID$  (proporcional-integral-derivativo) se utilizan ampliamente en robots manipuladores industriales. En ausencia del conocimiento de la dinámica del robot el control  $PID$  puede ser una buena elección para el seguimiento de trayectoria, ya que el controlador es libre de modelo, y sus parámetros se pueden ajustar fácilmente y por separado [3][6]. Las ventajas del controlador  $PID$  sobre los otros es que estos son simples y tienen significados físicos muy claros. Sin embargo, las ganancias del controlador  $PID$  deben ser sintonizados para garantizar un buen desempeño, así como, aumento de tiempo, sobreimpulso, tiempo de establecimiento y el error de estado estacionario.

Básicamente el proceso de ajuste de ganancias de  $PID$  puede clasificarse en cinco categorías:

1. Modelo basado en sintonización analítica. De acuerdo con las relaciones analíticas entre

el modelo y el objetivo de control, las ganancias del controlador *PID* se calculan a partir de algunas ecuaciones algebraicas [8][11][28].

2. Métodos heurísticos. Estos métodos combinan varias técnicas, tales como la experiencia práctica [73][12], sintonización manual [6] e inteligencia artificial [60][40][32].
3. Métodos en dominio de la frecuencia. En estos métodos las Frecuencias Características son fáciles de obtener para sistemas lineales. Cuando el proceso es controlado por un sistema lineal, el controlador *PID* puede ser sintonizado en dominio de la frecuencia [57].
4. Métodos de optimización. El Controlador *PID* se transforma en una forma especial de control óptimo. En este método el problema de sintonización del controlador *PID* se convierte en un problema de optimización numérica fuera de línea [39].
5. Métodos Adaptable Están basados en técnicas de control adaptable e identificación paramétrica en línea, las ganancias del controlador *PID* están sintonizados como un proceso de ajuste automático [67].

El problema de los métodos de sintonización anteriores es que no se pueden aplicar directamente en controladores *PID* en control de robots ya que la dinámica del robot es no lineal.

Por otro lado el problema de Sintonización de controladores *PID* en el control de robots se pueden agrupar en:

1. Métodos inteligentes. Las técnicas inteligentes, tales como lógica difusa [60], redes neuronales [40] y algoritmos genéticos [32] se utilizan para ajustar las ganancias del controlador *PID* de este modo los controladores finales ya no son *PID* lineales.
2. Control por Impedancia. La dinámica inversa se aplica para convertir el robot en un sistema lineal, La idea de la impedancia mecánica se aplicó a sintonizar ganancias del controlador *PID* en [27]. Las ganancias del *PID* pueden ajustarse en tiempo discreto por aproximación de la dinámica inversa [8].

3. Enfoque de Lyapunov. El enfoque de Lyapunov se utilizó para ajustar el controlador *PID* de manera que el controlador de robot puede seguir un control de linealización [9].

Los métodos anteriores necesitan un completo conocimiento del modelo del robot, donde es muy común que se pierdan los significados físicos de las ganancias *PID* en estos métodos, ya que estos controladores *PID* no utilizan las propiedades de los robots.

En el problema de sintonización en control *PID* para robots existen algunas dificultades de diseño tales como:

- El par que se genera en cada articulación afecta a las otras y estos efectos presentan grandes no linealidades.
- El exceso de ganancias simultáneas para el problema de sintonización en robots mediante los métodos clásicos [73] o [12]. Por ejemplo, un robot de 6 grados de libertad tiene 18 ganancias a sincronizar. Cuando se sintoniza una ganancia, se requiere el ajuste de las otras 17 debido al acoplamiento dinámico.
- Algunos métodos no lineales, tales como análisis de estabilidad, nos permiten obtener cotas superiores e inferiores para las ganancias del controlador PID. Sin embargo estos métodos no garantizan condiciones de desempeño deseado.

En este trabajo se utilizan las siguientes tres propiedades siguientes para el control de robots con el fin de obtener un método de ajuste de forma sistemática:

1. En el caso de regulación, un robot puede ser estabilizado mediante cualquier controlador PD siempre y cuando las ganancias del controlador PD sean positivas.
2. El comportamiento en lazo cerrado del control PID es similar al comportamiento de un sistema lineal.
3. El control del par en cada articulación es independiente de la dinámica del robot.

Los resultados experimentales muestran que este método de sintonización PID es simple, sistemático y eficaz en el control de Robots.

## 1.2. Objetivos

1. Realizar un análisis de controladores PID sobre el espacio articulado.
  - a)* Mostrar la estabilidad asintótica semiglobal de un controlador PID.
  - b)* Proponer un controlador lineal PID con velocidades no medibles.
  - c)* Realizar pruebas en laboratorio de la ley de control sobre un Robot de dos grados de Libertad.
  
2. Realizar un análisis de controladores neuronales PID (PID+NN).
  - a)* Probar la estabilidad asintótica semiglobal de un controlador neuronal PID.
  - b)* Proponer un controlador lineal neuronal PID con velocidades no medibles.
  - c)* Realizar pruebas en laboratorio de la ley de control sobre un Robot de dos grados de libertad.
  
3. Proponer un método de ajuste sistemático de control PID con los siguientes pasos:
  - a)* Estabilizar un robot manipulador con un control PD.
  - b)* Agregar una respuesta unitaria al sistema en lazo cerrado del inciso (3.a).
  - c)* Determinar un modelo lineal invariante en el tiempo el cuál tenga una respuesta similar a (3.b).
  - d)* Ajustar las ganancias PD/PID similar al sistema lineal (3.c).
  - e)* Proponer condiciones de estabilidad para las ganancias PID.
  - f)* Aplicar este método a un Robot de dos grados de libertad, mostrando que el método de ajuste es efectivo sobre el robot.
  
4. Comparar el desempeño del controladores propuestos anteriormente.

## 1.3. Estructura

La estructura siguiente del presente trabajo tesis consta de seis capítulos, en el primer capítulo se da una introducción del trabajo haciendo un esbozo sobre de la motivación de éste y los distintos objetivos a cubrir . El capítulo 2 pone en contexto el trabajo de tesis, primero se hace una descripción breve sobre la cinemática y dinámica de los robots manipuladores en el espacio articulado, posteriormente se da una descripción básica sobre la configuración y uso de la redes neuronales. En el capítulo 3 se realiza una prueba de estabilidad asintótica semiglobal para un controlador PID y posteriormente los resultados teóricos se aplican a un robot manipulador de dos grados el cuál se encuentra en el laboratorio de servicios experimentales del departamento de control automático. En el capítulo 4 se estudia la estructura del controlador neuronal PID realizando un estudio sobre la historia y avances en este tema una vez entendida la estructura se lleva a cabo su respectivo análisis de estabilidad concluyendo con estabilidad asintótica semiglobal, posteriormente se propone un control neuronal con velocidades no medibles y en la parte final de este capítulo se realiza una implementación en laboratorio sobre los resultados teóricos derivados de este estudio. La parte final de análisis de este trabajo de tesis es el capítulo 5, en el se propone un nuevo método de sintonización de controladores PID para el control de Robots en lazo cerrado, primero se realiza un estudio para determinar las condiciones bajo las cuales el control PD es estable, posteriormente se realiza un análisis para sintonizar el controlador PID en lazo cerrado obteniendo un método de ajuste para ganancias PID y determinando las condiciones de estabilidad para las ganancias del controlador PID, luego estos resultados teóricos se prueban sobre un robot de dos grados de libertad ubicado en el laboratorio de servicios experimentales del departamento de control automático.

## 1.4. Publicaciones

### Revista

1. Roberto Carmona and Wen Yu, Robust Adaptive Control via Neural Linearization

and Compensation, *Journal of Control Science and Engineering*, Vol.2012, Article ID 867178, doi:10.1155/2012/867178, 2012.

2. Wen Yu, Roberto Carmona, A novel PID tuning method for robot control, *Industrial Robot*, Vol.40, No.6, 578-582, 2013 (Impact Factor: 0.69)

### **Congreso**

1. Roberto Carmona, Yu, Wen, PID control for robot manipulators with neural compensation, *2012 World Automation Congress (WAC12)*, Puerto Vallarta, Mexico, ID.20977, 2012
2. Wen Yu and Roberto Carmona Rodriguez, Task-space PID Control of Robot Manipulators with Explicit Conditions, *2013 American Control Conference (ACC13)*, Washington DC, USA, 4970-4976, 2013.



# Capítulo 2

## Preliminares

### 2.1. Antecedentes de Robótica en el espacio articular.

En el análisis de control de robots Manipuladores lo primero que tenemos que tener en cuenta es: ver si el problema a resolver esta dado en el análisis de cinemática directa o cinemática inversa.

La Cinemática Directa básicamente es un mapeo del espacio articulado al espacio de tareas del tipo siguiente:  $h : Q \rightarrow W$  o en forma vectorial lo podemos considerar como:  $\mathbf{X} = h(\mathbf{q})$  con  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m$  que representa el vector de variables en el Espacio Tareas. Por su parte la Cinemática inversa determina el valor de las articulaciones a partir de las coordenadas del espacio de tareas del modo:  $\mathbf{q} = f(\mathbf{X})$  de manera que se define como el mapeo  $f : W \rightarrow Q$ .

En esencia el problema de la cinemática inversa consiste en que: dada la posición y orientación final del efector final del manipulador, se tiene que determinar el valor en las articulaciones para alcanzar la posición y orientación del efector final, es decir; dado el espacio de referencia del manipulador en posición y orientación se debe determinar la relación que este guarda con la articulación mediante un mapeo inverso, tal y como se muestra en la Figura 2.1.

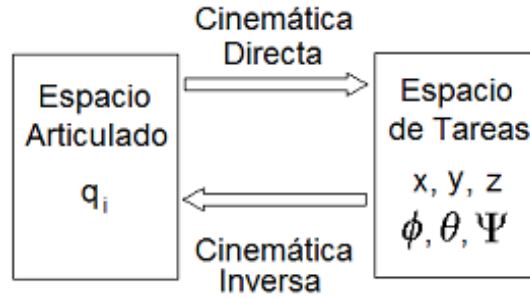


Figura 2.1: Cinemática inversa y cinemática directa

### 2.1.1. Dinámica Inversa

Un modelo dinámico de un robot puede ser descrito mediante la siguiente ecuación [59]:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + B\dot{q} + g(q) = u \quad (2.1)$$

la cuál se puede escribir mediante

$$M\ddot{q} + h(q, \dot{q}) = u \quad (2.2)$$

donde:

$$\begin{aligned} h(q, \dot{q}) &= C\dot{q} + F + g \\ F(\dot{q}) &= B\dot{q} \end{aligned}$$

Luego un controlador acorde a la dinámica inversa puede ser descrito de la siguiente forma:

$$u = Mv + h(q, \dot{q}) \quad (2.3)$$

Si se substituye la ecuación (2.3) en (2.2) y se realiza el álgebra correspondiente, la dinámica puede ser descrita de la siguiente forma:

$$M\ddot{q} + h(q, \dot{q}) = u = Mv + h(q, \dot{q})$$

$$\begin{aligned}\ddot{q} &= M^{-1} \{Mv + h(q, \dot{q}) - h(q, \dot{q})\} \\ \ddot{q} &= v\end{aligned}\tag{2.4}$$

De donde se obtiene un doble integrador que tiene la forma siguiente:

$$v = -K_0q - K_1\dot{q} + r\tag{2.5}$$

Ahora si aplicamos las ecuaciones (2.5) a (2.4), entonces el sistema en lazo cerrado es:

$$\ddot{q} + K_1\dot{q} + K_0q = r$$

Dada una trayectoria deseada  $q^d$  and  $\dot{q}^d$  para el sistema en lazo cerrado:

$$r = \ddot{q}^d + K_1\dot{q}^d + K_0q^d$$

Entonces el error de trayectoria puede considerarse por:

$$\begin{aligned}\ddot{q} + K_1\dot{q} + K_0q &= r = \ddot{q}^d + K_1\dot{q}^d + K_0q^d \\ (\ddot{q} - \ddot{q}^d) + K_1(\dot{q} - \dot{q}^d) + K_0(q - q^d) &= 0 \\ \ddot{e} + K_1\dot{e} + K_0e &= 0\end{aligned}\tag{2.6}$$

Donde las matrices de ganancia son:

$$K_0 = \text{diag} [a_1^2 \cdots a_n^2], \quad K_1 = \text{diag} [2a_1 \cdots 2a_n]$$

De modo que se obtiene un sistema en lazo cerrado globalmente desacoplado, con cada respuesta de la articulación igual a las respuesta de un sistema críticamente amortiguado de segundo orden cuya frecuencia natural esta dada por  $a_i$ . La frecuencia natural  $a_i$  determina la velocidad de respuesta de la junta o equivalentemente la razón del decaimiento del error de trayectoria.

Una forma alternativa para describir la dinámica de un manipulador puede ser realizada por (2.7).

$$\ddot{q} = M^{-1} [u - h(q, \dot{q})] = v(t)\tag{2.7}$$

Suponiendo que tenemos actuadores capaces de producir directamente una aceleración comandada (más que por la producción de una fuerza o par), entonces la dinámica del manipulador verifica que:

$$u = Mv + h(q, \dot{q})$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= M^{-1} [u - h(q, \dot{q})] \\ &= M^{-1} [(Mv + h(q, \dot{q})) - h(q, \dot{q})] \\ &= v \end{aligned}$$

Cuando se tienen incertidumbres, una forma de representar la dinámica del manipulador es:

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + B\dot{q} + g(q) = u$$

la cuál puede ser escrita alternativamente por:

$$M\ddot{q} + h(q, \dot{q}) = u \tag{2.8}$$

donde:

$$\begin{aligned} h(q, \dot{q}) &= \hat{C}\dot{q} + \hat{F} + \hat{g} + d(q, \dot{q}) \\ &= \hat{h}(q, \dot{q}) + d(q, \dot{q}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\hat{h}(q, \dot{q}) = h(q, \dot{q}) - d(q, \dot{q})$$

Si consideramos que la dinámica inversa de control es considerada como:

$$u = Mv + \hat{h}(q, \dot{q})$$

Entonces de (2.8) tenemos que la ecuación en lazo cerrado es la siguiente

$$\begin{aligned}
M\ddot{q} + h(q, \dot{q}) &= u = Mv + \hat{h}(q, \dot{q}) \\
M\ddot{q} + h(q, \dot{q}) &= Mv + (h(q, \dot{q}) - d(q, \dot{q})) \\
M\ddot{q} &= Mv + (h(q, \dot{q}) - d(q, \dot{q})) - h(q, \dot{q}) \\
\ddot{q} &= M^{-1} [Mv - d(q, \dot{q})] \\
\ddot{q} &= v - M^{-1}d(q, \dot{q}) \\
\ddot{q} &= v - \eta
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Con la consideración:  $\eta = M^{-1}d$ .

### 2.1.2. Dinámica de un Robot Manipulador Rígido

La dinámica de un robot manipulador rígido de n-articulaciones puede ser escrita por la siguiente ecuación [59]:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F(\dot{q}) = \tau \tag{2.10}$$

Donde  $q \in \mathfrak{R}^n$  denota las posiciones de las articulaciones,  $\dot{q} \in \mathfrak{R}^n$  denota las velocidades de las articulaciones,  $M(x_1) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercia,  $C(q, \dot{q}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  es la matriz centrípeta y de coriolis,  $G(q) \in \mathfrak{R}^n$  es el vector de gravedad,  $F \in R^n$  es una matriz diagonal definida positiva de términos de fricción (fricción de Coulomb), y  $\tau \in \mathfrak{R}^n$  es una entrada de control y se puede representar gráficamente en la Figura 2.2.

La dinámica para un robot manipulador descrita por (2.10) tiene las siguientes propiedades:

*Propiedad 1.* La matriz de inercia es simétrica y definida positiva, es decir;

$$m_1 \|x\|^2 \leq x^T M(x_1)x \leq m_2 \|x\|^2; \forall x \in R^n$$

Donde  $m_1$  y  $m_2$  son escalares constantes conocidas y  $\|\cdot\|$  denota la norma euclidiana.

*Propiedad 2.* La matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis es una matriz antisimétrica, es decir; satisface la siguiente relación:

$$x^T \left[ \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q}) \right] x = 0$$

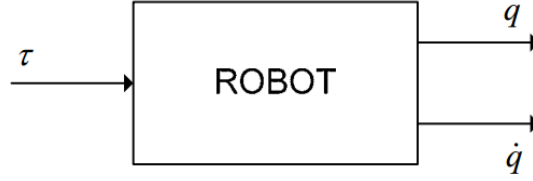


Figura 2.2: Dinámica de un Robot Manipulador

Donde  $C(q, x)y = C(q, y)x$ ,  $C(q, \dot{q}) = \sum_{k=1}^n C_k(q)\dot{q}_k$ ,  $\|C(q, \dot{q})\| \leq k_c \|\dot{q}\|$ ,  $C(q, \dot{q})\dot{q} = \dot{q}^T C_0(q)\dot{q}$ ,  $C_{k,ij}(q) = \left( \frac{\partial B_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial B_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial B_{jk}}{\partial q_i} \right)$ ,  $k_c = \frac{1}{2} \max_{q \in R^n} \sum_{k=1}^n \|C_k(q)\|$ ,  $C_0(q)$  es una matriz acotada,  $x, y \in R^n$ .

Si definimos:

$$\begin{aligned} x_1 &= q \\ x_2 &= \dot{q} \end{aligned}$$

Y además consideramos el error de trayectoria como:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= x_1 - x_1^d \\ \bar{x}_2 &= x_2 - \dot{x}_1^d \end{aligned}$$

Entonces podemos usar una ley de control PD de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \tau &= -K_p(q - q^d) - K_d(\dot{q} - \dot{q}^d) \\ &= -K_p \bar{x}_1 - K_d \bar{x}_2 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Donde  $K_p$  y  $K_d$  son matrices definidas positivas, simétricas y constantes, y corresponden a los coeficientes proporcionales y derivativos respectivamente,  $q^d \in \mathfrak{R}^n$  es la posición de la articulación deseada,  $\dot{q}^d \in \mathfrak{R}^n$  es la velocidad deseada de la articulación.

Entonces el sistema en lazo cerrado del Robot manipulador puede representarse gráficamente en la Figura 2.3.

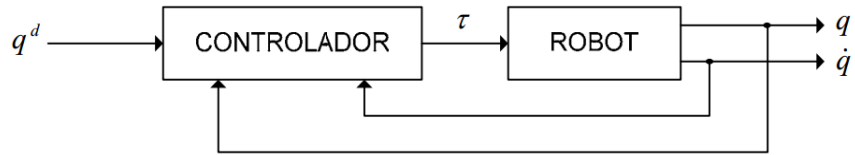


Figura 2.3: Dinámica de un Robot manipulador en lazo cerrado con el ángulo de giro deseado  $q^d$  sobre las articulaciones

## 2.2. Modelado de un robot de dos grados de libertad

### 2.2.1. Cinemática

Para validar los resultados teóricos obtenidos en la plataforma de pruebas del laboratorio, vamos a realizar un análisis sobre la cinemática y dinámica para el Robot de dos grados de libertad, es importante destacar que este mismo análisis es necesario para validar los resultados teóricos de los siguientes capítulos.

Un robot de dos grados de libertad con articulaciones giratorias es básicamente un par de eslabones unidos y actuados por un par de motores tal y como se muestra en la Figura 2.4.

Este método fue propuesto por Denavit y Hartenberg en 1955 [15] y describe una forma sistemática las coordenadas  $\{S_i\}$  correspondientes a cada eslabón  $i$  en una cadena cinemática y esta compuesto de las cuatro transformaciones básicas dependientes de las características geométricas de los eslabones siguientes:

1. Rotación sobre el eje  $z_{i-1}$  un ángulo  $\theta_i$ .
2. Traslación sobre el eje  $z_{i-1}$  una distancia  $d_i$ , es decir; un vector  $d_i = (0, 0, d_i)$ .
3. Traslación sobre el eje  $x_i$  una distancia  $a_i$ , es decir; un vector  $a_i = (0, 0, a_i)$ .
4. Rotación sobre el eje  $x_i$  un ángulo  $\alpha_i$ .

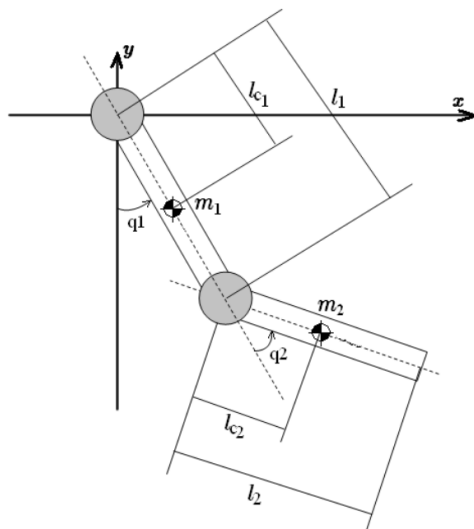


Figura 2.4: Robot de dos grados de libertad

De modo que la matriz de transformación es la siguiente.

$${}^{i-1}A_i = Rot_{z,\theta_i} Trans_{z,d_i} Trans_{x,a_i} Rot_{x,\alpha_i}$$

Para la elección de los parámetros es necesario desarrollar un algoritmo de acuerdo a los siguientes pasos:

1. Enumerar los eslabones (de 1 hasta  $n$ ), fijando como eslabón 0 la base fija del robot
2. Enumerar cada articulación (de 1 hasta  $n$ )
3. Localizar el eje de cada articulación, para este caso como las articulaciones son rotatorias entonces el eje será su propio eje de giro
4. Para  $i$  de 0 a  $n - 1$  situar el eje  $z_i$  sobre el eje de la articulación  $i + 1$ .
5. Situar el origen del sistema de la base  $\{S_0\}$  en cualquier punto del eje  $z_0$ . Los ejes  $x_0$  e  $y_0$  se sitúan de modo que formen un sistema de giro derecho con el eje  $z_0$ .



6. Para  $i$  de  $n - 1$  situar el sistema  $\{S_i\}$  solidario al eslabón  $i$  en la intersección del eje  $z_i$  con la línea normal común a  $z_{i-1}$  y  $z_i$ . Si los ejes se intersectan se ubica  $\{S_i\}$  en el punto de corte, para ejes paralelos  $\{S_i\}$  se ubica en la articulación  $i + 1$ .
7. Situar  $x_i$  en la línea normal común a  $z_{i-1}$  y  $z_i$ .
8. Situar  $y_i$  de modo que forme un sistema dextrógiro con  $x_i$  y  $z_i$ .
9. Situar el sistema  $\{S_i\}$  en el extremo del robot de modo que  $z_n$  con la dirección de  $z_{n-1}$  y  $x_n$  sea normal a  $z_{n-1}$  y  $z_n$ .
10. Obtener  $\theta_i$  como el ángulo necesario para girar alrededor del eje  $z_{i-1}$  para que  $x_{i-1}$  y  $x_i$  sean paralelos.
11. Obtener  $d_i$  como la distancia sobre  $x_i$  para desplazar el nuevo sistema  $\{S_{i-1}\}$  para que su origen coincida con  $\{S_i\}$ .
12. Elegir  $a_i$  como la distancia medida sobre el eje  $x_i$  que hay que desplazar el nuevo sistema  $\{S_{i-1}\}$  para que su origen coincida con el sistema  $\{S_i\}$ .
13. Elegir  $\alpha_i$  como el ángulo de debemos girar sobre el eje  $x_i$ , para que le nuevo sistema  $\{S_{i-1}\}$  coincida con  $\{S_i\}$ .
14. Obtener la matriz de transformación  ${}^{i-1}A_i$  definidas por:

$$\begin{aligned}
{}^{i-1}A_i &= Rot_{z,\theta_i} Trans_{z,d_i} Trans_{x,a_i} Rot_{x,\alpha_i} \\
&= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & \alpha C_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Donde  $Rot_{z,\theta_i}$  significa que se realiza una rotación un ángulo  $\theta_i$  sobre el eje  $z_i$ .

15. Obtener la matriz de transformación que relaciona el sistema de la base con el extremo del Robot mediante la matriz definida por:

$$T_0^i = A_1 A_2 \cdots A_i = \begin{bmatrix} R_0^i & o_0^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in R^{4 \times 4}$$

Para el caso de un robot de dos grados de libertad la matriz que define la posición y orientación de este, esta dada por:

$$T_0^2 = A_1 A_2$$

16. La matriz  $T$  define la orientación y posición del extremo a la base en función de las  $n$  posiciones de las articulaciones.

De acuerdo al método de D-H para el robot manipulador de dos grados de libertad se tiene el origen del la base del marco de referencia es  $o_1$  y  $o_2$  para el eslabón 2. Y su descripción geométrica se puede observar en la Figura 2.5.

En este método los parámetros  $(\theta_i, d_i, a_i, \alpha_i)$  de D-H dependen de las características geométricas de los eslabones y articulaciones y tienen los significados siguientes:

- $a_i$  es la distancia entre los ejes  $z_{i-1}$  y  $z_i$ , y es medida sobre el eje  $x_i$ .
- $d_i$  es la distancia entre el origen  $o_{i-1}$  y la intersección del eje  $x_i$  con el eje  $z_{i-1}$ , medido sobre el eje  $z_{i-1}$ .
- $\alpha_i$  es el ángulo formado entre los ejes  $z_{i-1}$  y  $z_i$ , medido en el plano normal a  $x_i$ .
- $\theta_i$  es el ángulo entre los ejes  $x_{i-1}$  y  $x_i$ , medidos en el plano normal a  $z_{i-1}$ .

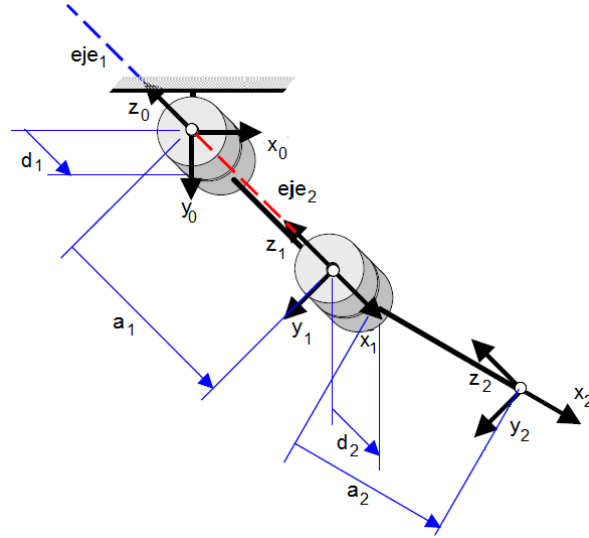


Figura 2.5: Descripción de parámetros de D-H para un robot de dos grados de libertad

Por otro lado el Jacobiano geométrico de un Robot manipulador esta dado por:

$$\begin{aligned} J_0^n &= [J_v, J_\omega]^T \\ v_0^n &= J_v \dot{q} \\ \omega_0^n &= J_\omega \dot{q} \end{aligned}$$

Donde  $J_v, J_\omega \in R^{3 \times n}$  y representan la parte lineal y angular en el mapeo de velocidades.

Velocidad Angular

Po la propiedad de antisimetría de matrices se tiene  $S^T + S = 0$ ,  $\frac{dR}{d\theta} = SR(\theta)$  y

$$\omega_0^n = \omega_0^1 + R_0^1 \omega_1^2 + \dots + R_0^{n-1} \omega_{n-1}^n$$

Donde  $\mathbf{k}$  es el eje rotacional.

$$\omega_0^n = \dot{q}_1 \mathbf{k} + R_0^1 \dot{q}_2 \mathbf{k} \dots + R_0^{n-1} \dot{q}_n \mathbf{k}$$

Se puede definir:

$$z_{i-1} = R_0^i \mathbf{k}$$

Tal que  $z_{i-1}$  la base del marco de referencia esta dada por los primeros tres elementos de la tercer columna de  $(k)$  en  $T_0^i$ . Luego si elegimos  $\omega_0^n = [z_0, z_1, z_{n-1}] \dot{q}$ , tal que:

$$J_\omega = [z_0, z_1, z_{n-1}]$$

Posteriormente si se aplica la regla de la cadena, para el efector final  $\dot{o}_0^n$  tenemos:

$$\dot{o}_0^n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial o_0^n}{\partial q_i} \dot{q}_i = [J_{v_1} \cdots J_{v_n}] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}, \quad J_{v_i} = \frac{\partial o_0^n}{\partial q_i}$$

Luego del paso 15 de la convención de D-H se tiene que:

$$T_0^n = \begin{bmatrix} R_0^n(q) & o_0^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = T_0^{i-1} T_{i-1}^i T_i^n = \begin{bmatrix} R_0^n & R_0^i o_i^n + R_0^{i-1} o_{i-1}^i + o_0^{i-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde  $o_i$  esta dado por los primeros tres elementos de la cuarta columna de  $T_0^i$ .

Si la  $j$  - ésima articulación es de revoluta, la  $i$ -ésima columna  $J_v$  es:

$$J_v = [J_{v1} \cdots J_{vn}], \quad J_{v_i} = z_{i-1} \times (o_j - o_{i-1})$$

Donde  $\times$  representa el producto cruz de los vectores  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = ab \sin \theta \bar{\mathbf{n}}$ , con:

$\bar{\mathbf{n}}$  como vector unitario perpendicular al plano que contiene a los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  en la dirección dada por la regla de la mano derecha.

Por otro lado sabemos que la energía cinética de traslación esta dada por:

$$K_T = \frac{1}{2} \dot{q}^T \left[ \sum_{i=1}^n m_i J_{v_i}^T(q) J_{v_i}(q) \right] \dot{q}$$

Y la energía cinética rotacional esta dada por:

$$K_R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\omega_0^i)^T I_i \omega_0^i = \frac{1}{2} \dot{q}^T \left[ \sum_{i=1}^n J_{\omega_i}^T I_i J_{\omega_i} \right] \dot{q}$$

Además de que la energía Potencial tiene la forma:

$$V = \sum_{i=1}^n m_i g h_0^i$$

Dado que los primeros dos términos de entrada de la última columna de  $T_0^i$  son la componentes  $x, y$  del punto  $a_i = l_{ci}$  en el marco de referencia:

$$\begin{aligned} h_0^i &= y_i \text{ en } o_0^i \\ T_0^i &= A_1 A_2 \cdots A_i = \begin{bmatrix} R_0^i & o_0^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Luego de la ecuación de Euler-Lagrange [59] tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} &= \tau \\ L &= K - V \\ K &= K_T + K_R \end{aligned}$$

Luego si se define:

$$D = \{d_{ij}\} = K_T + K_R$$

Entonces la ecuación dinámica es:

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + \Phi(q) = \tau \quad (2.12)$$

Donde:

$$\begin{aligned} M(q) &= D(q) \\ \Phi(q) &= [\phi_1, \dots, \phi_n]^T, \quad \phi_i = \frac{\partial V}{\partial q_i} \\ C(q, \dot{q}) &= \{c_{kj}\}, \quad c_{kj} = \sum_{i=1}^n c_{ijk} \dot{q}_i, \quad k, j = 1 \cdots n \end{aligned}$$

Y como ya sabemos los términos  $c_{ijk}$  indican los símbolos de Christoffel del siguiente tipo:

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \right)$$

### 2.2.2. Cálculo de cinemática Directa

De acuerdo a la representación gráfica de la Figura 2.4 para el primer eslabón  $o_1$  se tiene el siguiente sistema de coordenadas:

$$\begin{aligned} x &= l_1 \cos q_1 & \implies & \dot{x} = -l_1 \sin q_1 \dot{q}_1 \\ y &= l_1 \sin q_1 & \implies & \dot{y} = l_1 \cos q_1 \dot{q}_1 \end{aligned}$$

La cuál puede escribirse en forma matricial como:

$$\dot{\mathbf{x}} = J\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 & 0 \\ l_1 c_1 & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}$$

Por lo que para el efecto de la velocidad lineal se tiene:

$$J_{v1} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 & 0 \\ l_1 c_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego considerando para el segundo eslabón  $o_2$  tenemos:

$$\begin{aligned} x &= l_1 \cos q_1 + l_2 \cos (q_1 + q_2) & \implies & \dot{x} = -l_1 \sin q_1 \dot{q}_1 - a_2 \sin (q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ y &= l_1 \sin q_1 + l_2 \sin (q_1 + q_2) & \implies & \dot{y} = l_1 \cos q_1 \dot{q}_1 + a_2 \cos (q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{aligned}$$

Cuya representación matricial es la siguiente:

$$\dot{\mathbf{x}} = J\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}$$

De este modo el Jacobiano para la velocidad lineal se escribe por:

$$J_v = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

Por otro lado para la velocidad angular tenemos que:

$$\omega_1 = \dot{q}_1 \mathbf{k}, \quad \omega_2 = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \mathbf{k}$$

Si se considera:

$$I = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix}$$

Entonces el triple producto de  $\omega_i^T I_i \omega_i^T$  se puede simplificar como  $I_{33}$  veces el cuadrado de la magnitud de la velocidad angular.  $I_{33}$  para los dos eslabones esta definido por  $I_1$  e  $I_2$ . Dado que  $(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 = \dot{q}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \dot{q}$ , entonces la energía rotacional es:

$$\frac{1}{2} \dot{q}^T \left( I_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + I_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \dot{q}$$

De modo que la representación del Jacobiano geométrico para el efecto de la velocidad angular en el robot de dos grados de libertad tiene la siguiente estructura:

$$J_\omega = I_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + I_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como la energía potencial en el manipulador es la suma de los dos eslabones. En donde para cada eslabón la energía potencial es su masa multiplicada por la aceleración de la gravedad y la distancia al centro de masa, entonces tenemos la siguiente relación:

$$\begin{aligned} V_1 &= m_1 g l_{c1} \sin q_1 \\ V_2 &= m_2 g l_{c1} l_1 [\sin q_1 + l_2 \sin (q_1 + q_2)] \\ V &= V_1 + V_2 \end{aligned}$$

### 2.2.3. Cinemática para un robot de dos grados de libertad

Podemos encontrar los parámetros siguientes

Parámetros D-H				
Eslabón	$a_i$	$d_i$	$\alpha_i$	$\theta_i$
1	$l_1$	0	0	$q_1$
2	$l_2$	0	0	$q_2$

De donde podemos determinar las matrices de localización  $A_1$  correspondiente al primer eslabón y  $A_2$  para localizar el segundo eslabón.

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_{q_1} & -s_{q_1} & 0 & l_1 c_{q_1} \\ s_{q_1} & c_{q_1} & 0 & l_1 s_{q_1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} c_{q_2} & -s_{q_2} & 0 & l_2 c_{q_2} \\ s_{q_2} & c_{q_2} & 0 & l_2 s_{q_2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego para la matriz de transformación tenemos:

$$T_0^1 = A_1 = \begin{bmatrix} c_{q_1} & -s_{q_1} & 0 & l_1 c_{q_1} \\ s_{q_1} & c_{q_1} & 0 & l_1 s_{q_1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Usando  $c_1 c_2 - s_1 s_2 = c_{12} = \cos(\alpha + \beta)$ ,  $c_1 s_2 + c_2 s_1 = s_{12} = \sin(\alpha + \beta)$

$$\begin{aligned} T_0^2 = A_1 A_2 &= \begin{bmatrix} c_{q_1} c_{q_2} - s_{q_1} s_{q_2} & -c_{q_1} s_{q_2} - c_{q_2} s_{q_1} & 0 & l_1 c_{q_1} + l_2 c_{q_1} c_{q_2} - l_2 s_{q_1} s_{q_2} \\ c_{q_1} s_{q_2} + c_{q_2} s_{q_1} & c_{q_1} c_{q_2} - s_{q_1} s_{q_2} & 0 & l_1 s_{q_1} + l_2 c_{q_1} s_{q_2} + l_2 c_{q_2} s_{q_1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para  $T_0^1$  tenemos:

$$z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad o_1 = \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Luego para  $T_0^2$  tenemos:

$$z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad o_2 = \begin{bmatrix} l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

La primer columna del Jacobiano para el primer eslabón la podemos elegir como:

$$z_0 \times (o_1 - o_0) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ l_1 c_1 & l_1 s_1 & 0 \end{bmatrix} = -l_1 s_1 \mathbf{i} + l_1 c_1 \mathbf{j}$$

Luego el segundo eslabón no afecta al primer eslabón, por lo que la segunda columna es  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , de modo que para el efecto de la velocidad lineal del primer eslabón se tiene lo siguiente:

$$J_{v_{c1}} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 & 0 \\ l_1 c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego observamos que la primera columna para el Jacobiano del segundo eslabón es:

$$z_0 \times (o_2 - o_0) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_1 s_1 + l_2 s_{12} & 0 \end{bmatrix} = (l_1 c_1 + l_2 c_{12}) \mathbf{j} - (l_1 s_1 + l_2 s_{12}) \mathbf{i}$$

Y la segunda columna del Jacobiano para el segundo eslabón es:

$$z_1 \times (o_2 - o_1) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} - l_1 c_1 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} - l_1 s_1 & 0 \end{bmatrix} = l_2 c_{12} \mathbf{j} - l_2 s_{12} \mathbf{i}$$

De modo que:

$$J_{v_{c2}} = \begin{bmatrix} -(l_1 s_1 + l_2 s_{12}) & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Del análisis anterior tenemos para el primer el Jacobiano siguiente:

$$J_{v_{c1}} = \begin{bmatrix} -l_{c1}s_1 & 0 \\ l_{c1}c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para el segundo eslabón tenemos:

$$J_{v_{c2}} = \begin{bmatrix} -(l_1s_1 + l_{c2}s_{12}) & -l_{c2}s_{12} \\ l_1c_1 + l_{c2}c_{12} & l_{c2}c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego por definición la energía rotacional:

$$K_R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\omega_0^i)^T I_i \omega_0^i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \dot{q}^T J_{\omega_i}^T I_i J_{\omega_i} \dot{q}$$

Dado que:

$$\omega_0^i = J_{\omega} \dot{q}, \quad J_{\omega_i} = [z_0, z_1, z_{i-1}]$$

Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} J_{\omega_1}^T I_1 J_{\omega_1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_{1x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{1y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{1z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_{1z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{\omega_2}^T I_2 J_{\omega_2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_{2x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{2z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_{2z} & I_{2z} & 0 \\ I_{2z} & I_{2z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De modo que

$$K_R = \frac{1}{2} \dot{q}^T \left( I_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + I_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \dot{q}$$

Considerando la energía potencial del manipulador como la suma de la energía potencial de cada eslabón. Donde para cada eslabón la energía potencial es la masa multiplicada por la aceleración de la gravedad y la distancia al centro de masa, de modo que tenemos:

$$V_1 = m_1 g h_1, \quad V_2 = m_2 g h_2$$

Con las matrices de orientación y posición siguientes:

$$T_0^1 = A_1 = \begin{bmatrix} c_{q_1} & -s_{q_1} & 0 & l_1 c_{q_1} \\ s_{q_1} & c_{q_1} & 0 & l_1 s_{q_1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_0^2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde los primeros términos de la última columna de  $T_0^n$  son las componentes  $x, y$  de  $l_2$  en el marco de referencia.

$$h_1 = l_1 s_{q_1} = l_1 \sin q_1$$

$$h_2 = l_1 \sin q_1 + l_2 \sin (q_1 + q_2)$$

#### 2.2.4. Ecuación de Euler-Lagrange

Dada la ecuación de Euler-Lagrange siguiente:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau, \quad L = K - V, \quad K = K_T + K_R$$

Podemos considerar la matriz de inercia  $D(q)$ , usando  $c_1^2 + s_1^2 = 1$ ,  $c_{12}c_1 + s_{12}s_1 = c_2$ ,

$s_{12}c_1 + c_{12}s_1 = c_2$  de modo que:

$$D(q) = m_1 J_{v_{c1}}^T J_{v_{c1}} + m_2 J_{v_{c2}}^T J_{v_{c2}} + I_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + I_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{22} \\ d_{12} & d_{21} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_1 + I_2 & m_2 (l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_2 \\ m_2 (l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_2 & m_2 l_{c2}^2 + I_2 \end{bmatrix}$$

Si calculamos los símbolos de Christoffel con el siguiente algoritmo:

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \right), \quad c_{ijk} = c_{jik}$$

Entonces para cada término se tiene:

$$c_{111} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial d_{11}}{\partial q_1} + \frac{\partial d_{11}}{\partial q_1} - \frac{\partial d_{11}}{\partial q_1} \right) = 0$$

$$c_{121} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial d_{21}}{\partial q_2} + \frac{\partial d_{12}}{\partial q_2} - \frac{\partial d_{12}}{\partial q_1} \right) = -m_2 l_1 l_{c2} s_2$$

$$c_{221} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial d_{12}}{\partial q_2} + \frac{\partial d_{12}}{\partial q_2} - \frac{\partial d_{22}}{\partial q_1} \right) = -m_2 l_1 l_{c2} s_2$$

$$c_{112} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial d_{21}}{\partial q_1} + \frac{\partial d_{21}}{\partial q_1} - \frac{\partial d_{11}}{\partial q_2} \right) = m_2 l_1 l_{c2} s_2$$

$$c_{122} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial d_{22}}{\partial q_1} + \frac{\partial d_{21}}{\partial q_2} - \frac{\partial d_{21}}{\partial q_2} \right) = 0$$

$$c_{222} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial d_{22}}{\partial q_2} + \frac{\partial d_{22}}{\partial q_2} - \frac{\partial d_{22}}{\partial q_2} \right) = 0$$

Y si consideramos que en la dinámica del Robot descrita por (2.12) el vector de compensación por gravedad es el siguiente  $\Phi(q) = [\phi_1; \phi_2]^T$  con:

$$\phi_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1} = (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \cos q_1 + m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2)$$

$$\phi_2 = \frac{\partial V}{\partial q_2} = m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2)$$

Entonces la ecuación dinámica se convierte en:

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + \Phi(q) = \tau$$

Podemos considerar los términos siguientes:

$$M(q) = D(q) = \begin{bmatrix} m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_1 + I_2 & m_2 (l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_2 \\ * & m_2 l_{c2}^2 + I_2 \end{bmatrix}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} h\dot{q}_2 & h\dot{q}_2 + h\dot{q}_1 \\ -h\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad h = -m_2 l_1 l_{c2} \sin q_2$$

$$\Phi(q) = \begin{bmatrix} (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \cos q_1 + m_2 l_{c2} g \cos (q_1 + q_2) \\ m_2 l_{c2} g \cos (q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

$c_{kj} = \sum_{i=1}^n c_{ijk} \dot{q}_i$ ,  $k, j = 1 \dots n$ . De acuerdo al cálculo directo tenemos:

$$x = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos (q_1 + q_2)$$

$$y = l_1 \sin q_1 + l_2 \sin (q_1 + q_2)$$

Y por la convención de D-H se tiene:

$$T_0^2 = A_1 A_2 = \begin{bmatrix} c_{q1} c_{q2} - s_{q1} s_{q2} & -c_{q1} s_{q2} - c_{q2} s_{q1} & 0 & l_1 c_{q1} + l_2 c_{q1} c_{q2} - l_2 s_{q1} s_{q2} \\ c_{q1} s_{q2} + c_{q2} s_{q1} & c_{q1} c_{q2} - s_{q1} s_{q2} & 0 & l_1 s_{q1} + l_2 c_{q1} s_{q2} + l_2 c_{q2} s_{q1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Usando:  $c_1 c_2 - s_1 s_2 = c_{12} = \cos(\alpha + \beta)$ ,  $c_1 s_2 + c_2 s_1 = s_{12} = \sin(\alpha + \beta)$  con lo que determinamos las coordenadas cartesianas del robot siguientes:

$$x = l_1 c_1 + l_2 c_{12} = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos (q_1 + q_2)$$

$$y = l_1 s_1 + l_2 s_{12} = l_1 \sin q_1 + l_2 \sin (q_1 + q_2) \quad (2.13)$$

### 2.2.5. Cinemática Inversa

Sabemos que la Cinemática inversa determina el valor de las articulaciones a partir de las coordenadas  $(x, y)$  de (2.13) de modo que el vector  $\mathbf{q} = f(\mathbf{X})$ , con  $\mathbf{q} = [q_1; q_2]^T$ , por lo que si consideramos la ley de cósenos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(a.b)$$

y

$$\cos q_2 = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2} = D$$

Entonces el ángulo de giro del segundo eslabón es:

$$\begin{aligned} \sin q_2 &= \pm\sqrt{1 - D^2} \\ q_2 &= \tan^{-1} \frac{\pm\sqrt{1-D^2}}{D} \end{aligned}$$

Y el ángulo de giro del primer eslabón es:

$$q_1 = \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{l_2 \sin q_2}{l_1 + l_2 \cos q_2} \right)$$

Con lo que el ángulo de giro de las articulaciones puede calcularse mediante:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{l_2 \sin q_2}{l_1 + l_2 \cos q_2} \right) \\ \tan^{-1} \frac{\pm\sqrt{1-D^2}}{D} \end{bmatrix}$$

De donde podemos observar que estos dependen directamente de la configuración geométrica del Robot.

## 2.2.6. Modelado con compensación por Gravedad

Si consideramos la dinámica del Robot manipulador descrita por:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + \Phi(q) = \tau$$

La cuál para un Robot de dos grados de libertad es descrita por la Figura 2.6, además de aquí podemos observar sus parámetros físicos de acuerdo a las siguientes componentes:

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}, \quad C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{11}(q, \dot{q}) & C_{12}(q, \dot{q}) \\ C_{21}(q, \dot{q}) & C_{22}(q, \dot{q}) \end{bmatrix}, \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

Donde le vector de pares gravitacionales  $\Phi(q)$  cumple con la propiedad de linealidad, es decir;  $\Phi(q) = \Gamma(q)\Omega$ , por lo que tenemos:

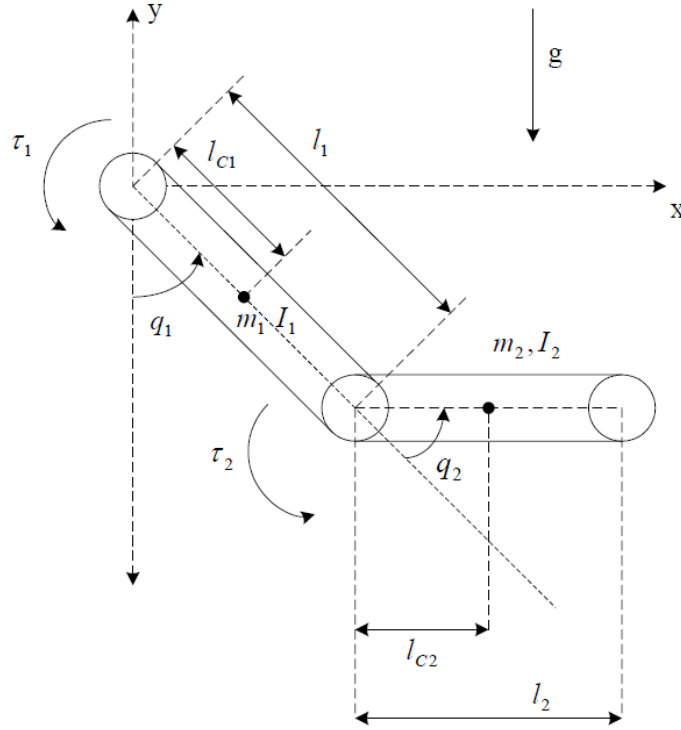


Figura 2.6: Diagrama esquemático de Robot de dos grados de libertad para obtención de parámetros geométricos

$$\Phi(q) = \begin{bmatrix} \phi_1(q) \\ \phi_2(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \cos q_1 + m_2 l_{c2} g \cos (q_1 + q_2) \\ m_2 l_{c2} g \cos (q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

La cuál por la propiedad de linealidad se puede escribir como:

$$\Phi(q) = \Gamma(q)\Omega = \begin{bmatrix} \text{sen}(q_1) & \text{sen}(q_1 + q_2) \\ 0 & \text{sen}(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (m_1 l_{c1} + m_2 l_1)g \\ m_2 l_{c2}g \end{bmatrix}$$

La cuál no es única ya que otra posibilidad sería considerar:

$$\Phi(q) = \Gamma(q)\Omega = \begin{bmatrix} (m_1 l_{c1} + m_2 l_1)\text{sen}(q_1) + m_2 l_{c2}\text{sen}(q_1 + q_2) \\ m_2 l_{c2}\text{sen}(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ g \end{bmatrix}$$

De forma general los parámetros geométricos los podemos ordenar de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
M_{11}(q) &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_1 + I_2 \\
M_{12}(q) &= m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2 \\
M_{21}(q) &= m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2 \\
M_{22}(q) &= m_2 l_{c2}^2 + I_2 \\
C_{11}(q, \dot{q}) &= -m_2 l_1 l_{c2} \text{sen}(q_2) \dot{q}_2 \\
C_{12}(q, \dot{q}) &= -m_2 l_1 l_{c2} \text{sen}(q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2] \\
C_{21}(q, \dot{q}) &= m_2 l_1 l_{c2} \text{sen}(q_2) \dot{q}_1 \\
C_{22}(q, \dot{q}) &= 0 \\
g_1(q) &= [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \text{sen}(q_1) + m_2 g l_{c2} \text{sen}(q_1 + q_2) \\
g_2(q) &= m_2 g l_{c2} \text{sen}(q_1 + q_2)
\end{aligned}$$

### 2.3. Redes Neuronales Artificiales

Una Red Neuronal Artificial (RNA) básicamente es una sobresimplificación de como se organizan las neuronas biológicas (específicamente las neuronas motoras) las cuales constituyen el sistema nervioso central de los seres humanos [52], por su parte para el caso de estudio de las RNA la forma de comunicación es mediante impulsos eléctricos llamados sinapsis. Básicamente la constitución de una neurona tiene tres partes esenciales: Cuerpo celular, Dendrita y Axón y la descripción gráfica se hace en la Figura 2.7.

Las RNA se pueden clasificar dentro del grupo de sistemas inteligentes, entre los que se encuentran: sistemas adaptables, difusos, genéticos y todos aquellos que tratan de modelar el conocimiento y el aprendizaje. El término inteligentes esta basada en el echo de que los sistemas mencionados anteriormente tienen la capacidad de adaptarse a su medio ó aprender de él de forma autónoma, formalmente las redes neuronales tienen la siguiente definición:

**Definición 2.1** [24]. *Una Red Neuronal Artificial es una gran cantidad de procesadores*



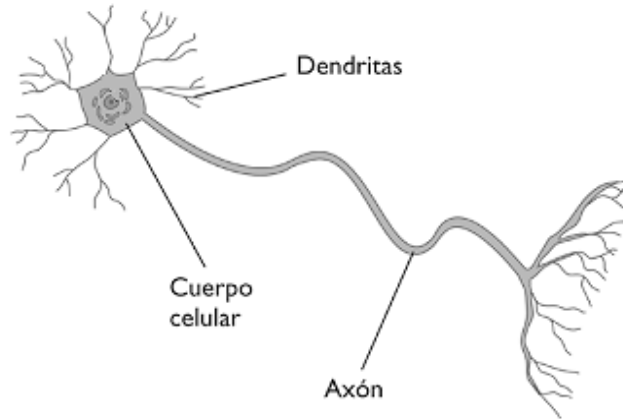


Figura 2.7: Forma básica de una neurona biológica

*paralelos distribuidos, formados por una única unidad de procesamiento, la cuál tiene la natural de almacenar el conocimiento experimental y tener ese conocimiento disponible para usar.*

De acuerdo a la definición anterior las redes neuronales tienen un arreglo de elementos básicos de procesamiento con capacidad de entrenamiento (Figura 2.8) y computo paralelo, este entrenamiento consiste en el ajuste de algunos parámetros ( $w_{in}$ ,  $\theta_i$ ) con el fin de que la salida de la red alcance algún grado de precisión a partir de las variables de entrada mediante el ajuste paramétrico.

El conocimiento en una red neuronal artificial viene del medio ambiente mediante un proceso de aprendizaje en la que los pesos sinápticos sirven para almacenar el conocimiento adquirido. En el proceso de reconocimiento de patrones un modelo neuronal ampliamente aplicado es el perceptrón, cuyo modelo matemático consta de tres elementos básicos descritos a continuación e ilustrados en la Figura 2.9.

1. Un conjunto de sinapsis o uniones caracterizadas por un peso. Se denota regularmente que  $x_j$  es la entrada de la sinapsis  $j$  que esta conectada a la neurona  $k$ ,  $x_j$  es multiplicada por el peso sináptico  $w_{kj}$ .

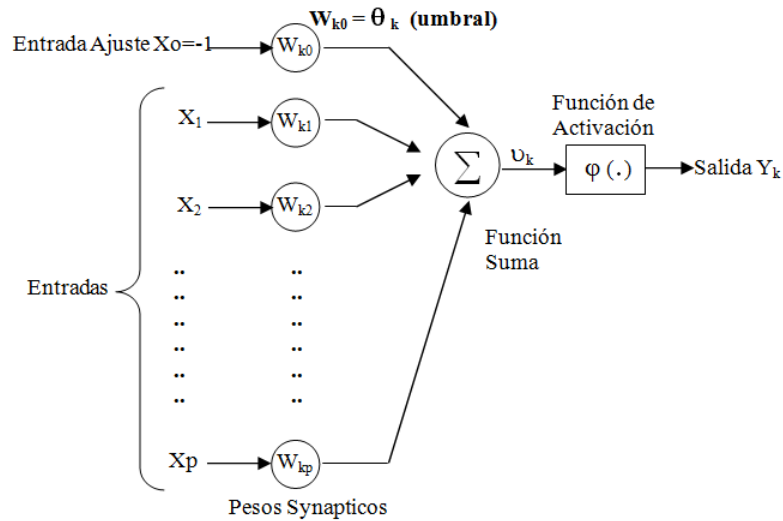


Figura 2.8: Estructura de una neurona artificial básica

2. Operador lineal, es decir la suma de las señales de entrada multiplicadas por sus pesos sinápticos respectivos.
3. Función de Activación para limitar la salida de la neuronal  $f(z)$ .

El tipo de estructura mas simple que existe en las redes neuronales es la llamada FeedForward ilustrada en la Figura 2.10, en la cual la salida de una red neuronal depende únicamente de sus entradas y no existe conexión de la salida de las neuronas con su entrada, el flujo de la información es hacia un solo sentido y las neuronas se actualizan siempre al mismo tiempo y no dependen de señales en instantes anteriores de tiempo se dice que es una red neuronal estática porque la respuesta de la red neuronal es invariante en el tiempo y este es del tipo de Red Neuronal Artificial utilizada en el presente trabajo.

Existen tres tipos de redes neuronales estáticas: las redes de una sola capa, las redes neuronales multicapa y las redes neuronales de funciones radiales básicas. Las redes neuronales estáticas son muy útiles en los problemas de clasificación de patrones y aproximación de funciones porque construyen funciones no lineales entre el espacio de entrada al espacio de

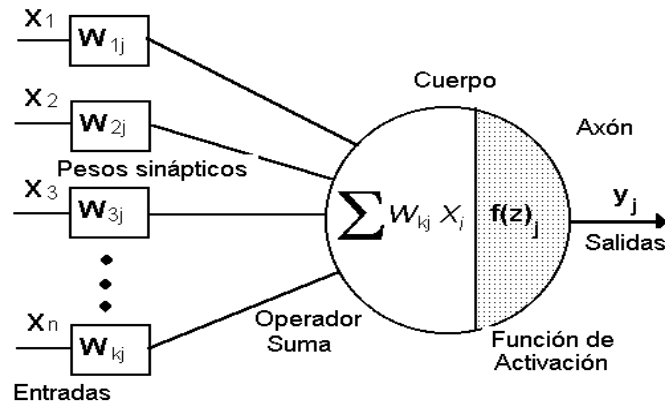


Figura 2.9: Perceptrón simple

salida de las variables involucradas. Una red neuronal con conexiones hacia adelante con una capa oculta no lineal y una capa de salida lineal puede aproximar cualquier función con el grado de precisión que se desee. Es la forma más simple de redes neuronales feedforward, tiene solo una capa de neuronas, el perceptrón es la red neuronal de una capa más difundida, el cual consiste en una sola neurona y se ilustra en la Figura 2.8.

Usualmente el umbral ( $w_0$ ) es tratado como un peso sináptico conectado al valor fijo  $-1$ , la salida del perceptrón es calculado como

$$y(k) = \varphi\left(\sum_{j=1}^n w_j x_j u + w_0\right), \quad (2.14)$$

Donde  $w$  es el vector de los pesos sinápticos para cada  $k$  en el espacio  $n$ -dimensional, la ecuación  $w^T u$  con coordenadas las coordenadas  $u_1, u_2, \dots, u_n$ .

Este algoritmo está basado en el método de gradiente descendente, resultando la ley que actualiza los pesos de la red de la forma:

$$w(k+1) = w(k) + \eta e(k) u(k). \quad (2.15)$$

Las redes neuronales multicapa tienen las siguientes tres características que las distinguen:

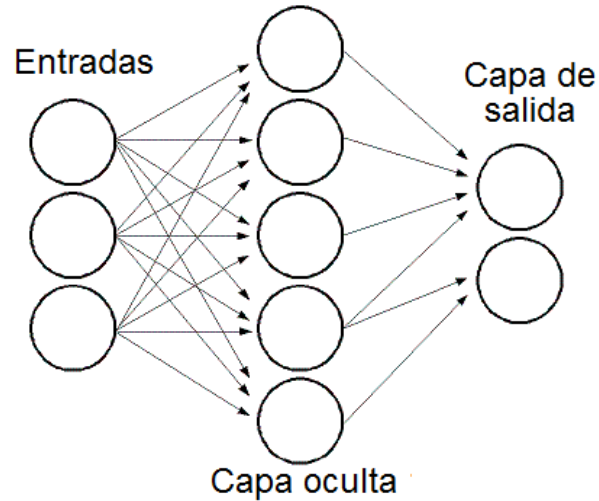


Figura 2.10: Red Neuronal Artificial FeedForward

1. La función de activación de cada neurona es suave al contrario de las funciones usadas en las redes de una sola capa. Usualmente la función usada es una función tipo sigmoide la cuál esta definida como:

$$\varphi_i(\nu_i) = \frac{1}{(1 + e^{-\nu_i})}$$

2. La red neuronal tiene una o mas capas de neuronas ocultas.
3. Las redes tienen un alto grado de conectividad.

Y se ilustra graficamente en la Figura 2.11.

El algoritmo de aprendizaje utilizado para ajustar los pesos sinápticos del perceptrón multicapa es el Back Propagation. En el cuál el error de la salida de la neurona  $j$  de la capa de salida esta dado como:

$$e_j(k) = d_j(k) - y_j(k), \quad (2.16)$$

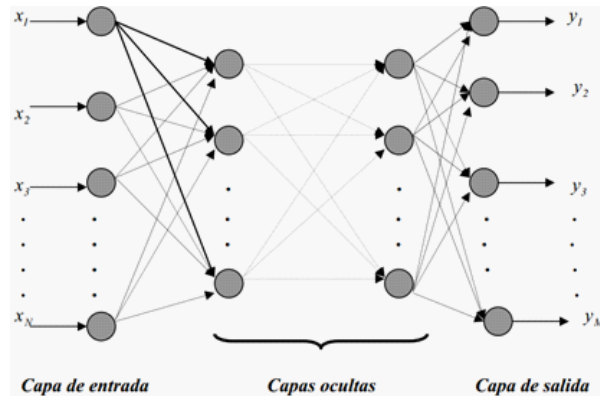


Figura 2.11: Red neuronal multicapa

donde:

$d_j$  es la salida deseada.

$y_j$  es la salida de la red neuronal

$k$  indica el elemento del arreglo de entrada.

El error cuadrático medio instantáneo se escribe como:

$$\varepsilon(k) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^l e_j(k) \quad (2.17)$$

Donde  $l$  es el número de neuronas de la capa de salida. Luego el promedio del error es obtenido de la suma de  $\varepsilon(k)$  y normalizado con respecto al el número de épocas.

$$\varepsilon_{av} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon(k), \quad (2.18)$$

Usando  $N$  ejemplos, que forman una época.  $\varepsilon_{av}$  representa la función de costo a minimizar en el aprendizaje, de modo que el objetivo del proceso de aprendizaje es ajustar los parámetros libres de la red, para minimizar el valor de  $\varepsilon_{av}$ . Para hacer eso el algoritmo back propagation aplica una corrección  $\Delta w_{ji}(k)$  al peso sináptico  $w_{ji}(k)$ , el cuál es proporcional al gradiente

$\partial\varepsilon(k)/\partial w_{ij}(k)$  y el cálculo de ese gradiente tiene la forma:

$$\frac{\partial\varepsilon(k)}{\partial w_{ij}(k)} = \frac{\partial\varepsilon(k)}{\partial e_j(k)} \frac{\partial e_j(k)}{\partial y_j(k)} \frac{\partial y_j(k)}{\partial v_j(k)} \frac{\partial v_j(k)}{\partial w_{ji}(k)} \quad (2.19)$$

Diferenciando la ecuación (2.19) tenemos:

$$\frac{\partial\varepsilon(k)}{\partial w_{ij}(k)} = -e_j(k)\varphi'_j(v_j(k))y_i(k) \quad (2.20)$$

El factor de corrección  $\Delta w_{ji}(k)$  aplicado a los pesos sinápticos  $w_{ji}(k)$  se define por la regla delta:

$$\Delta w_{ji}(k) = -\delta \frac{\partial\varepsilon(k)}{\partial w_{ij}(k)} \quad (2.21)$$

Un inconveniente de las redes neuronales MLP es que su entrenamiento es lento, la minimización del índice del error cuadrático de salida requiere de comparar en varias ocasiones el conjunto de datos de entrenamiento con la respuesta de la red neuronal. Las redes neuronales con funciones de base radial (RBR) son una alternativa a las redes neuronales MLP, en el contexto de que las RBF las capas ocultas están conformadas por un conjunto de funciones que constituyen una base para el problema de clasificación. La justificación matemática la establece el teorema de Cover (Cover, 1965), se basa en que un problema de clasificación es más probable que sea linealmente separable si se transforma en otro de dimensión mayor.

Las funciones de base radial fueron introducidas primero para la solución de problemas de interpolación multivariable. El trabajo pionero en este tema fue Powell, 1985. Broomhead y Lowe en 1988, exploraron por primera vez el uso de las redes neuronales con funciones de base radial para poder realizar una clasificación no lineal. A diferencia de la disposición que se tiene en las funciones de activación de la red MLP que permite construir modelos de entrenamiento mediante el algoritmo de back-propagation, las nuevas redes con funciones de base radial construyen sus modelos con funciones de activación que son diferente tanto en la capa oculta como en la capa de salida, es decir; una red RBR está diseñada con neuronas en la capa oculta activadas mediante funciones radiales de carácter no lineal con sus centros propios y en la capa de salida mediante funciones lineales.

La estructura de las redes de base radial presenta tres capas bien definidas:

1. La capa de nodos de entrada, completamente conectadas a las neuronas de la capa oculta.
2. La capa oculta de neuronas que proveen una transformación no lineal activada por las funciones de base radial.
3. La capa de salida, también completamente interconectada a la capa oculta y activada a través de una función lineal continua.

La construcción de una red RBR requiere de una mayor cantidad de neuronas en los nodos ocultos que en las redes MLP. Aunque las redes RBR no son comúnmente utilizadas en aplicaciones que impliquen un alto volumen de patrones de entrenamiento, se le reconoce como una red con una alta eficiencia en la fase de entrenamiento. El entrenamiento a diferencia de la red MLP usando el algoritmo de aprendizaje de retro-propagación, es solamente hacia adelante, de este modo la salida de una red RBR en general, está influenciada por una transformación no lineal originada en la capa oculta a través de la función de base radial y una lineal en la capa de salida a través de la función lineal continua. En la Figura 2.12 se presenta una red RBR, donde  $x_i$ , son las entradas a la red  $i = 1, 2, \dots, n$ ; la salida está dada por  $y = f(x)$ ; en donde las  $i$  son las funciones de base radial, para este caso son funciones gaussianas. Si la red neuronal presenta  $n$  neuronas en la capa oculta, entonces la salida de la red neuronal de base radial se expresa de la forma:

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N w_i \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|) \quad (2.22)$$

Donde  $\{\varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|) \mid i = 1, 2, \dots, N\}$  es un conjunto de  $N$  funciones arbitrarias generalmente no lineales, conocidas como funciones radiales básicas, y  $\|\cdot\|$  denota la norma que usualmente es la Euclídeana, los datos conocidos  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{m_0}, i = 1, 2, \dots, N$  son tomadas para ser los centros de las funciones radiales básicas.

Algunas de las funciones radiales básicas más utilizadas son:

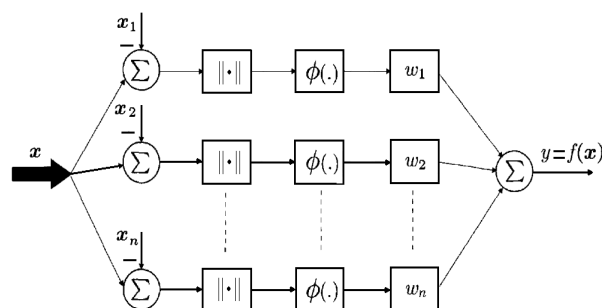


Figura 2.12: Estructura de una Red Neuronal de funciones de base radial.

Multi cuadrática:  $\varphi(r) = (r^2 + c^2)^{1/2}$ , para algún  $c > 0$  y  $r \in \mathbb{R}$

Multi cuadrática Inversa:  $\varphi(r) = \frac{1}{(r^2 + c^2)^{1/2}}$ , para algún  $c > 0$  y  $r \in \mathbb{R}$

Gausiana:  $\varphi(r) = \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$ , para algún  $\sigma > 0$  y  $r \in \mathbb{R}$

En general una red RBR tiene un mejor desempeño con un mayor volumen de datos de entrenamiento que su contraparte la red MLP, presentan una arquitectura simplificada con una capa oculta, su entrenamiento es rápido y se puede realizar una combinación de diferentes paradigma de aprendizaje.

Un problema en las Redes Neuronales Estáticas es el almacenamiento de información temporal, esto se realiza incluyendo retardos en las entradas y las salidas, sin embargo, es una representación limitada, ya que solo puede almacenar un número finito de entradas previas, una alternativa para solucionar este tipo de problemas es el uso de Redes Neuronales en Diferenciales (DNN) para tiempo continuo y para tiempo discreto utilizamos el nombre de Redes Neuronales Recurrentes (RNN) y cuyo estudio detallado escapa de los alcances del presente trabajo, a lo cuál solo se mencionaran algunas características básicas. Debto de las tareas para este tipo de redes son: La predicción de series, la identificación y el control de sistemas dinámicos.

Una de las primeras estructuras de una red neuronal retroalimentada fue propuesta por



Hopfield y usa su red para describir redes de circuitos eléctricos, ver [24]. Existen dos versiones de la red neuronal de Hopfield:

La red neuronal discreta de Hopfield la cuál se representa por el modelo matemático siguiente:

$$x_i(k+1) = \text{sgn} \left[ \sum_{j=1}^n w_{ij} x_{ij}(k) + u_i - \rho_i \right], \quad (2.23)$$

Donde:

$x_i$  es el estado de la  $i$  – *ésima* neurona,

$n$  es el número de neuronas,

$u_i$  es la entrada a la  $i$  – *ésima* neurona,

$\rho_i$  es el umbral de la  $i$  – *ésima* neurona.

$w_{ik}$  es el peso sináptico que conecta la neurona  $j$  a la neurona  $i$ .



# Capítulo 3

## PID estable en el espacio articular

### 3.1. Introducción

Sabemos que el controlador PD es el esquema de control mas simple aplicado en robots manipuladores ya que tan solo con la elección de alguna ganancia positiva el controlador garantiza la estabilidad [59] para el problema de regulación. Si embargo no se puede garantizar la estabilidad asintótica cuando la dinámica del manipulador incluye los vectores de par gravitacional, vector de fricción y de forma general otras incertidumbres sin que se aplique una compensación con modelo de referencia. Requiriendo así el conocimiento de la dinámica del robot. Por ejemplo en los trabajos referentes a: compensación adaptable de gravedad [64][58], compensación por gravedad deseada [35], y control PD mas medición de posición [50], observamos que se requiere información estructural del vector de gravedad en el controlador PD. Por otro lado algunos controladores PD no lineales también pueden alcanzar la estabilidad asintótica, tales como: control PD con ganancias variantes en el tiempo [53], ganancias no lineales [47], y compensación por modos deslizantes [51].

Desde el punto de vista del control, el error de posición causado por los pares gravitacionales puede eliminarse introduciendo una componente integral al controlador PD. Esta técnica de control PID es utilizada ampliamente en Robots industriales. El controlador lineal PID típico no incluye términos de la dinámica del robot en su ley de control, y con el fin de

asegurar la estabilidad asintótica del controlador PID el método más simple es convertir el controlador lineal PID a uno no lineal. Por ejemplo el error de posición ha sido modificado en un controlador no lineal en el trabajo de [4]; Por su parte en los trabajos de [36] y [60] el término integral fue saturado por una función no lineal; en el trabajo de [2] se opta por una saturación a la entrada, En el trabajo de [1] se realiza una transformación de un observador no lineal a una forma de control PID. Por otro lado la prueba de estabilidad asintótica semi-globalmente fue realizada en el trabajo de [49] gracias a la adición de un término integral extra al filtro de posición. En [30] y [51] un control PID fue modificado en un forma de variación estructural con un controlador PID mediante deslizamiento de superficie. Por su parte [34] se obtuvieron condiciones de estabilidad asintótica global gracias a la adición de términos proporcional y derivativos en el controlador lineal PID. A pesar de que los controladores industriales PID han sido utilizados ampliamente, existen pocos trabajos referentes a las condiciones explícitas y análisis de estabilidad. Pocos trabajos se han realizado sobre el controlador PID lineal utilizando la dinámica en una forma desacoplada y no lineal tal como en el trabajo de [54], aun así este controlador PID no puede garantizar la estabilidad asintótica. Para las condiciones suficientes de estabilidad de un controlador PID lineal puede consultarse el trabajo de Kelly [37] el cuál esta basado en un análisis de Lyapunov. Con frecuencia estas condiciones no son explícitas y las ganancias no se pueden elegir directamente, para ello se ha utilizado el método un tanto complejo [38].

En esta sección del trabajo de tesis se propone un análisis de Lyapunov novedoso para el controlador lineal PID en el cuál las condiciones suficientes de estabilidad asintótica son simples y explícitas, donde las ganancias del controlador lineal PID pueden seleccionarse bajo estas condiciones directamente.

Cuando las mediciones de velocidad no están disponibles es necesario utilizar un observador de velocidad, es decir; un filtro de posición para lo cuás en el siguiente trabajo se realiza una prueba la estabilidad asintótica para el control lineal PID con observador propuesto, este análisis proporciona condiciones explícitas para elegir las ganancias del control lineal PID así como los parámetros del observador de velocidad.

Posteriormente se utilizará un robot manipulador de dos grados de libertad para veri-

ficar las condiciones de sintonización del controlador PID, se propone además un método sistemático para mejorar el índice de desempeño. Los resultados experimentales muestran que la metodología propuesta es una herramienta analítica para el diseño de controladores que por su constitución son ajustados experimentalmente.

## 3.2. Control Estable PD con compensación por gravedad

Para realizar un estudio sobre el comportamiento de la dinámica de un robot manipulador considerando el término de gravedad, primero pondremos en contexto algunas propiedades indispensables sobre la dinámica.

*Propiedad 1.* La matriz de inercia es simétrica y definida positiva, es decir; tiene la forma:

$$m_1 \|x\|^2 \leq x^T M(x_1)x \leq m_2 \|x\|^2; \forall x \in R^n$$

Donde  $m_1, m_2$  son constantes escalares conocidas y  $\|\circ\|$  representa la norma euclidiana.

*Propiedad 2.* La matriz de fuerzas centrípetas y de coriolis es antisimétrica y satisface la siguiente relación:

$$x^T \left[ \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q}) \right] x = 0$$

Donde  $C(q, x)y = C(q, y)x$ ,  $C(q, \dot{q}) = \sum_{k=1}^n C_k(q)\dot{q}_k$ ,  $\|C(q, \dot{q})\| \leq k_c \|\dot{q}\|$ ,  $C(q, \dot{q})\dot{q} = \dot{q}^T C_0(q)\dot{q}$ ,  $C_{k,ij}(q) = \left( \frac{\partial B_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial B_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial B_{jk}}{\partial q_i} \right)$ ,  $k_c = \frac{1}{2} \max_{q \in R^n} \sum_{k=1}^n \|C_k(q)\|$ ,  $C_0(q)$  es una matriz acotada,  $x, y \in R^n$ .

Definamos:

$$x_1 = q, \quad x_2 = \dot{q}$$

Entonces el error de trayectoria lo podemos considerar como:

$$\bar{x}_1 = x_1 - x_1^d, \quad \bar{x}_2 = x_2 - \dot{x}_1^d$$

Por lo que el control PD estandar es:

$$\tau = -K_p(q - q^d) - K_d(\dot{q} - \dot{q}^d) = -K_p \bar{x}_1 - K_d \bar{x}_2 \quad (3.1)$$

Luego la ley de control clásica PD industrial puede representarse por:

$$\tau = -K_p(q - q^d) - K_d(\dot{q} - \dot{q}^d) = PD_1 \quad (3.2)$$

Donde  $K_p$  y  $K_d$  matrices definidas positivas, simétricas y de coeficientes constantes, las cuáles corresponden a los términos proporcional y derivativos respectivamente,  $q^d \in \mathfrak{R}^n$  representa la posición deseada en cada articulación,  $\dot{q}^d \in \mathfrak{R}^n$  es la velocidad deseada en cada articulación. En este capítulo primero discutiremos el caso de regulación donde la posición es una constante deseada, es decir;  $\dot{q}^d = 0$ .

En el control de robots las posiciones deseadas en las articulaciones son generadas por una planificación de trayectoria [37] la cuál se aplica directamente sobre los motores de cada articulación. El control por regulación se utiliza en este sentido para forzar a cada articulación a seguir las posiciones deseadas.

Para el análisis de estabilidad en el control PD, podemos utilizar la función candidata de Lyapunov siguiente:

$$V_{PD} = \frac{1}{2}\dot{q}^T M \dot{q} + \frac{1}{2}\tilde{q}^T K_p \tilde{q} \quad (3.3)$$

$$\tilde{q} = q - q^d \quad (3.4)$$

La cuál no es única, luego de las propiedades de simetría y antisimetría mencionadas anteriormente se tiene:

$$\dot{q}^T \left[ \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q}) \right] \dot{q} = 0$$

Entonces podemos expresar:

$$\dot{q}^T (G + F) \leq \dot{q}^T K_1 \dot{q} + (G + F)^T K_1^{-1} (G + F)$$

Con  $K_1$  como matriz definida positiva. Luego si obtenemos la derivada de la función candidata de Lyapunov (3.3):

$$\dot{V}_{PD} = -\dot{q}^T K_d \dot{q} + \dot{q}^T (G + F) \leq -\dot{q}^T (K_d - K_1) \dot{q} + \bar{d} \quad (3.5)$$

Donde:

$$(g + f)^T K_1^{-1} (g + f) \leq \bar{d}$$

Con  $\bar{d}$  elegida como la cota superior de  $g + f$ . Si elegimos  $K_d > K_1$ , el error de regulación  $\tilde{q}$  esta acotado (estable), y  $\|\dot{q}\|_{(K_d - K_1)}$  converge a  $\bar{d}$ .

Luego para el controlador PD con compensación por gravedad agregamos un término de gravedad  $G(q)$  al controlador (3.1) de modo que tenemos lo siguiente:

$$\tau = -K_p \bar{x}_1 - K_d \bar{x}_2 + G(q) \quad (3.6)$$

Entonces la función candidata de Lyapunov puede ser:

$$V_1 = \frac{1}{2} \bar{x}_2^T M \bar{x}_2 + \frac{1}{2} \bar{x}_1^T K_p \bar{x}_1 \quad (3.7)$$

Usando la dinámica para el robot de la siguiente forma:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau$$

De modo que podemos considerar:

$$M\dot{x}_2 = M(q)\ddot{q} = -Cx_2 - G + \tau \quad (3.8)$$

Luego la derivada de 3.7 es:

$$\dot{V}_1 = \bar{x}_2^T M \dot{\bar{x}}_2 + \frac{1}{2} \bar{x}_2^T \dot{M} \bar{x}_2 + \bar{x}_1^T K_p \bar{x}_1 \quad (3.9)$$

Usando (3.6) y (3.8)

$$\bar{x}_2^T M \dot{\bar{x}}_2 = \bar{x}_2^T (-Cx_2 - G - F + \tau) = -\bar{x}_2^T Cx_2 - \bar{x}_2^T K_p \bar{x}_1 - \bar{x}_2^T K_d x_2$$

Y de la Propiedad 2:  $x^T \left[ \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q}) \right] x = 0$ , la función (3.9) se convierte en:

$$\dot{V}_1 = -\bar{x}_2^T K_p \bar{x}_1 - \bar{x}_2^T K_d x_2 + \bar{x}_1^T K_p \bar{x}_1 = -\bar{x}_2^T K_d x_2 \quad (3.10)$$

Dado que  $K_d \geq 0$ ,  $V_1 \leq 0$ .

### 3.3. Estabilidad Asintótica semiglobal de un control PID

Primero describamos la dinámica de un robot manipulador a partir de la ecuación de Euler-Lagrange siguiente:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = u \quad (3.11)$$

Donde el vector  $q \in R^2$  representa las posiciones de las articulaciones.  $M(q) = K_T + K_R$  es conocida como la matriz de inercia,  $C(q, \dot{q}) = \{c_{kj}\}$  representa las fuerzas centrífugas,  $c_{kj} = \sum_{i=1}^n c_{ijk}\dot{q}_i$ ,  $k, j = 1 \dots n$ ,  $c_{ijk}$  son los símbolos de Christoffel [59],  $g(q)$  es un vector de pares gravitacionales,  $g(q) = \frac{\partial}{\partial q} U(q)$ ,  $U = \sum_{i=1}^n m_i g h^i$ ,  $h^i = y_i$  y  $o^i = [x_i, y_i, z_i]^T$   $o^i$  esta dada por los tres elementos de la cuarta columna de la matriz de transformación homogénea. Además el modelo del robot satisface las siguientes propiedades:

**P1.** La matriz de inercia  $M(q)$  es simétrica y definida positiva y satisface:

$$0 < \lambda_m \{M(q)\} \leq \|M\| \leq \lambda_M \{M(q)\} \leq \beta, \quad \beta > 0 \quad (3.12)$$

Donde  $\lambda_M \{M\}$  y  $\lambda_m \{M\}$  son el máximo y mínimo valor característico de la matriz  $M$ .

**P2.** Para la matriz Centrífuga y de Coriolis  $C(q, \dot{q})$ , existe un número  $k_c > 0$  tal que:

$$\|C(q, \dot{q})\dot{q}\| \leq k_c \|\dot{q}\|^2, \quad k_c > 0 \quad (3.13)$$

y  $\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$  es antisimétrica, es decir.

$$x^T \left[ \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q}) \right] x = 0 \quad (3.14)$$

con

$$\dot{M}(q) = C(q, \dot{q}) + C(q, \dot{q})^T \quad (3.15)$$

**P3.** El vector de pares gravitacionales  $g(q)$  satisface la condición de Lipschitz

$$\|g(x) - g(y)\| \leq k_g \|x - y\| \quad (3.16)$$



De modo que el objetivo de control es evaluar el par sobre cada articulación tal que los desplazamientos tiendan asintóticamente a una constante de desplazamiento deseada en cada articulación.

Dada una constante de posición deseada  $q^d \in R^n$ , la condición para la estabilidad asintótica semiglobal para el robot es diseñar una entrada de control de par  $u$  sobre (3.11) que haga que el error de regulación  $\tilde{q} = q^d - q$ , tienda a cero  $\tilde{q} \rightarrow 0$  así como la razón de cambio  $\dot{\tilde{q}} \rightarrow 0$ , cuando las condiciones iniciales son arbitrariamente grandes sobre el dominio de atracción. La ley clásica de control PID esta definida por  $u = K_p \tilde{q} + K_i \int_0^t \tilde{q}(\tau) d\tau + K_d \dot{\tilde{q}}$ , donde las constantes  $K_p$ ,  $K_i$ ,  $K_d$  son las constantes proporcional, integral y derivativas del controlador respectivamente. Dada las condiciones:  $\dot{q}^d = 0$ , y  $\dot{\tilde{q}} = -\dot{q}$ , la ley de control PID puede expresarse mediante las siguientes ecuaciones:

$$u = K_p \tilde{q} - K_d \dot{q} + \xi \quad (3.17)$$

$$\dot{\xi} = K_i \tilde{q} \quad (3.18)$$

$$\xi(0) = \xi_0 \quad (3.19)$$

Aquí necesitamos que el control lineal (3.17) este en una forma desacoplada, es decir; requerimos que  $K_p$ ,  $K_i$  y  $K_d$  sean matrices diagonales definidas positivas. De modo que la dinámica del manipulador en lazo cerrado (3.11) sea:

$$\begin{aligned} M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) &= K_p \tilde{q} - K_d \dot{q} + \xi \\ \dot{\xi} &= K_i \tilde{q} \end{aligned}$$

De donde el punto de equilibrio es  $\left[ \xi, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}} \right] = [\xi^*, 0, 0]$ . Y cuando el punto de equilibrio esta dada por la condición  $q = q^d$ , entonces el equilibrio ahora es  $[g(q^d), 0, 0]$ . Con el fin de mover el equilibrio al origen, podemos definir  $\tilde{\xi} = \xi - g(q^d)$ . Entonces el sistema en lazo cerrado con  $\dot{\tilde{\xi}} = K_i \tilde{q}$  se transforma en:

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) = K_p \tilde{q} - K_d \dot{q} + \tilde{\xi} + g(q^d) \quad (3.20)$$

Para el análisis de estabilidad del control lineal PID se presenta el siguiente teorema.

**Teorema 3.1** *Dada la dinámica del Robot (3.11) controlada por el controlador lineal PID (3.17), entonces el sistema en lazo cerrado (3.20) es semiglobalmente asintóticamente estable en el punto de equilibrio.*

$$x = \left[ \xi - g(q^d), \tilde{q}, \tilde{\dot{q}} \right]^T = 0$$

Con la condición de que las ganancias de control satisfagan:

$$\begin{aligned} \lambda_m(K_p) &\geq \frac{3}{2}k_g \\ \lambda_M(K_i) &\leq \beta \frac{\lambda_m(K_p)}{\lambda_M(M)} \\ \lambda_m(K_d) &\geq \beta + \lambda_M(M) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Donde  $\beta = \sqrt{\frac{\lambda_m(M)\lambda_m(K_p)}{3}}$ ,  $k_g$  satisfacen la condición de Lipschitz (3.16).

**Demostración.** Construyamos una función de Lyapunov de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}\dot{q}^T M \dot{q} + \frac{1}{2}\tilde{q}^T K_p \tilde{q} + U(q) - k_u + \tilde{q}^T g(q^d) + \tilde{q}^T \tilde{\xi} \\ &+ \frac{3}{2}g(q^d)^T K_p^{-1} g(q^d) + \frac{\alpha}{2}\tilde{\xi}^T K_i^{-1} \tilde{\xi} - \alpha \tilde{q}^T M \dot{q} + \frac{\alpha}{2}\tilde{q}^T K_d \tilde{\dot{q}} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Donde  $k_u = \min_q \{U(q)\}$ ,  $U(q)$  esta definida en (3.11),  $k_u$  se agrega de modo que  $V(0) = 0$ . y  $\alpha$  es una constante definida positiva.

1) Primero vamos a probar que  $V$  es una función de Lyapunov definida positiva  $V \geq 0$ . El término  $\frac{1}{2}\tilde{q}^T K_p \tilde{q}$  puede separarse en cuatro partes y  $V = \sum_{i=1}^4 V_i$

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{6}\tilde{q}^T K_p \tilde{q} + \tilde{q}^T g(q^d) + \frac{3}{2}g(q^d)^T K_p^{-1} g(q^d) \\ V_2 &= \frac{1}{6}\tilde{q}^T K_p \tilde{q} + \tilde{q}^T \tilde{\xi} + \frac{\alpha}{2}\tilde{\xi}^T K_i^{-1} \tilde{\xi} \\ V_3 &= \frac{1}{6}\tilde{q}^T K_p \tilde{q} - \alpha \tilde{q}^T M \dot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T M \dot{q} \\ V_4 &= U(q) - k_u + \frac{\alpha}{2}\tilde{q}^T K_d \tilde{\dot{q}} \end{aligned} \quad (3.23)$$

De  $k_u = \min_q \{U(q)\}$ , sabemos que  $V_4 \geq 0$ . Es fácil encontrar  $V_1 = \frac{1}{2}s^T \begin{bmatrix} \frac{1}{3}K_p & I \\ I & 3K_p^{-1} \end{bmatrix} s \geq$

0,  $s = [\tilde{q}, g(q^d)]^T$ . Entonces  $\alpha \geq \frac{3}{\lambda_m(K_i^{-1})\lambda_m(K_p)}$ ,

$$V_2 \geq \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{1}{3}\lambda_m(K_p)} \|\tilde{q}\| - \sqrt{\frac{3}{\lambda_m(K_p)}} \|\tilde{\xi}\| \right)^2$$

Cuando  $\alpha \leq \frac{\sqrt{\frac{1}{3}\lambda_m(M)\lambda_m(K_p)}}{\lambda_M(M)}$ ,

$$V_3 \geq \frac{1}{2} \left( \sqrt{\lambda_m(M)} \|\dot{q}\| - \sqrt{\frac{1}{3}\lambda_m(K_p)} \|\tilde{q}\| \right)^2$$

Podemos observar que sí:  $\sqrt{\frac{1}{3}\lambda_m(K_i^{-1})} \lambda_m^{\frac{3}{2}}(K_p) \lambda_m^{\frac{1}{2}}(M) \geq \lambda_M(M)$ , entonces existe

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{3}\lambda_m(M)\lambda_m(K_p)}}{\lambda_M(M)} \geq \alpha \geq \frac{3}{\lambda_m(K_i^{-1})\lambda_m(K_p)} \quad (3.24)$$

Esto significa que sí:  $K_p$  es suficientemente grande ó  $K_i$  es suficientemente pequeña entonces  $V(\dot{q}, \tilde{q}, \tilde{\xi})$  es definida positiva semiglobalmente.

2) Podemos probar que  $\dot{V} \leq 0$ . Usando  $\frac{d}{dt}U(q) = \dot{q}^T g(q)$ ,  $\frac{d}{dt}g(q^d) = 0$  y  $\frac{d}{dt}[\tilde{q}^T g(q^d)] = \dot{\tilde{q}}^T g(q^d)$ , luego la derivada de  $V$  esta definida por:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{q}^T M \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M} \dot{q} + \tilde{q}^T K_p \dot{\tilde{q}} + g(q)^T \dot{q} + \tilde{q}^T g(q^d) \\ &+ \alpha \tilde{\xi}^T K_i^{-1} \dot{\tilde{\xi}} + \tilde{q}^T \dot{\tilde{\xi}} + \tilde{q}^T \dot{\tilde{\xi}} \\ &- \alpha \left( \dot{\tilde{q}}^T M \dot{q} + \tilde{q}^T \dot{M} \dot{q} + \tilde{q}^T M \ddot{q} \right) + \alpha \tilde{q}^T K_d \dot{\tilde{q}} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Usando (3.23), el primer término de (3.25) se hace:

$$-\dot{q}^T g(q) - \dot{q}^T K_d \dot{q} + \dot{q}^T \tilde{\xi} + \dot{q}^T g(q^d)$$

Dado que  $\dot{\tilde{q}}^T g(q^d) = -\dot{q}^T g(q^d)$  y  $\dot{\tilde{\xi}} = K_i \tilde{q}$ , el primer término de (3.25) es

$$-\dot{q}^T K_d \dot{q} + \alpha \tilde{q}^T \tilde{\xi} + \tilde{q}^T K_i \tilde{q} \quad (3.26)$$

Ahora para los últimos dos términos de la derivada de la función de Lyapunov (3.25). de la condición (3.15) tenemos que.

$$\tilde{q}^T \dot{M} \dot{q} = \tilde{q}^T C \dot{q} + \tilde{q}^T C^T \dot{q}$$

Luego del sistema en lazo cerrado(3.20):

$$\tilde{q}^T M \ddot{q} = -\tilde{q}^T C \dot{q} - \tilde{q}^T g(q) + \tilde{q}^T K_p \tilde{q} - \tilde{q}^T K_d \dot{q} + \tilde{q}^T \tilde{\xi} + \tilde{q}^T g(q^d)$$

Donde  $\dot{\tilde{q}}^T M \dot{q} = -\dot{q}^T M \dot{q}$ , si usamos (3.13) y (3.16) entonces los últimos dos términos de la derivada de la función de Lyapunov (3.25) son:

$$\begin{aligned} & -\alpha \{ \tilde{q}^T K_p \tilde{q} - \dot{q}^T M \dot{q} + \tilde{q}^T C^T \dot{q} + \tilde{q}^T [g(q^d) - g(q)] \\ & + \tilde{q}^T \tilde{\xi} - \tilde{q}^T K_d \dot{q} \} + \alpha \tilde{q}^T K_d \dot{q} \\ & \leq \alpha \dot{q}^T M \dot{q} - \alpha \tilde{q}^T K_p \tilde{q} + \alpha k_c \|\tilde{q}\| \|\dot{q}\|^2 + \alpha k_g \|\tilde{q}\|^2 - \alpha \tilde{q}^T \tilde{\xi} \end{aligned} \quad (3.27)$$

De 3.25 y (3.27) tenemos que:

$$\begin{aligned} \dot{V} & \leq -\dot{q}^T (K_d - \alpha M - \alpha k_c \|\tilde{q}\|) \dot{q} - \tilde{q}^T (\alpha K_p - K_i - \alpha k_g) \tilde{q} \\ & \leq -[\lambda_m(K_d) - \alpha \lambda_M(M) - \alpha k_c \|\tilde{q}\|] \|\dot{q}\|^2 \\ & \quad - [\alpha \lambda_m(K_p) - \lambda_M(K_i) - \alpha k_g] \|\tilde{q}\|^2 \end{aligned}$$

Luego sí:

$$\|\tilde{q}\| \leq \frac{\lambda_M(M)}{\alpha k_c}$$

Y además:

$$\begin{aligned} \lambda_m(K_d) & \geq (1 + \alpha) \lambda_M(M) \\ \lambda_m(K_p) & \geq \frac{1}{\alpha} \lambda_M(K_i) + k_g \end{aligned}$$

Entonces la derivada de la función de Lyapunov satisface:

$$\dot{V} \leq 0$$

Y el error de regulación  $\|\tilde{q}\|$  decrece. Luego de (3.24), sí:

$$\begin{aligned} \lambda_m(K_d) & \geq \lambda_M(M) + \sqrt{\frac{1}{3} \lambda_m(M)} \sqrt{\lambda_m(K_p)} \\ \lambda_m(K_p) & \geq \frac{1}{3} \lambda_m(K_i^{-1}) \lambda_m(K_p) \lambda_M(K_i) + k_g \end{aligned} \quad (3.28)$$

Entonces:

$$\dot{V} \leq 0$$

3) Finalmente para demostrar la estabilidad asintótica semiglobal. Usamos la condición  $\lambda_m(K_i^{-1}) = \frac{1}{\lambda_M(K_i)}$ , (3.28) y (3.21) para las ganancias de control. Definamos una bola  $\Sigma$  de radio  $\sigma > 0$  centrada en el origen del espacio de estados del tipo:

$$\Sigma = \left\{ \tilde{q} : \|\tilde{q}\| \leq \frac{\lambda_M(M)}{\alpha k_c} = \sigma \right\}$$

Luego si  $\dot{V}$  es semidefinida negativa en la bola  $\Sigma$ . Entonces existe una bola  $\Sigma$  de radio  $\sigma > 0$  centrada en el origen del espacio de estados que satisface que  $\dot{V} \leq 0$ .

Así el origen del sistema en lazo cerrado (3.20) es estable en el punto de equilibrio.

Cuando el sistema en lazo cerrado es autónomo, podemos utilizar el Teorema de La Salle.

Definamos primero  $\Omega$  como:

$$\Omega = \left\{ x(t) = [\tilde{q}, \dot{q}, \tilde{\xi}] \in R^{3n} : \dot{V} = 0 \right\}$$

Para la derivada de la Función de Lyapunov (3.25) se cumple que:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 0 \\ \iff \\ \tilde{q} &= \dot{q} = 0 \end{aligned}$$

Entonces para una solución  $x(t)$  contenida en  $\Omega$  para todo  $t \geq 0$ , es necesario y suficiente que el error de regulación sea cero es decir;  $\tilde{q} = \dot{q} = 0$  para todo  $t \geq 0$ .

Por lo tanto también se cumple que  $\ddot{q} = 0$  para todo  $t \geq 0$ .

Entonces concluimos primero que del sistema en lazo cerrado (3.20), si la solución  $x(t) \in \Omega$  para todo  $t \geq 0$ , entonces  $g(q) = g(q^d) = \tilde{\xi} + g(q^d)$  y  $\dot{\tilde{\xi}} = 0$ . Esto implica que  $\tilde{\xi} = 0$  para todo  $t \geq 0$ . De modo que  $x(t) = [\tilde{q}, \dot{q}, \tilde{\xi}] = 0 \in R^{3n}$  es solo la condición inicial en  $\Omega$  para la cual  $x(t) \in \Omega$  para todo  $t \geq 0$ .

Finalmente concluimos que el sistema en lazo cerrado (3.20) es localmente asintóticamente estable, puesto que:

$$\frac{1}{\alpha} \leq \lambda_m(K_i^{-1}) \lambda_m(K_p)$$

La cota superior para  $\|\tilde{q}\|$  se puede tomar como:

$$\|\tilde{q}\| \leq \frac{\lambda_M(M)}{k_c} \lambda_M(K_i) \lambda_m(K_p) \quad (3.29)$$

Con lo cuál se establecen las condiciones de estabilidad semiglobal de nuestro controlador, en el sentido de que el dominio de atracción puede hacerse arbitrariamente mas grande con ganancias disponibles. Si incrementamos  $K_p$  entonces el dominio de atracción puede crecer.

■

Del análisis de estabilidad anterior, podemos ver que las tres matrices de ganancias del control lineal PID (3.17) pueden elegirse directamente de las condiciones (3.21). Mientras que el procedimiento de sintonización de los parámetros del controlador PID es mucho mas simple que en los trabajos realizados por [2][4][36][38][37][47][54]. Este controlador lineal PID tiene las mismas características que los controladores industriales con la ventaja que garantiza la estabilidad asintótica semiglobal. Es interesante observar que las condiciones suficientes de [37][38] son:

$$\begin{aligned}\lambda_m(K_p) &> k_g, \\ \lambda_m(K_d) &> \frac{\lambda_M^2(M)}{\lambda_m(M)} \frac{\lambda_M(K_i)}{\lambda_m(K_p) - k_g}\end{aligned}$$

Las cuáles no son explícitas y su región de atracción para la estabilidad asintótica semiglobal es:

$$\|\tilde{q}\| \leq \frac{1}{k_c} \left[ \lambda_m(K_d) \frac{\lambda_m(K_p) - k_g}{\lambda_M(K_i)} - \lambda_M(M) \right] \quad (3.30)$$

Esto significa que para ganancias integrales pequeñas en el controlador PID e incluso para el controlador PD ( $K_i = 0$ ) podemos asegurar estabilidad asintótica. Por lo que si comparamos (3.30) con las cotas obtenidas en (3.29) de nuestro método, podemos ver que nuestros resultados son mejores en el sentido de estabilidad.

En la literatura podemos ver que sin el vector de fuerzas gravitacionales  $g(q)$  en la dinámica de un robot (3.11) un control PD con alguna ganancia positiva puede hacer que el sistema en lazo cerrado sea asintóticamente estable. Entonces el objetivo principal de la acción integral sobre la dinámica de un robot manipulador es la de cancelar el par gravitacional. Con el fin de disminuir la ganancia integral se aplica un estimado de gravedad en el control (3.17). De modo que el control PID con una compensación aproximada de gravedad

$\hat{g}(q)$  es el presentado por 3.31 y gráficamente se puede representar por la Figura (3.1).

$$u = K_p \tilde{q} - K_d \dot{q} + \hat{g}(q) + \xi, \quad \dot{\xi} = K_i \tilde{q} \quad (3.31)$$

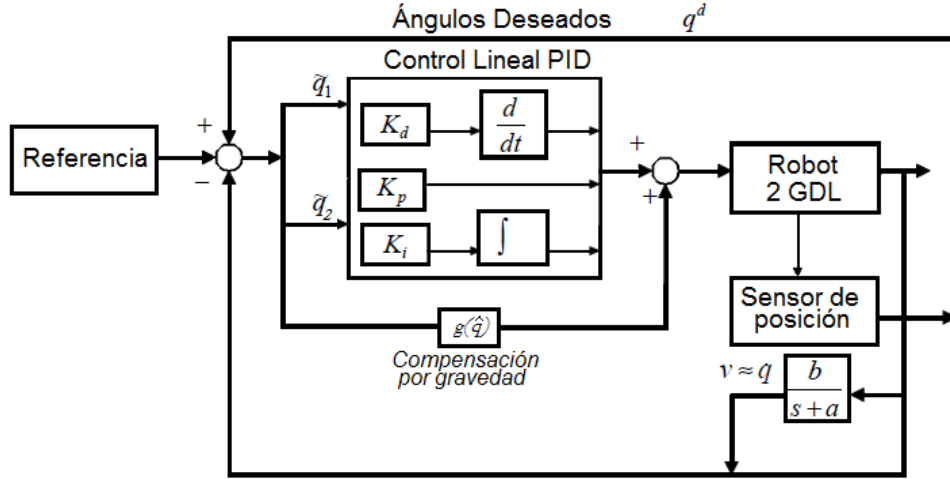


Figura 3.1: Control PID mas compensación aproximada de gravedad

Si definimos

$$\begin{aligned} \tilde{g}(q) &= \|g(q) - \hat{g}(q)\| \\ \tilde{U}(q) &= \int_0^T \tilde{g}(q) dq \\ \tilde{U}(0) &= 0, \end{aligned}$$

Entonces  $\tilde{g}(q)$  también satisface la condición de Lipschitz (3.16).

$$\|\tilde{g}(x) - \tilde{g}(y)\| \leq \tilde{k}_g \|x - y\|$$

Así la nueva función de Lyapunov de la prueba anterior es:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} + \frac{1}{2} \tilde{q}^T K_p \tilde{q} + \tilde{U}(q) - \tilde{k}_u + \tilde{q}^T \tilde{g}(q^d) + \tilde{q}^T \tilde{\xi} \\ &+ \frac{3}{2} \tilde{g}(q^d)^T K_p^{-1} \tilde{g}(q^d) + \frac{\alpha}{2} \tilde{\xi}^T K_i^{-1} \tilde{\xi} - \alpha \tilde{q}^T M \dot{q} + \frac{\alpha}{2} \tilde{q}^T K_d \tilde{q} \end{aligned}$$

Donde  $\tilde{k}_u = \min_q \{ \tilde{U}(q) \}$ . El teorema anterior también es correcto para un control PID con una compensación aproximada de gravedad (3.31). Y la condición para las ganancias del control PID de (3.21) son:

$$\begin{aligned} \lambda_m(K_p) &\geq \frac{3}{2} \tilde{k}_g \\ \lambda_M(K_i) &\leq \frac{3\beta}{2} \frac{\tilde{k}_g}{\lambda_M(M)} \\ \tilde{k}_g &\ll k_g \\ \beta &= \sqrt{\frac{\lambda_m(M) \lambda_m(K_p)}{3}} \end{aligned}$$

### 3.4. Control lineal PID con velocidades no medibles

En contraste con los altos grados de precisión de los encoders ópticos para medición de velocidad respecto los tacómetros, estos últimos son bastante imprecisos e inexactos específicamente para ciertos intervalos de tiempo. Una estrategia de diseño en controladores PID para medición de velocidades es proponer un observador de estado para estimar la velocidad. En el controlador PI<sup>2</sup>D [49] se agrega un término integral al controlador lineal PID integral (3.33) con lo cuál se prueba estabilidad asintótica semiglobal.

Para un diseño alternativo de observadores se pueden utilizar los filtros de posición de cero y primer orden para estimar la velocidad en las articulaciones [59].

$$v_i(s) = \frac{b_i s}{s + a_i} q_i(s), \quad i = 1 \cdots n \quad (3.32)$$

Donde  $v_i(s)$  es un estimado de  $\dot{q}_i$ ,  $a_i$  y  $b_i$  son elementos de la diagonal principal de las matrices diagonales  $A$  y  $B$  del tipo  $A = \text{diag}\{a_i\}$ ,  $B = \text{diag}\{b_i\}$ , que satisfacen las condiciones  $a_i > 0$ ,  $b_i > 0$ . La función de transferencia del filtro (3.32) puede representarse por una ecuación en espacio de estados. De modo que podemos considerar el controlador lineal PID



(3.17) siguiente.

$$\begin{aligned}
 u &= K_p \tilde{q} - K_d v + \xi \\
 \dot{\xi} &= K_i \tilde{q}, \quad \xi(0) = \xi_0 \\
 \dot{x} &= -A(x + Bq) \\
 v &= x + Bq
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Donde  $K_p$ ,  $K_i$  y  $K_d$  son matrices de coeficientes constantes, diagonales y definidas positivas y los términos  $a_i$  y  $b_i$  en el filtro (3.32) deben de ser constantes positivas.

El sistema en lazo cerrado del robot (3.11) es:

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi} &= K_i \tilde{q}, \quad \dot{v} = -Av + B\dot{q} \\
 \dot{q} &= M^{-1} \left( -C(q, \dot{q})\dot{q} - g(q) + K_p \tilde{q} - K_d v + \tilde{\xi} + g(q^d) \right)
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Donde el punto de equilibrio de (3.34) es considerado como:  $[\tilde{\xi}, v, \dot{q}] = [0, 0, 0]$ .

Para el análisis de estabilidad se presenta el siguiente teorema.

**Teorema 3.2** *Dada la dinámica del Robot (3.11) controlada por el controlador lineal PID (3.33) donde las matrices  $A$ ,  $B$  satisfacen:*

$$\begin{aligned}
 \frac{\lambda_M(A)}{\lambda_m^2(A)} &\leq \lambda_m(K_d) \frac{\lambda_m(B)}{\lambda_M(B)} \\
 \lambda_M(B) &\leq \frac{1}{4} \lambda_m(K_d) \frac{\lambda_m(M)}{\lambda_M^2(M)} \\
 \lambda_m(B - \alpha I) &\geq \frac{1}{2} \lambda_m(A)
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Con  $\alpha > 0$ , entonces el sistema en lazo cerrado (3.34) es localmente asintóticamente estable en el punto de equilibrio.

$$x = \left[ \xi - g(q^d), \tilde{q}, \dot{\tilde{q}} \right]^T = 0$$

Sobre el dominio de atracción:

$$\|\tilde{q}\| \leq \frac{\lambda_m(M)}{\alpha k_c} \left[ \lambda_m(B - \alpha I) - \frac{1}{2} \lambda_m(A) \right] + \frac{1}{\alpha} \|v\|$$

Bajo la condición de que las ganancias satisfacen:

$$\begin{aligned}
\lambda_m(K_p) - \frac{1}{2}\lambda_M(K_p) &\geq \frac{1}{\alpha}[\lambda_M(K_i) + \lambda_M(A^{-1}BK_i)] \\
+ \frac{1+2\alpha}{2}k_g + \frac{\alpha^2}{2}\lambda_M(K_d) + \frac{\alpha}{2}\lambda_M(A^{-1}K_i) \\
\lambda_m(K_d) &\geq \frac{k_g + \frac{1}{2\alpha}\lambda_M(A^{-1}K_i) + \frac{1}{2\alpha}\lambda_M(K_p) + \kappa(M)\lambda_M(M)\lambda_M(A)}{2\lambda_m(AB^{-1}-I)-1} \\
\lambda_M(K_i) &\leq \frac{\alpha}{3}\lambda_m(K_p)
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Donde  $\kappa(M)$  depende del número de  $M$ .

**Demostración.** Primero propongamos la función candidata de Lyapunov siguiente:

$$\begin{aligned}
V_c &= \frac{1}{2}\dot{q}^T M \dot{q} + \frac{1}{2}\tilde{q}^T K_p \tilde{q} + U(q) - k_u \\
&+ \tilde{q}^T g(q^d) + \frac{3}{2}g(q^d)^T K_p^{-1}g(q^d) + \frac{\alpha}{2}\tilde{\xi}^T K_i^{-1}\tilde{\xi} - \alpha\tilde{q}^T M \dot{q} \\
&+ \tilde{q}^T (I + A^{-1}B)\tilde{\xi} + \frac{1}{2}v^T B^{-1}K_d v - v^T M \dot{q} + v^T A^{-1}\tilde{\xi}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Donde  $\alpha$  es una constante de diseño.

1) Primero vamos a demostrar que la función  $V$  es una función de Lyapunov con  $V \geq 0$ . Podemos separar el término  $\frac{1}{2}\tilde{q}^T K_p \tilde{q}$  en tres partes de la forma siguiente y además  $V = \sum_{i=1}^6 V_i$ ,  $V_6 = U(q) - k_u \geq 0$

$$\begin{aligned}
V_1 &= \frac{1}{6}\tilde{q}^T K_p \tilde{q} + \tilde{q}^T g(q^d) + \frac{3}{2}g(q^d)^T K_p^{-1}g(q^d) \\
V_2 &= \frac{1}{6}\tilde{q}^T K_p \tilde{q} + \tilde{q}^T \tilde{\xi} + \frac{\alpha}{2}\tilde{\xi}^T K_i^{-1}\tilde{\xi} \\
V_3 &= \frac{1}{6}\tilde{q}^T K_p \tilde{q} - \alpha\tilde{q}^T M \dot{q} + \frac{1}{4}\dot{q}^T M \dot{q} \\
V_4 &= \frac{1}{4}v^T (B^{-1}K_d)v + v^T A^{-1}\tilde{\xi} + \tilde{\xi}^T (A^{-1}B)\tilde{\xi} \\
V_5 &= \frac{1}{4}v^T (B^{-1}K_d)v - v^T M \dot{q} + \frac{1}{4}\dot{q}^T M \dot{q}
\end{aligned}$$

En este caso  $V_1$  y  $V_2$  son iguales como en (3.23). Para  $V_3$ , si:

$$\alpha \leq \frac{\sqrt{\frac{1}{6}\lambda_m(K_p)\lambda_m(M)}}{\lambda_M(M)}$$

Entonces:

$$V_3 \geq \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{1}{2}\lambda_m(M)} \|\dot{q}\| - \sqrt{\frac{1}{3}\lambda_m(K_p)} \|\tilde{q}\| \right)^2 \geq 0$$

Dado que las cotas

$$\begin{aligned}\lambda_m(AB) &\leq \lambda_m(B^{-1}) \lambda_M(A) \\ \lambda_m(B^{-1}) &= \frac{1}{\lambda_M(B)}\end{aligned}$$

Donde podemos obtener las condiciones:

$$\begin{aligned}\lambda_M(A^{-1}) &\leq \sqrt{\lambda_m(B^{-1}K_d) \lambda_m((A^{-1}B))} \\ \frac{\lambda_M(A)}{\lambda_m^2(A)} &\leq \lambda_m(K_d) \frac{\lambda_m(B)}{\lambda_M(B)}\end{aligned}$$

Con lo cuál se satisface:

$$\begin{aligned}V_4 \geq \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \lambda_m(B^{-1}K_d) \|v\|^2 - 2\lambda_M(A^{-1}) \|v\| \|\tilde{\xi}\| \right. \\ \left. + 2\lambda_m((A^{-1}B)) \|\tilde{\xi}\|^2 \right] \geq 0\end{aligned}$$

Dadas las condiciones:

$$\begin{aligned}\lambda_M(M) &\leq \frac{1}{2} \sqrt{\lambda_m((B^{-1}K_d)) \lambda_m(M)} \\ \lambda_M(B) &\leq \frac{1}{4} \lambda_m(K_d) \frac{\lambda_m(M)}{\lambda_M^2(M)}\end{aligned}$$

Entonces:

$$V_5 = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} v^T K_d B^{-1} v + 2v^T M \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} \right] \geq 0$$

Como  $V_6 \geq 0$ , entonces existen  $\alpha$ ,  $A$  y  $B$  tal que:

$$\begin{aligned}\alpha^2 \leq \frac{1}{6} \frac{\lambda_m(K_p) \lambda_m(M)}{\lambda_M^2(M)}, \quad \frac{\lambda_M(A)}{\lambda_m^2(A)} \leq \lambda_m(K_d) \frac{\lambda_m(B)}{\lambda_M(B)} \\ \lambda_M(B) \leq \frac{1}{4} \lambda_m(K_d) \frac{\lambda_m(M)}{\lambda_M^2(M)}\end{aligned} \tag{3.38}$$

Esto significa que si  $K_p$  es suficientemente grande o  $K_i$  es suficientemente pequeña, entonces  $V_c(\dot{q}, \tilde{q}, \tilde{\xi})$  es definida positiva globalmente.

2) Ahora para el cálculo de la derivada de  $V_c$

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \dot{q}^T M \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M} \dot{q} + \tilde{q}^T K_p \tilde{q} + g(q)^T \dot{q} + \tilde{q}^T g(q^d) \\
&+ \alpha \tilde{\xi}^T K_i^{-1} \tilde{\xi} - \alpha \left( \tilde{q}^T M \dot{q} + \tilde{q}^T \dot{M} \dot{q} + \tilde{q}^T M \ddot{q} \right) \\
&+ \tilde{q}^T (I + A^{-1}B) \dot{\tilde{\xi}} + \tilde{q}^T (I + A^{-1}B) \dot{\tilde{\xi}} + \dot{v}^T (B^{-1}K_d) v \\
&- \left( \dot{v}^T M \dot{q} + v^T \dot{M} \dot{q} + v^T M \ddot{q} \right) + \dot{v}^T A^{-1} \tilde{\xi} + v^T A^{-1} \dot{\tilde{\xi}}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Podemos observar que los primeros seis términos de (3.39) son  $-\dot{q}^T K_d v + \dot{q}^T \tilde{\xi} + \alpha \tilde{q}^T \tilde{\xi}$ . Y el séptimo término de (3.39) es:

$$\begin{aligned}
&-\alpha \{ \tilde{q}^T K_p \tilde{q} - \dot{q}^T M \dot{q} + \tilde{q}^T C^T \dot{q} + \tilde{q}^T [g(q^d) - g(q)] \\
&+ \tilde{q}^T \tilde{\xi} - \tilde{q}^T K_d v \} \leq -\alpha \tilde{q}^T K_p \tilde{q} + \alpha k_g \|\tilde{q}\|^2 + \alpha \dot{q}^T M \dot{q} \\
&+ \alpha \tilde{q}^T C^T \dot{q} - \alpha \tilde{q}^T \tilde{\xi} + \alpha \tilde{q}^T K_d v
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Usando  $\dot{v} = -Av + B\dot{q}$ , y  $\dot{\tilde{q}} = -\dot{q}$ , los términos del octavo al décimo de (3.39) son:

$$-\dot{q}^T \tilde{\xi} + \tilde{q}^T K_i \tilde{q} + \dot{q}^T A^{-1} B \tilde{\xi} + \tilde{q}^T A^{-1} B K_i \tilde{q} + \dot{q}^T K_d v - v^T A B^{-1} K_d v \tag{3.41}$$

Para el onceavo término de (3.39) tenemos:

$$\begin{aligned}
&v^T A M \dot{q} - \dot{q}^T B M \dot{q} - v^T C \dot{q} - v^T C^T \dot{q} + v^T C^T \dot{q} \\
&- v^T K_p \tilde{q} + v^T K_d v - v^T \tilde{\xi} - v^T [g(q^d) - g(q)]
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Usando (3.13):

$$\alpha \tilde{q}^T C^T \dot{q} - v^T C \dot{q} \leq k_c \|\alpha \tilde{q} - v\| \|\dot{q}\|^2$$

Luego si usamos  $\dot{\tilde{\xi}} = K_i \tilde{q}$  y  $\dot{v} = -Av + B\dot{q}$ , los últimos dos términos de (3.39) son  $v^T \tilde{\xi} - \dot{q}^T A^{-1} B \tilde{\xi} - v^T A^{-1} K_i \tilde{q}$ . Si combinamos las ecuaciones anteriores tenemos:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq -\dot{q}^T B M \dot{q} - v^T A B^{-1} K_d v - \alpha \tilde{q}^T K_p \tilde{q} \\
&+ \alpha k_g \|\tilde{q}\|^2 + \alpha \dot{q}^T M \dot{q} + k_c \|\alpha \tilde{q} - v\| \|\dot{q}\|^2 \\
&+ \tilde{q}^T K_i \tilde{q} + \tilde{q}^T A^{-1} B K_i \tilde{q} + v^T K_d v + \frac{1}{2} k_g \|v\|^2 + \frac{1}{2} k_g \|\tilde{q}\|^2 \\
&+ \tilde{q}^T (\alpha K_d - K_p - A^{-1} K_i) v + \dot{q}^T A M v
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Para asegurar que  $\dot{V} \leq 0$ , necesitamos:

$$\begin{aligned}\lambda_m(BM - \alpha M) &\geq k_c \|\alpha \tilde{q} - v\| + \frac{1}{2\kappa(M)} \lambda_M(AM) \\ \lambda_m(AB^{-1}K_d - K_d) &\geq \frac{1}{2}k_g + \frac{1}{2\alpha} \lambda_M(K_e) + \frac{\kappa(M)}{2} \lambda_M(AM) \\ \lambda_m(\alpha K_p - K_i - A^{-1}BK_i) &\geq \frac{1+2\alpha}{2}k_g + \frac{\alpha}{2} \lambda_M(K_e)\end{aligned}\quad (3.44)$$

Donde  $K_e = \alpha K_d - K_p - A^{-1}K_i$ . Usando  $\lambda_i(A) \lambda_m(B) \geq \lambda_i(AB) \geq \lambda_i(A) \lambda_m(B)$ , donde  $i$  puede ser "m." o "M", la última condición de (3.44) puede reemplazarse por:

$$\left\| \tilde{q} - \frac{1}{\alpha}v \right\| \leq \frac{1}{\alpha k_c} \left[ \lambda_m(B - \alpha I) \lambda_m(M) - \frac{1}{2\kappa(M)} \lambda_M(M) \lambda_m(A) \right]$$

Esta es el área de atracción, usando  $\lambda_i(A) + \lambda_m(B) \geq \lambda_i(A+B) \geq \lambda_i(A) + \lambda_m(B)$ , la segunda condición de (3.44) es:

$$\begin{aligned}\lambda_m[(AB^{-1} - I)K_d] &\geq \lambda_m(AB^{-1} - I) \lambda_m(K_d) \\ &\geq \frac{1}{2}k_g + \frac{1}{2\alpha} \lambda_M(K_e) + \frac{\kappa(M)}{2} \lambda_M(M) \lambda_M(A) \\ &\geq \frac{1}{2}k_g + \frac{1}{2\alpha} \lambda_M(K_e) + \frac{\kappa(M)}{2} \lambda_M(AM)\end{aligned}\quad (3.45)$$

La cuál es la condición para  $K_d$  en (3.36). La tercer condición de (3.44) es  $\lambda_m(\alpha K_p) \geq \lambda_M(K_i) + \lambda_M(A^{-1}BK_i) + \frac{1+2\alpha}{2}k_g + \frac{\alpha}{2} \lambda_M(K_e)$ . Esta es la condición para  $K_p$  en (3.36). La condición de  $K_i$  en (3.36) se obtiene de  $\lambda_M(K_i) \leq \frac{\alpha}{3} \lambda_m(K_p)$ . Para el resto de la prueba es lo mismo que en el Teorema 1. ■

Las condiciones (3.35) y (3.36) nos dicen como elegir las ganancias PID. La primera condición de (3.36) es  $\lambda_m(K_p) \geq \frac{1}{\alpha} \lambda_M(K_i) + \Omega$ ,  $\Omega = \frac{1}{\alpha} [\lambda_M(A^{-1}BK_i) + \frac{1+2\alpha}{2}k_g + \frac{\alpha}{2} \lambda_M(K_d) + \frac{1}{2} \lambda_M(A^{-1}K_i)] + \frac{1}{2\alpha} \lambda_M(K_p)$ . La tercer condición de (3.36) es  $\lambda_m(K_p) \geq \frac{3}{\alpha} \lambda_M(K_i)$  y son afines. Estas condiciones pueden establecerse cuando los valores de  $K_i$  no son grandes. La segunda condición de (3.36) y la tercer condición de (3.35) no son afines. Primero tomemos  $\alpha$  tan pequeña como sea posible y  $K_p$  tan grande como sea posible de tal forma que  $K_i$  no sea grande. Estas consideraciones son razonables para nuestro control real. Si seleccionamos  $B = \beta A + \alpha I$ , de la tercer condición de (3.35),  $\beta \geq \frac{1}{2}$ . La segunda condición de (3.36) requiere  $\lambda_m(AB^{-1} - I) > \frac{1}{2}$ , entonces existe un  $\beta$  que satisface la relación  $1 > \beta \geq \frac{1}{2}$  y un  $\alpha$  pequeño tal que  $\lambda_m[A(\beta A + \alpha I)^{-1} - I] > \frac{1}{2}$ . Luego si consideramos  $A$  y  $B$ , podemos usar la segunda condición de (3.36) para seleccionar  $K_d$ .

### 3.5. Resultados experimentales

A continuación se muestran una serie de resultados para evaluar el desempeño del controlador propuesto (3.31) sobre un robot planar de dos grados de libertad. Estos experimentos se realizaron en el laboratorio de servicios experimentales del Departamento de Control Automático. La estructura básica de la plataforma se muestra en la Figura 3.2. En esta plataforma se utiliza un par de motores de escobillas de CD de la marca Litton C34-L80-W40. Para los cuales se utilizan un par de amplificadores de potencia de 24 a 90 DC de Copley Controls Logosol DC Servo Amplifier LS-5Y. Por otro lado la Arquitectura esta compuesta basicamente de dos etapas a saber [45][55].

La primera, Es la programación y manejo de datos la cuál utiliza un servidor para programación y manejo de datos basandose en Matlab. Ademas del programa Wincon que realiza la compilación y transferencia del código del algoritmo generado en Matlab en tiempo real.

La segunda etapa es el control en la que se utiliza una computadora (cliente) mediante una red de comunicación ethernet, en la cuál el Wincon se utiliza para correr el código generado por el servidor.

Finalmente la adquisición de datos se realiza mediante una tarjeta Servotogo la cuál maneja decodificadores ópticos y voltajes analógicos.

Los dos teoremas de este capitulo son suficientes para proporcionar las condiciones de los valores mínimos de las ganancias proporcionales y derivativas así como el máximo valor para las ganancias integrales. Debido a que el robot descrito en (3.3) solo tiene dos articulaciones giratorias, podemos elegir las relaciones  $\lambda_M(M) \leq \beta$  y  $\beta \geq n(\max_{i,j} |m_{ij}|)$  [35], donde  $m_{ij}$  son los  $ij$ -ésimos elementos de la matriz  $M$ .

Los límites inferior y superior de los valores característicos de la matriz de inercia  $M(q)$  son elegidos de acuerdo a  $\lambda_M(M) = 3$ ,  $\lambda_m(M) = 1$ . El valor de  $k_g$  en (3.16) es elegido como  $k_g = 10$ . Podemos elegir  $\alpha = \frac{4\lambda_M(K_i)}{\lambda_m(K_p)}$  de modo que se satisface  $\lambda_M(K_i) \leq \frac{\alpha}{3}\lambda_m(K_p)$ . Podemos elegir  $\alpha = 0,08$ ,  $A = \text{diag}(30)$ ,  $\beta = \frac{7}{12}$ , tal que  $B = \text{diag}(17,58)$ . La velocidad en las articulaciones es estimada por  $\tilde{q}(s) = \frac{18s}{s+30}q(s)$ . A fin de satisfacer las condiciones de los teoremas anteriores podemos elegir las ganancias del controlador lineal PID de la forma

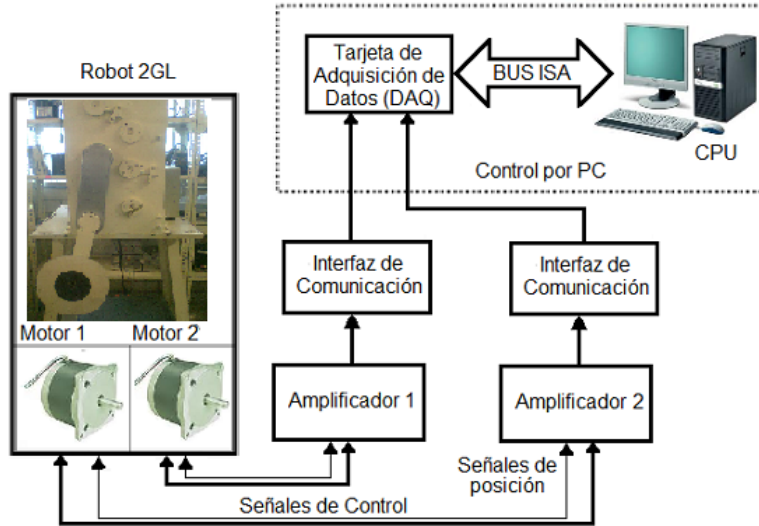


Figura 3.2: Plataforma Experimental para un Robot de dos Grados de Libertad. Laboarotorio experimental Dpto. Control Automático-CINVESTAV

siguiente:

$$\begin{aligned}
 K_p &= \text{diag} [150, 150] \\
 K_i &= \text{diag} [2, 1] \\
 K_d &= \text{diag} [330, 330]
 \end{aligned}
 \tag{3.46}$$

Cuando la dinámica del robot (3.11) es inestable en lazo abierto, es peligroso enviar los comandos de avance al robot. En esta sección proponemos un nuevo método de ajuste en lazo cerrado. El controlador lineal  $PID_0$ , con las ganancias en (3.46) puede garantizar la estabilidad en lazo cerrado considerando la compensación por gravedad, de esta forma el sistema en lazo cerrado es:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + \tilde{g}(q) = PID_0 - \hat{g}(q)
 \tag{3.47}$$

Donde los términos aproximados de gravedad se obtienen de:  $\hat{g}(q) = \frac{\partial}{\partial q} U(q)$ , donde para el robot de dos grados de libertad tenemos  $U = \sum_{i=1}^2 m_i g h^i$ ,  $h^i = y_i$  con  $h_1 = l_1 s_{q_1} = l_1 \sin q_1$  y  $h_2 = l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2)$  por lo que  $U = m_1 g l_1 s_1 + m_2 g l_1 s_1 + m_2 g l_2 s_1 c_2 + m_2 g l_2 c_1 s_2$ .

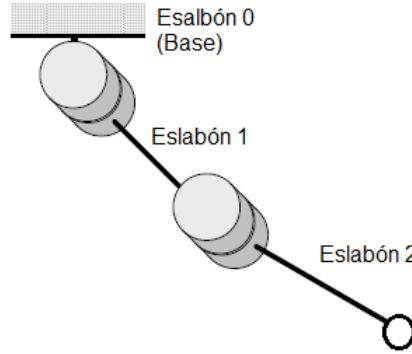


Figura 3.3: Esquema general de Robot de Dos grados de Libertad

Luego podemos utilizar los siguientes sistemas lineales:  $G_1 = \frac{0,93}{60s^2+9s+1}$ ,  $G_2 = \frac{1}{20s^2+3s+1}$ , para aproximar las respuestas del robot en lazo cerrado. Las respuestas al escalón unitario se muestran en la Figura 3.4.

Para implementar el nuevo controlador  $PID_1$  para el sistema en lazo cerrado (3.47) usamos:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + \tilde{g}(q) - PID_0 + \hat{g}(q) = PID_1 \quad (3.48)$$

Donde la respuesta escalón (regulación) del robot es similar al sistema lineal en lazo cerrado. Podemos utilizar la siguiente regla de ajuste:  $K_c = \frac{20\xi_m T_m}{K_m}$ ,  $T_i = 15\xi_m T_m$ ,  $T_d = \frac{T_m^2}{10}$ ,  $PID_1 = K_c \left( \tilde{q} + \frac{1}{T_i} \int_0^t \tilde{q}(\tau) d\tau + T_d \dot{\tilde{q}} \right)$ , para ajustar el control  $PID_1$ . Las reglas anteriores son similares con los sistemas lineales [28][11], en este caso  $K_c = \frac{5T_{m1}\xi_m}{K_m T_{m3}}$ ,  $T_i = 2T_{m1}\xi_m$ ,  $T_d = \frac{T_{m1}+0,1\xi_m}{0,8T_{m1}\xi_m}$ . Existen pequeñas diferencias respecto a los métodos ampliamente usados Ziegler-Nichols [73] y Cohen-Coon [12]. Estas reglas están disponibles para procesos de control, y nuestras reglas son bien aplicadas a sistemas mecánicos. Dado que el control PID en este apartado del presente trabajo de tesis es lineal, entonces el par final es  $u = PID_1 + PID_0 - \hat{g}(q)$ . Después de un proceso de ajuste las ganancias finales para el



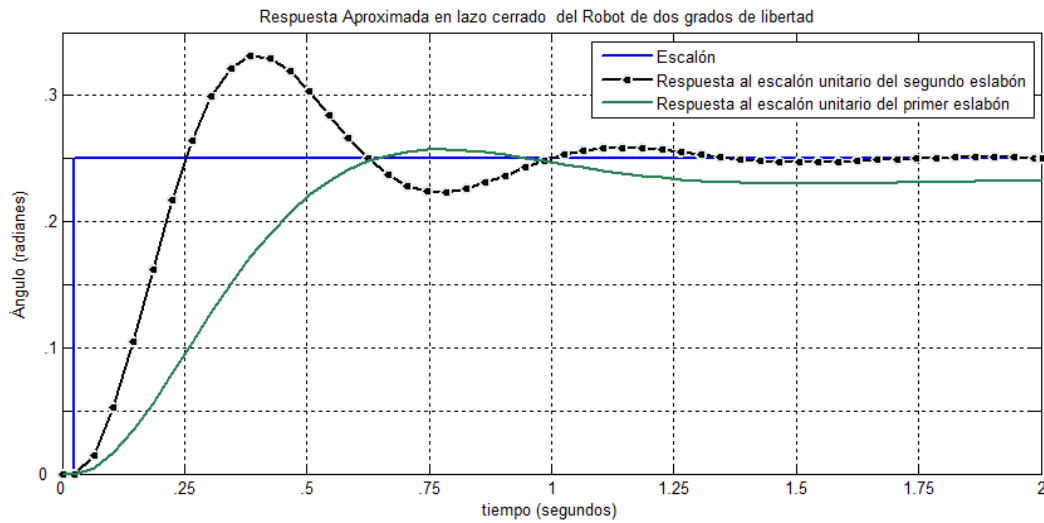


Figura 3.4: Respuesta aproximada al escalón unitario en el robot de dos grados de libertad

control PID son las siguientes:

$$K_p = \text{diag} [320, 280]$$

$$K_i = \text{diag} [5, 4]$$

$$K_d = \text{diag} [410, 400]$$

El primer experimento realizado en esta sección fue implementar un controlador clásico PD de donde se obtuvo la respuesta al escalón unitario cuyo comportamiento se muestra en la Figura 3.5.

Luego se implementó una ley de control Proporcional Derivativa más el término de pares gravitacionales del tipo  $u = PD + G(q)$  considerando los valores siguientes para :

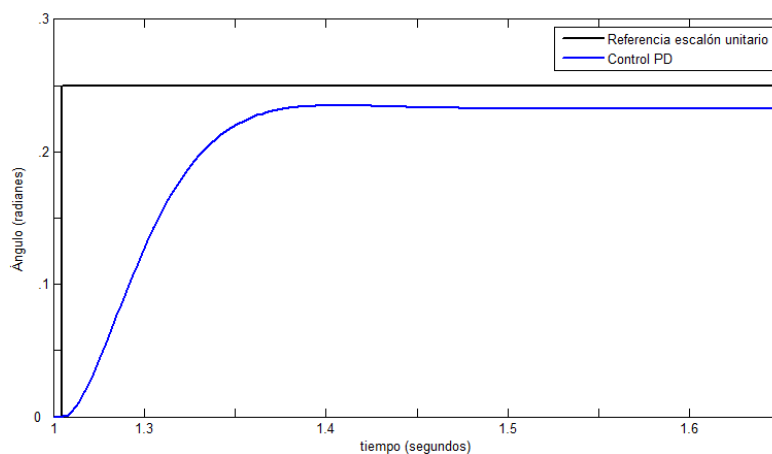


Figura 3.5: Respuesta al escalón unitario utilizando un controlador PD

$$M_{11}(q) = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_1 + I_2$$

$$M_{12}(q) = m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2$$

$$M_{21}(q) = m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2$$

$$M_{22}(q) = m_2 l_{c2}^2 + I_2$$

$$C_{11}(q, \dot{q}) = -m_2 l_1 l_{c2} \text{sen}(q_2) \dot{q}_2$$

$$C_{12}(q, \dot{q}) = -m_2 l_1 l_{c2} \text{sen}(q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]$$

$$C_{21}(q, \dot{q}) = m_2 l_1 l_{c2} \text{sen}(q_2) \dot{q}_1$$

$$C_{22}(q, \dot{q}) = 0$$

$$g_1(q) = [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \text{sen}(q_1) + m_2 g l_{c2} \text{sen}(q_1 + q_2)$$

$$g_2(q) = m_2 g l_{c2} \text{sen}(q_1 + q_2)$$

con  $m_1 = m_2 = 1kg$ ,  $l_1 = l_2 = 30cm \Rightarrow l_{c1} = l_{c2} = 15cm$ , este comportamiento se puede observar en la Figura 3.6.

Finalmente utilizamos el método de control propuesto  $u = PID_0 + G(q) = PID_1$ . Los resultados de las diferentes leyes de control para la primer articulación en la Figura 3.7 nos

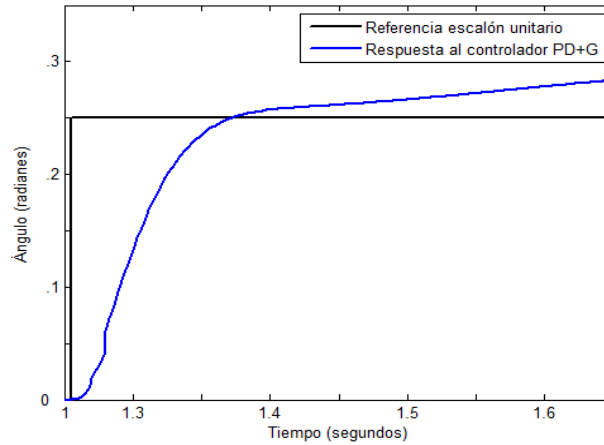


Figura 3.6: Respuesta del Controlador PD mas término de gravedad (PD+G)

muestran que es posible alcanzar la referencia escalón unitario bajo la premisa de utilizar un controlador que garantice la estabilidad asintótica semiglobal.

### 3.6. Conclusiones

En este apartado de la presente tesis podemos observar que al aplicar una ley de control clásica  $PD$  al robot de dos grados de libertad no se alcanza la referencia al escalón unitario, por otro lado al adicionar un término de gravedad al controlador  $PD$ , es decir; aplicar una ley de control  $u = PD + G(q)$  provoca en la dinámica del controlador incertidumbres difíciles de estabilizar debido a la inercia que se gana en el movimiento del robot, para corregir este problema se utiliza un controlador lineal clásico  $PID$  sobre un robot manipulador, la contribución teórica en este apartado es que las condiciones de estabilidad semiglobal asintótica son más sencillas de obtener respecto a otros trabajos y estas condiciones nos permiten obtener un método explícito para la elección de ganancias  $PID$ . Entonces las aportaciones técnicas de esta sección del presente trabajo de tesis es que el método sistemático de ajuste para controladores  $PID$  propuesto esta basado en un análisis de estabilidad, el

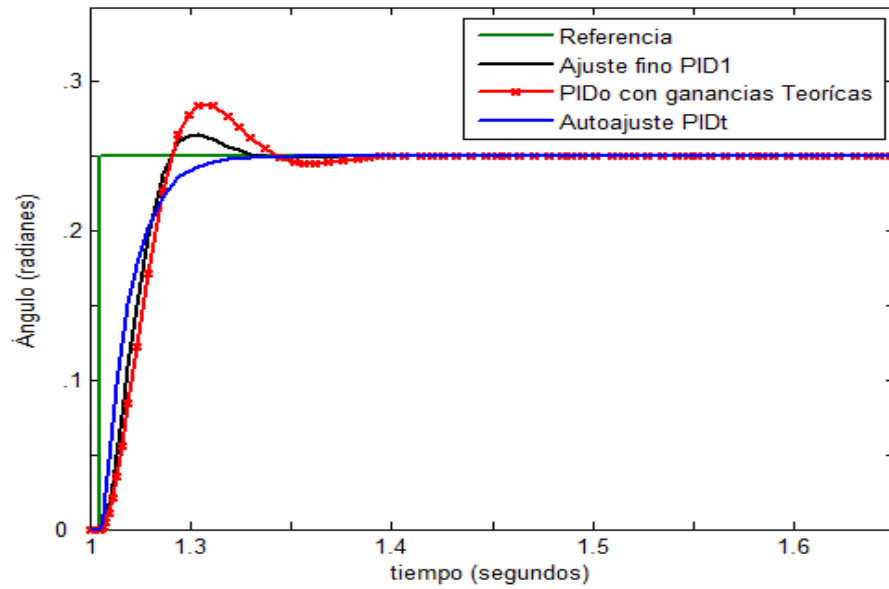


Figura 3.7: Comparación entre distintos métodos de ajuste para controladores PID

cuál al aplicarse a cualquier planta en lazo cerrado garantiza su estabilidad.

# Capítulo 4

## Controlador neuronal PID

### 4.1. Introducción

Los controladores Proporcional Integral y Derivativo (PID) son usados ampliamente en robots manipuladores [31]. Cuando se desconoce la dinámica del robot un controlador PID puede ser el mejor controlador puesto que este es libre de modelo y sus parámetros pueden ajustarse relativamente fácil e independientemente [59]. Con frecuencia un integrador en un controlador PID reduce el ancho de banda del sistema en lazo cerrado, con el fin de eliminar el error en estado estable causado por las incertidumbres y el ruido se puede aumentar la ganancia del integrador, esto nos permite tener un estado deseado sin afectar la estabilidad. Por tales razones algunos robots solo utilizan controladores con acción Proporcional Derivativa (PD) o PID con ganancias integrales pequeñas [40].

Es bien sabido que un controlador PD puede garantizar la estabilidad de un robot manipulador para el caso de regulación. Con frecuencia la estabilidad asintótica no puede alcanzarse cuando la dinámica del manipulador contiene vectores de par gravitacional y de fricción. Desde el punto de vista del control, el error en estado estable puede eliminarse introduciendo una componente integral al controlador PD haciéndolo ahora como un controlador PID. A fin de asegurar una estabilidad asintótica en los controladores PID con frecuencia se utiliza un método para transformarlo de lineal a no lineal. Por ejemplo; en el trabajo de Arimoto

et al [4]; En el trabajo de Sun et al [60] el término integral entra en saturación mediante una función no lineal; Respecto a la saturación de entrada podemos consultar el trabajo de [2]; En otros trabajos como el de Ortega se agrega un término para el filtrado de la posición [49]; Por su parte en los trabajos de [51] y [16] se combinaron técnicas de control neuronal con las técnicas de control PID clásico. Solo pocos investigadores han trabajado con controladores PID lineales. La estabilidad de controladores lineales PID fue probada en el trabajo [54], donde la dinámica del robot fue reescrita en un acoplador lineal y un sistema no lineal, por su parte Kelly [35] demostró la estabilidad asintótica del controlador PID bajo condiciones de ganancias del controlador no explícitas.

Un modelo basado en compensador con PID es un método de control alternativo [59], tal y como el propuesto por compensación adaptable por gravedad [64], La compensación basada en Lyapunov [17], compensación deseada por gravedad [35], y PD mas medición de posición [50]. Todos necesitan información de la estructura y términos gravitatorios del robot. Algunos controladores PD no lineales pueden alcanzar la estabilidad asintótica, por ejemplo el control PD con ganancias variantes en el tiempo [53], control PD con ganancias no lineales [47] y control PD con compensación por modos deslizantes [51]. Debido a que estos controladores son complejos presentan algunas desventajas respecto a los controladores PID lineales.

Una compensación inteligente para un control PD no necesita un modelo matemático, este es conocido como compensador libre de modelo, dentro de este grupo se encuentran: los compensadores difusos [43], los controles difusos [23], compensadores neuronales [41] y compensadores neuro-difusos [10][19]. La idea básica de estos controladores es el uso de un filtro de error de seguimiento basado en el análisis de Lyapunov [40]. Para un algoritmo de ajuste de pesos apropiados son muy similares los métodos de control adaptable [29], la derivada de la función de Lyapunov es negativa siempre y cuando el error de seguimiento filtrado esta fuera de una bola de radio  $\frac{B}{K_v}$ , aquí  $B$  es el límite superior de todas las incertidumbres desconocidas,  $K_v$  es la derivada de la ganancia en el control PD. Estos controladores neuronales PD son acotados uniformemente y los errores de seguimiento se hacen mas pequeños conforme aumenta la ganancia  $K_v$ . El costo de elegir  $K_v$  suficientemente grande es que el

transitorio se vuelve lento. Solo cuando  $K_v \rightarrow \infty$ , el error de seguimiento converge a cero [22].

Es bien conocido en la literatura que un método simple para decrecer el error de trayectoria es agregando una ganancia intergral, es decir; convertir el controlador neuronal PD a un controlador neuronal PID. Entonces nos surge una pregunta: ¿por qué no agregar un integrador en vez de aumentar la ganancia derivada en el control PD neuronal?.

Existen dos enfoques diferentes para combinar el controlador PID con el control inteligente tal y como lo hace el control neuronal. El primer enfoque es que las redes neuronales son formadas dentro de una estructura PID [14][56][65]. Para una adecuada actualización de leyes, los parámetros de los controladores PID se cambian de manera que el sistema en lazo cerrado sea estable. La dificultad para implementarlos industrialmente radica que las ganancias (pesos) de la acción PID son variantes en el tiempo.

El segundo método para las técnicas de control inteligente es; el ajuste de parámetros de los controladores PID, tales como: sintonización difusa [46], sintonización neuronal [26][68] y sintonización experta [33].

Los controladores industriales son PID lineales, sin embargo la estabilidad del sistema en lazo cerrado no está garantizada. El control PID neural de este trabajo supera las desventajas anteriores. Se trata de un controlador PID industrial lineal mas un compensador neural. El principal obstáculo de este controlador PID neuronal es difícil análisis teórico de estabilidad. Incluso para PID lineal, no es fácil de demostrar estabilidad asintótica [35].

## 4.2. Estabilidad asintótica semiglobal para un controlador neuronal PID

Consideremos la dinámica de un robot industrial descrita mediante la siguiente forma de Lagrange:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F(\dot{q}) = u \quad (4.1)$$

donde  $q \in R^n$  representa las posiciones de los eslabones,  $M(q)$  es la matriz de inercia,  $C(q, \dot{q}) = \{c_{kj}\}$  representa la fuerza centrípeta,  $G(q)$  es un vector de pares gravitacionales,  $F(\dot{q})$  representa la fricción. Todos los términos  $M(q)$ ,  $C(q, \dot{q})$ ,  $G(q)$  y  $F(\dot{q})$  son desconocidos.  $u \in R^n$  es la entrada de control y el término de la fricción  $F(\dot{q})$  es representado por el modelo de fricción de Coulomb siguiente:

$$F(\dot{q}) = K_{f1}\dot{q} + K_{f2} \tanh(k_{f3}\dot{q}) \quad (4.2)$$

Donde  $k_{f3}$  es una constante positiva suficientemente grande tal que  $\tanh(k_{f3}\dot{q})$  puede aproximarse a  $\text{sign}(\dot{q})$ ,  $K_{f1}$  y  $K_{f2}$  son coeficientes positivos para este trabajo se utiliza un modelo simple para representar la fricción similar a los utilizados en [40] y [35],

$$F(\dot{q}) = K_{f1}\dot{q} \quad (4.3)$$

Cuando  $G(q)$  y  $F(\dot{q})$  son desconocidas, podemos utilizar una red neuronal para aproximarlas como:

$$\begin{aligned} f(q, \dot{q}) &= G(q) + F(\dot{q}) \\ \hat{f}(q, \dot{q}) &= \widehat{W}\sigma(q, \dot{q}), \quad f(q, \dot{q}) = W^*\sigma(q, \dot{q}) + \phi(q) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Donde  $W^*$  es una constante de pesos desconocida,  $\widehat{W}$  es el peso estimado,  $\phi(q, \dot{q})$  es la aproximación neuronal del error,  $\sigma$  es una función de activación, aquí usamos una función Gaussiana tal que satisfaga  $\sigma(q, \dot{q}) \geq 0$ .

Cuando la velocidad en la articulación  $\dot{q}$  no esta disponible, podemos usar la velocidad del observador para aproximarla, lo cual sera discutido posteriormente. Esta red lineal en los parámetros es una red neuronal multicapa simple. De acuerdo a la teoría de aproximación de funciones, la función suave  $f(q, \dot{q})$  puede aproximarse por una red neuronal multicapa con una capa oculta con sus respectivos pesos y algunas neuronas ocultas.

$$\hat{f}(q, \dot{q}) = \widehat{W}\sigma(\widehat{V} [q\dot{q}]), \quad f(q) = W^*\sigma(V^* [q\dot{q}]) + \phi(q, \dot{q}) \quad (4.5)$$

Donde  $\widehat{W} \in R^{n \times m}$ ,  $\widehat{V} \in R^{m \times n}$ ,  $m$  es el número de nodos ocultos,  $\widehat{V}$  es el peso de la capa oculta. A fin de simplificar el análisis teórico, primero utilizaremos una red lineal en los



parámetros (4.4), posteriormente mostraremos que la red neuronal multicapa (4.5) puede aplicarse bien al control de robots manipuladores. La dinámica de robots (4.1) tiene algunas propiedades estandar [59] las cuales pueden usarse para demostrar estabilidad.

**P1.** La matriz de inercia  $M(q)$  es simétrica y definida positiva:

$$0 < \lambda_m \{M(q)\} \leq \|M\| \leq \lambda_M \{M(q)\} \leq \beta, \quad \beta > 0 \quad (4.6)$$

Donde  $\lambda_M \{M\}$  y  $\lambda_m \{M\}$  son los valores propios máximo y mínimo de la matriz  $M$ .

**P2.** Para la matriz Centrípetas y de Coriolis  $C(q, \dot{q})$ , existe un número  $k_c > 0$  tal que:

$$\|C(q, \dot{q}) \dot{q}\| \leq k_c \|\dot{q}\|^2, \quad k_c > 0 \quad (4.7)$$

y  $\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$  es antisimétrica, es decir;

$$x^T \left[ \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q}) \right] x = 0 \quad (4.8)$$

por lo tanto:

$$\dot{M}(q) = C(q, \dot{q}) + C(q, \dot{q})^T \quad (4.9)$$

**P3.** La aproximación neuronal del error  $\phi(q, \dot{q})$  es Lipschitz sobre  $q$  y  $\dot{q}$

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq k_\phi \|x - y\| \quad (4.10)$$

De la red neuronal lineal en los parámetros (4.4) podemos aproximarla por:

$$G(q) + F(\dot{q}) = W^* \sigma(q, \dot{q}) + \phi(q, \dot{q}) \quad (4.11)$$

Donde  $G(q)$  y  $F(\dot{q})$  satisfacen la condición de Lipschitz **P3**.

A fin de simplificar los cálculos podemos utilizar un modelo simple para la fricción de la forma (4.3), la mínima cota de  $\int \phi(q) dq$  puede estimarse como:

$$\int_0^t \phi(q, \dot{q}) dq = \int_0^t G(q) dq + \int_0^t F(\dot{q}) dq - \int_0^t W^* \sigma(q) dq \quad (4.12)$$

Donde  $U(q_t)$  es la energía potencial del robot,  $\frac{\partial U}{\partial q} = G(q)$ . Y el término  $\sigma(\cdot)$  es una función Gaussiana, y se satisface que  $W^* \sigma(q) > 0$  para  $U(q_t) > 0$

$$\int_0^t \phi(q, \dot{q}) dq > K_{f1} q_t - K_{f1} q_0 - \frac{1}{2} \sqrt{\pi} W^*$$

Donde  $\int_0^t \sigma(q) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(q)$ . Cuando el espacio de trabajo (el conjunto de puntos alcanzables por el robot),  $\min\{q_t\}$  podemos estimar. Y definimos la mínima cota  $\int_0^t \phi(q) dq$  como:

$$k_\phi = K_{f1} \min\{q_t\} - K_{f1}q_0 - \frac{1}{2}\sqrt{\pi}W^* \quad (4.13)$$

Dado una constante de posición deseada  $q^d \in R^n$ , el objetivo del control del robot (4.1) es diseñar un par de entrada  $u$  en tal que la regulación del error

$$\tilde{q} = q^d - q \quad (4.14)$$

Entonces  $\tilde{q} \rightarrow 0$  y  $\dot{\tilde{q}} \rightarrow 0$  cuando las condiciones iniciales son arbitrariamente grandes en el dominio de atracción.

Por otro lado sabemos que el control industrial PID tiene la siguiente estructura:

$$u = K_p \tilde{q} + K_i \int_0^t \tilde{q}(\tau) d\tau + K_d \dot{\tilde{q}} \quad (4.15)$$

Donde  $K_p$ ,  $K_i$  y  $K_d$  son las ganancias proporcional, integral y derivativa del controlador PID.

Cuando desconocemos la dinámica  $\|f(q, \dot{q})\|$  en (4.4), una forma de garantizar la estabilidad asintótica es incrementando la ganancia integral  $K_i$ . Esto puede causar un sobrepaso, mala estabilidad. Una compensación por modelo libre es una solución alternativa, donde  $f(q)$  es una red neuronal como en (4.4). La ley de control normal PD es [40] :

$$u = K_p \tilde{q} + K_d \dot{\tilde{q}} + \hat{f} \quad (4.16)$$

Donde  $\hat{f}(q, \dot{q}) = \widehat{W}\sigma(q, \dot{q})$ . Con el error filtrado  $r = \tilde{q} + \Lambda \dot{\tilde{q}}$ , (4.16) se convierte en:

$$u = K_v r + \hat{f} \quad (4.17)$$

El control (4.17) evita el problema del integrador en (4.15). A diferencia del controlador PID industrial, estos no pueden alcanzar la estabilidad asintótica. La condición de estabilidad para un controlador PID neuronal (4.16) es que  $\|r\| > \frac{B}{K_v}$ ,  $B$  como constante [42]. Con el fin de disminuir  $\|r\|$ ,  $K_d$  tiene que crecer. Esto provoca un problema de ajuste de tiempo. La estabilidad asintótica ( $r \rightarrow 0$ ) necesita que  $K_v \rightarrow \infty$ .

En este trabajo se agrega un integrador dentro del control PID neuronal (4.16), este es muy similar a los controladores industriales PID (4.15),

$$u = K_p \tilde{q} + K_d \dot{\tilde{q}} + K_i \int_0^t \tilde{q}(\tau) d\tau + \hat{f} \quad (4.18)$$

Para el caso de regulación  $\dot{q}^d = 0$ ,  $\tilde{q} = -\dot{q}$ , la ley de control PID puede expresarse mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} u &= K_p \tilde{q} - K_d \dot{q} + \xi + \widehat{W} \sigma(q, \dot{q}) \\ \dot{\xi} &= K_i \tilde{q}, \quad \xi(0) = \xi_0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Aquí necesitamos de la parte del control PID (4.19) este desacoplada, es decir;  $K_p$ ,  $K_i$  y  $K_d$  son definidas positivas. El sistema en lazo cerrado del robot (4.1) es:

$$\begin{aligned} M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + \tilde{f}(q, \dot{q}) \\ = K_p \tilde{q} - K_d \dot{q} + \xi \\ \dot{\xi} = K_i \tilde{q} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Donde  $\tilde{f} = f - \hat{f}$

$$\tilde{f} = W^* \sigma(q) + \phi(q) - \widehat{W} \sigma(q) = \tilde{W} \sigma(q) + \phi(q) \quad (4.21)$$

Con  $\tilde{W} = W^* - \widehat{W}$ . De modo que podemos expresar el sistema en lazo cerrado en su forma matricial siguiente:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi \\ \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_i \tilde{q} \\ -\dot{q} \\ \ddot{q}^d + M^{-1} \begin{pmatrix} C \dot{q} + \tilde{W} \sigma(q) + \phi(q, \dot{q}) \\ -K_p \tilde{q} + K_d \dot{q} - \xi \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

El punto de equilibrio de (4.22) es  $[\xi, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}] = [\xi^*, 0, 0]$ . Donde el punto de equilibrio  $q = q^d$  y  $\dot{q}^d = 0$ , el punto de equilibrio es  $[\phi(q^d), 0, 0]$ . Vamos a simplificar el punto  $\phi(q^d, 0)$  como  $\phi(q^d)$ .

Para mover el punto de equilibrio al origen, definamos:

$$\tilde{\xi} = \xi - \phi(q^d) \quad (4.23)$$

Entonces la ecuación final en lazo cerrado se convierte en:

$$\begin{aligned} M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + \tilde{W}\sigma(q, \dot{q}) + \phi(q, \dot{q}) \\ = K_p\tilde{q} - K_d\dot{\tilde{q}} + \tilde{\xi} + \phi(q^d) \\ \dot{\tilde{\xi}} = K_i\tilde{q} \end{aligned} \quad (4.24)$$

El siguiente teorema nos permite inducir un análisis de estabilidad para el control neuronal PID. Este teorema nos da las condiciones para elegir las ganancias del controlador PID así como las condiciones para entrenar el compensador neuronal para la obtención de los pesos (4.19). Además de que nos da las condiciones para que el control neuronal PID (4.19) lleve el error  $\tilde{q}$  a cero.

**Teorema 4.1** *Dada la dinámica del Robot (4.1) controlada por el control neuronal PID (4.19), el sistema en lazo cerrado (4.24) es semiglobalmente asintóticamente estable en el punto de equilibrio  $x = \left[ \xi - \phi(q^d), \tilde{q}, \dot{\tilde{q}} \right]^T = 0$ , donde las ganancias satisfacen:*

$$\begin{aligned} \lambda_m(K_p) &\geq \frac{3}{2}k_\phi \\ \lambda_M(K_i) &\leq \beta \frac{\lambda_m(K_p)}{\lambda_M(M)} \\ \lambda_m(K_d) &\geq \beta + \lambda_M(M) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Donde  $\beta = \sqrt{\frac{\lambda_m(M)\lambda_m(K_p)}{3}}$ ,  $k_\phi$  satisface (4.10), y el vector de pesos de la red neuronal (4.4) es ajustado por

$$\dot{\hat{W}} = -K_w\sigma(q, \dot{q})(\dot{q} + \alpha\tilde{q})^T \quad (4.26)$$

Donde  $\alpha$  es una constante de diseño positiva y satisface:

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{3}\lambda_m(M)\lambda_m(K_p)}}{\lambda_M(M)} \geq \alpha \geq \frac{3}{\lambda_m(K_i^{-1})\lambda_m(K_p)} \quad (4.27)$$

**Demostración.** Ver el apéndice. ■

**Comentario 4.1** Para el análisis de estabilidad, observamos que las matrices de ganancias del control neuronal PID (4.19) pueden elegirse directamente de las condiciones (4.25). El procedimiento de ajuste de los parámetros del controlador PID es más simple que en los trabajos de [2][4][35][47][54]. No necesita información del modelo. Las cotas superior e inferior de las ganancias PID necesitan el máximo valor propio de la matriz  $M$  en (4.25), esto puede estimarse sin calcular  $M$ . Para un robot con articulaciones solamente de revoluta tenemos [59]:

$$\lambda_M(M) \leq \beta, \quad \beta \geq n \left( \max_{i,j} |m_{ij}| \right) \quad (4.28)$$

Donde  $m_{ij}$  representa el  $ij$ -ésimo elemento de  $M$ ,  $M \in R^{n \times n}$ . Una constante  $\beta$  puede seleccionarse tal que sea mucho más grande que todos los elementos.

**Comentario 4.2** La diferencia principal entre el control neuronal PID respecto a otros controladores es que la condición de estabilidad puede cambiarse, requerimos el error de regulación:

$$\|\tilde{q}\| < k_1 \lambda_M(K_i) \lambda_m(K_p) \quad (4.29)$$

Los otros controladores neuronales PID necesitan:

$$\|\tilde{q}\| > \frac{k_2}{K_v} \quad (4.30)$$

Donde  $k_1$  y  $k_2$  son constantes positivas. Obviamente, si la condición inicial no empeora y satisface (4.29), (4.29) siempre se satisface y  $\|\tilde{q}\|$  decrecerá a cero. Pero (4.30) no se puede cumplir cuando  $\|\tilde{q}\|$  se hace pequeña, de modo que  $K_v$  tendrá que crecer.

**Comentario 4.3** Si la función desconocida  $f(q)$  es estimada por una red neuronal multicapa (4.5). Entonces el error (4.21) se transforma en:

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= f - \hat{f} = W^* \sigma(V^* [q\dot{q}]) + \phi(q, \dot{q}) - \widehat{W} \sigma(\widehat{V} [q\dot{q}]) \\ &= \tilde{W} \sigma(\widehat{V} [q\dot{q}]) - W^* \sigma(\widehat{V} [q\dot{q}]) + W^* \sigma(V^* [q\dot{q}]) + \phi(q, \dot{q}) \\ &= \tilde{W} \sigma(\widehat{V} [q\dot{q}]) + W^* \sigma' \tilde{V} [q\dot{q}] + \epsilon_1 + \phi(q, \dot{q}) \\ &= \tilde{W} [\sigma(\widehat{V} [q\dot{q}]) + \sigma' \tilde{V} [q\dot{q}]] + \widehat{W} \sigma' \tilde{V} [q\dot{q}] + \phi_1(q, \dot{q}) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Donde  $\phi_1(q) = \epsilon_1 + \phi(q, \dot{q})$ ,  $\epsilon_1$  es la aproximación de Taylor del error. Por otro lado la ecuación en lazo cerrado(4.24) se convierte en:

$$\begin{aligned} & M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + \tilde{W} \left\{ \sigma(\hat{V} [q\dot{q}]) + \sigma'\tilde{V} [q\dot{q}] \right\} \\ & + \widehat{W}\sigma'\tilde{V} [q\dot{q}] + \phi_1(q, \dot{q}) \\ & = K_p\tilde{q} - K_d\dot{q} + \tilde{\xi} + \phi(q^d) \\ & \dot{\tilde{\xi}} = K_i\tilde{q} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Si la función de Lyapunov (3.37) se considera como:

$$V_m = V + \frac{1}{2}tr \left( \tilde{V}^T K_v^{-1} \tilde{V} \right) \quad (4.33)$$

entonces la derivada de (4.33) es:

$$\begin{aligned} \dot{V}_m &= \dot{V} - \dot{q}^T \tilde{W} \sigma(q [q\dot{q}]) \\ & + \dot{q}^T \tilde{W} \left[ \sigma(\hat{V} [q\dot{q}]) + \sigma'\tilde{V} [q\dot{q}] \right] + tr \left( \tilde{V}^T K_v^{-1} \dot{\tilde{V}} \right) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Y si la regla de entrenamiento (4.26) se cambia a:

$$\begin{aligned} \dot{\widehat{W}} &= -K_w \left\{ \sigma(\hat{V} [q\dot{q}]) + \sigma'\tilde{V} [q\dot{q}] \right\} (\dot{q} + \alpha\tilde{q})^T \\ \dot{\widehat{V}} &= -K_v \widehat{W} \sigma'q (\dot{q} + \alpha\tilde{q})^T \end{aligned} \quad (4.35)$$

Por lo que el Teorema 1 se cumple.

Un problema común del controlador lineal PID (4.18) es la desaparición de la integral, donde la tasa de cambio de la integral es mucho mayor que la velocidad del sistema. La salida del integrador puede sobrepasar el límite de saturación del actuador. El actuador puede operar a este límite, sin importar la salida del proceso. Esto significa que el sistema funciona como un lazo abierto en lugar de un lazo retroalimentado. Las soluciones para la pérdida de la integral han sido clasificado principalmente en dos tipos [66]: Integración condicional y cálculo iterativo. Pero se ha demostrado que ninguno de los métodos proporciona un buen

índice de diseño en un amplio espectro de procesos [6]. Para este trabajo se utilizará el algoritmo de integración condicional. El término integral esta limitado a seleccionar el valor:

$$u = K_p \tilde{q} + K_d \dot{\tilde{q}} + \text{sat} \left[ K_i \int_0^t \tilde{q}(\tau) d\tau, \nu_{\text{máx}} \right] + \hat{f} \quad (4.36)$$

Donde  $\text{sat}[x, \nu_{\text{máx}}] = \begin{cases} x & \text{si } \|x\| < \nu_{\text{máx}} \\ \nu_{\text{máx}} & \text{si } \|x\| \geq \nu_{\text{máx}} \end{cases}$ .  $\nu_{\text{máx}}$  es un valor preestablecido al término integral cuando el controlador entra en saturación. Este enfoque también es conocido como precarga [57]. Ahora el controlador lineal PID se vuelve un controlador PID no lineal. La estabilidad semiglobal asintótica ha sido analizada por [2]. Cuando  $\nu_{\text{máx}}$  es el máximo par de todos los actuadores de las articulaciones,  $\nu_{\text{máx}} = k_s \text{máx}_i (|u_i^{\text{máx}}|)$ ,  $u_i^{\text{máx}} = \text{máx}(|u_i|)$ ,  $k_s \leq 1$ . Una condición necesaria es que:

$$\nu_{\text{máx}} \geq 3\bar{G}, \quad \|G(q)\| \leq \bar{G}$$

Donde  $G(q)$  es el par gravitacional del robot (4.1),  $\bar{G}$  es la cota superior de  $G(q)$ .  $k_s$  es un factor de diseño en el caso en el que no todos los términos del controlador PID están sujetos a saturación (4.36),  $k_s$  puede seleccionarse como  $k_s = \frac{1}{4}$ .

Siguiendo el proceso de (4.4) a (4.13), El controlador neuronal PID contra la pérdida de integral (4.36) requiere que se cumpla la siguiente condición:

$$\begin{aligned} \nu_{\text{máx}} &\geq 3\bar{\phi} \\ \left\| W^* \sigma(q, \dot{q}) + \phi(q, \dot{q}) \right\| & \\ \leq \left\| W^* \sigma(q, \dot{q}) \right\| + \left\| \phi(q, \dot{q}) \right\| &\leq \bar{\phi} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Donde  $\bar{\phi}$  es la cota superior del estimador neuronal,  $W^*$ ,  $\sigma(q, \dot{q})$  y  $\phi(q, \dot{q})$  son definidas en (4.4).

Podemos ver que la primer condición adicional para el control neuronal para la pérdida de integral es que el estimador neuronal debe estar acotado. Mientras que el controlador neuronal PID solamente necesita que el estimador neuronal satisfaga la condición de Lipschitz (4.10).

Cuando  $u_i^{\text{máx}}$  (o  $\nu_{\text{máx}}$ ) es un requerimiento físico para el actuador es decir; no es un parámetro de diseño. A fin de satisfacer la condición (4.37), podemos hacer  $\bar{\phi}$  tan pequeña como sea posible. Una buena estructura para el estimador neuronal puede hacer que el término  $\left\| W^* \sigma(q, \dot{q}) \right\|$  sea tan pequeño. Existen varios métodos que pueden utilizarse para encontrar una buena red neuronal, tales como algoritmos genéticos [5] y [62]. Además de la estructura de optimización y condiciones iniciales para el algoritmo de entrenamiento tipo gradiente (4.26) también se afecta la cota superior del estimador neuronal  $\bar{\phi}$ . Donde las condiciones iniciales para  $\hat{W}$  y  $\hat{V}$  en (4.35) no afectan la propiedad de estabilidad, Diseñaremos un método para encontrar el mejor valor para  $\hat{W}(0)$  y  $\hat{V}(0)$ . Si dejamos que  $\hat{W}(0) = W_0$ ,  $V(0) = V_0$ , el algoritmo (4.35) puede hacer la identificación del error, es decir;  $\hat{W}(t)$  y  $\hat{V}(t)$  harán la identificación del error tan pequeño que de los valores de  $W_0$  y  $V_0$ . Donde  $\hat{W}(0)$  y  $\hat{V}(0)$  son seleccionados de acuerdo a los siguientes pasos:

1. Iniciar con alguna condición inicial para  $\hat{W}(0) = W_0$ ,  $\hat{V}(0) = V_0$ .
2. Realizar el entrenamiento con (4.35) hasta  $T_0$
3. Si en el error de regulación se tiene que  $\|\tilde{q}(T_0)\| < \|\tilde{q}(0)\|$ , Dejamos a  $\hat{W}(T_0)$  y  $\hat{V}(T_0)$  como nuevos  $\hat{W}(0)$  y  $\hat{V}(0)$ , es decir;  $\hat{W}(0) = \hat{W}(T_0)$ ,  $\hat{V}(0) = \hat{V}(T_0)$ , vamos al paso dos y repetimos el proceso de entrenamiento.
4. Ahora si  $\|\tilde{q}(T_0)\| \geq \|\tilde{q}(0)\|$ , paramos el proceso de identificación, ahora  $\hat{W}(T_0)$  y  $\hat{V}(T_0)$  son los valores finales para  $\hat{W}(0)$  y  $\hat{V}(0)$ .

### 4.3. Control Neuronal PID con velocidades no medibles

El controlador PID (4.19) utiliza las velocidades en las articulaciones  $\dot{q}$ . En contraste con el alto grado de precisión de las mediciones de posición por encoders ópticos, las mediciones de velocidad por tacómetro son muy imprecisas, especialmente para ciertos intervalos de



velocidad. Una opción en el diseño de controladores PID para mediciones de velocidad es proponer observadores de estado para estimar la velocidad. El observador mas simple puede ser el de primer orden y el filtro de posición relativa cero [59]

$$v_i(s) = \frac{b_i s}{s + a_i} q_i(s), \quad i = 1 \dots n \quad (4.38)$$

Donde  $v_i(s)$  es una estimación de  $\dot{q}_i$ ,  $a_i$  y  $b_i$  son los elementos sobre la diagonal principal de las matrices  $A$  y  $B$ , es decir;  $A = \text{diag}\{a_i\}$ ,  $B = \text{diag}\{b_i\}$ ,  $a_i > 0$ ,  $b_i > 0$ . La función de transferencia (4.38) puede representarse por:

$$\begin{cases} \dot{x} = -A(x + Bq) \\ \tilde{q} = x + Bq \end{cases} \quad (4.39)$$

Del controlador PID lineal (4.19) tenemos que:

$$\begin{aligned} u &= K_p \tilde{q} - K_d v + \xi + \widehat{W} \sigma(q) \\ \dot{\xi} &= K_i \tilde{q}, \quad \xi(0) = \xi_0 \\ \dot{x} &= -A(x + Bq) \\ v &= x + Bq \end{aligned} \quad (4.40)$$

Donde  $K_p$ ,  $K_i$  y  $K_d$  son matrices diagonales definidas positivas,  $a_i$  y  $b_i$  en (4.38) son constantes positivas.

Por otro lado el sistema en lazo cerrado del robot (4.1) es:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi \\ v \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_i \tilde{q} \\ -Av + B\dot{q} \\ M^{-1} \begin{bmatrix} -C(q, \dot{q}) \dot{q} - \tilde{W} \sigma(q) - \phi(q) \\ +K_p \tilde{q} - K_d v + \tilde{\xi} + \phi(q^d) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Donde el punto de equilibrio de (4.41) es  $[\tilde{\xi}, v, \dot{q}] = [0, 0, 0]$ .

El siguiente teorema nos proporciona la estabilidad asintótica del controlador neuronal PID con el observador de velocidad (4.38). Este teorema también permite el algoritmo de entrenamiento para los pesos sinápticos de la red neuronal y el método de selección explícita de las ganancias en el control PID.

Cuando las velocidades no están disponibles, la entrada de la red neuronal se convierte en:

$$\begin{aligned}\hat{f}(q, \dot{q}) &= \widehat{W}\sigma(q, v) \\ \hat{f}(q, \dot{q}) &= \widehat{W}\sigma(\widehat{V}[q, v])\end{aligned}\quad (4.42)$$

**Teorema 4.2** *Dada la dinámica del robot (4.1) controlada por el controlador neuronal PID (4.40), si  $A$  y  $B$  del observador de velocidad (4.38) satisfacen:*

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_M(A)}{\lambda_m^2(A)} &\leq \lambda_m(K_d) \frac{\lambda_m(B)}{\lambda_M(B)} \\ \lambda_M(B) &\leq \frac{1}{4}\lambda_m(K_d) \frac{\lambda_m(M)}{\lambda_M^2(M)} \\ \lambda_m(B - \alpha I) &\geq \frac{1}{2}\lambda_m(A)\end{aligned}\quad (4.43)$$

Donde  $\alpha$  es una constante de diseño positiva, y si las ganancias del control PID (4.40) satisfacen:

$$\begin{aligned}&\lambda_m(K_p) - \frac{1}{2}\lambda_M(K_p) \\ &\geq \frac{1}{\alpha} \left[ \begin{array}{c} \lambda_M(K_i) + \lambda_M(A^{-1}BK_i) \\ + \frac{1+2\alpha}{2}k_\phi + \frac{\alpha^2}{2}\lambda_M(K_d) + \frac{\alpha}{2}\lambda_M(A^{-1}K_i) \end{array} \right] \\ &\lambda_m(K_d) \geq \frac{k_g + \frac{1}{2\alpha}\lambda_M(A^{-1}K_i) + \frac{1}{2\alpha}\lambda_M(K_p) + \kappa(M)\lambda_M(M)\lambda_M(A)}{2\lambda_m(AB^{-1}-I)-1} \\ &\lambda_M(K_i) \leq \frac{\alpha}{3}\lambda_m(K_p)\end{aligned}\quad (4.44)$$

Donde  $k_\phi$  satisface (4.10),  $\kappa(M)$  es el número de condición de  $M$ , y los pesos de la red neuronal son ajustados por:

$$\dot{\widehat{W}} = -K_w\sigma(q, v) [\alpha\tilde{q} + v + B^{-1}(\dot{v} + Av)]^T \quad (4.45)$$

Entonces el sistema en lazo cerrado (4.41) es localmente asintóticamente estable en el punto de equilibrio:

$$x = \left[ \xi - \phi(q^d), \tilde{q}, \dot{\tilde{q}} \right]^T = 0 \quad (4.46)$$

En el dominio de atracción:

$$\|\tilde{q}\| \leq \frac{\lambda_m(M)}{\alpha k_c} \left[ \lambda_m(B - \alpha I) - \frac{1}{2}\lambda_m(A) \right] + \frac{1}{\alpha} \|v\| \quad (4.47)$$

**Comentario 4.4** Las condiciones (4.43) y (4.44) nos dicen como elegir las ganancias del controlador PID. La primera condición de (4.44):

$$\lambda_m(K_p) \geq \frac{1}{\alpha} \lambda_M(K_i) + \Omega$$

$$\Omega = \frac{1}{\alpha} \left[ \begin{array}{c} \lambda_M(A^{-1}BK_i) + \frac{1+2\alpha}{2}k_g \\ + \frac{\alpha}{2}\lambda_M(K_d) + \frac{1}{2}\lambda_M(A^{-1}K_i) \end{array} \right] + \frac{1}{2\alpha}\lambda_M(K_p) \quad (4.48)$$

Y la tercer condición de (4.44)  $\lambda_m(K_p) \geq \frac{3}{\alpha}\lambda_M(K_i)$  son compatibles. Y pueden establecerse cuando  $K_i$  no es suficientemente grande. La segunda condición de (4.44) y la tercer condición de (4.43) no son directamente compatibles. Primero tomemos  $\alpha$  tan pequeña como sea posible, y  $K_p$  tan grande como sea posible. Tal que  $K_i$  no sea grande. Estas condiciones son razonables para nuestro control real. Si seleccionamos  $B = \beta A + \alpha I$ , de la tercer condición de (4.43),  $\beta \geq \frac{1}{2}$ . La segunda condición de (4.44) necesita que  $\lambda_m(AB^{-1} - I) > \frac{1}{2}$ , entonces existe  $1 > \beta \geq \frac{1}{2}$  y una  $\alpha$  pequeña, tal que  $\lambda_m[A(\beta A + \alpha I)^{-1} - I] > \frac{1}{2}$ . Después de que  $A$  y  $B$  son seleccionadas, podemos usar la segunda condición de (4.44) para seleccionar  $K_d$ .

En esta sección el algoritmo de control neuronal PID tiene la estructura mostrada den la Figura 4.1.

## 4.4. Resultados Experimentales

En esta sección aplicaremos el controlador PID neuronal a un robot de dos grados de libertad sobre la misma plataforma del capítulo 3. Las propiedades del Robot de dos grados de libertad se muestran en la Tabla 1.

Tabla 4.1. Parámetros del Robot de dos grados de libertad

articulación	masa (Kg)	Centro of Masa (m)	Longitud (m)	Offset de la articulación (m)
1	1	0.15	0.3	0.3
2	1	0.15	0.3	0

Los dos teoremas mencionados en este capítulo del presente trabajo son suficientes para elegir los mínimos valores de las ganancias proporcional y derivativa, así como la máxima

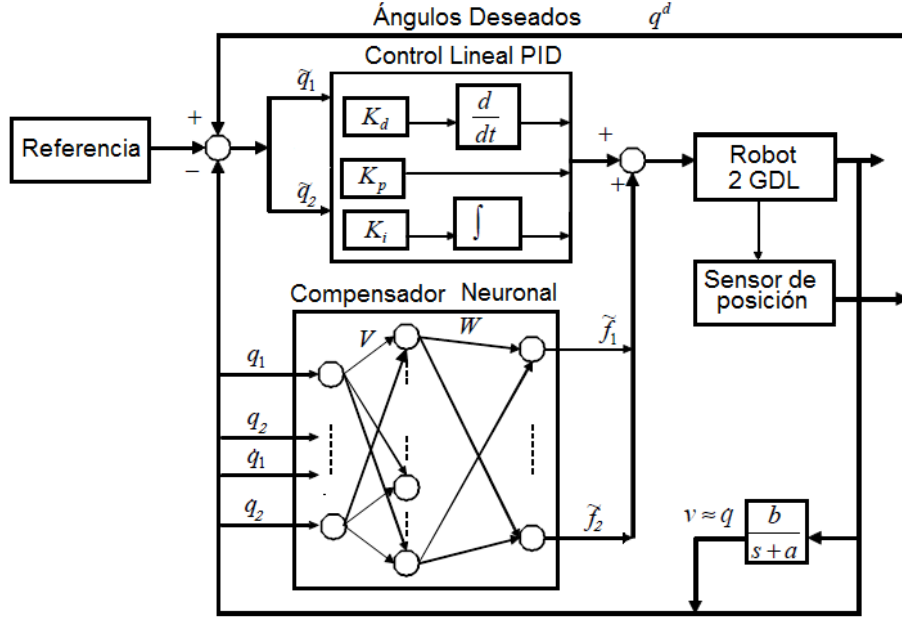


Figura 4.1: Controlador neuronal PID

ganancia integral. Vamos a utilizar los valores de la tabla 1 y (4.28) para estimar los valores máximos y mínimos para los valores propios de la matriz de inercia  $M(q)$ , y  $k_g$  en (4.10). Seleccionemos  $\lambda_M(M) < 3$ ,  $\lambda_m(M) > 1$ ,  $k_g = 10$ . Si elegimos  $\alpha = \frac{4\lambda_M(K_i)}{\lambda_m(K_p)}$  tal que  $\lambda_M(K_i) \leq \frac{\alpha}{3}\lambda_m(K_p)$  se satisface  $\alpha = 0,08$ ,  $A$  es elegida como  $A = \text{diag}(30)$ ,  $\beta = \frac{7}{12}$ , tal que  $B = \text{diag}(17,58)$ . Las velocidades de las articulaciones son estimadas por los filtros:

$$\tilde{q}(s) = \frac{bs}{s+a}q(s) = \frac{18s}{s+30}q(s) \quad (4.49)$$

Las ganancias PID son elegidas como:

$$\begin{aligned} K_p &= \text{diag} [150, 150] \\ K_i &= \text{diag} [2, 1] \\ K_d &= \text{diag} [330, 330] \end{aligned} \quad (4.50)$$

Tal que las condiciones del Teorema 2 se satisfacen. Los elementos iniciales de la matriz de pesos son  $W \in R^{2 \times 2}$  son elegidos aleatoriamente de  $-1$  a  $1$ . La función de activación de

(4.26) es una función Gaussiana.

$$\sigma = \exp \left\{ - (q_i - m_i)^2 / 100 \right\}, \quad i = 1, 2 \quad (4.51)$$

Donde  $m_i$  es seleccionada aleatoriamente de 0 a 2. Los pesos son actualizados por (4.45) con  $K_w = 10$ .

Para corroborar los datos experimentales, primero se realizaron las simulaciones correspondientes a la respuesta escalón unitario del Robot manipulador utilizando las leyes de control clásicas PD y PID observando los resultados de la Figura 4.2.

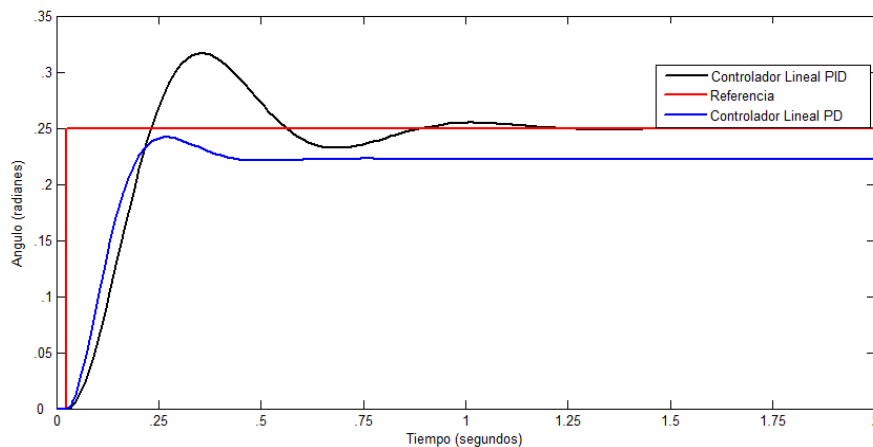


Figura 4.2: Respuesta al escalón unitario de las leyes de control clásicas PD y PID del robot de dos grados de libertad

Posteriormente se implementaron estas leyes de control clásico a su versión por compensación por gravedad y controlador neuronal PD y PID respectivamente cuyos resultados se muestran en la Figura 4.3.

Finalmente estos resultados del controlador neuronal PID se muestran en la Figura 4.4, indicado como "Control Neuronal PID". Vamos a comparar nuestro controlador neuronal con otros controladores utilizados sobre Robots. Primero utilizamos un controlador lineal PID (4.15), las ganancias del controlador PID son las mismas que en (4.50), este resultado se

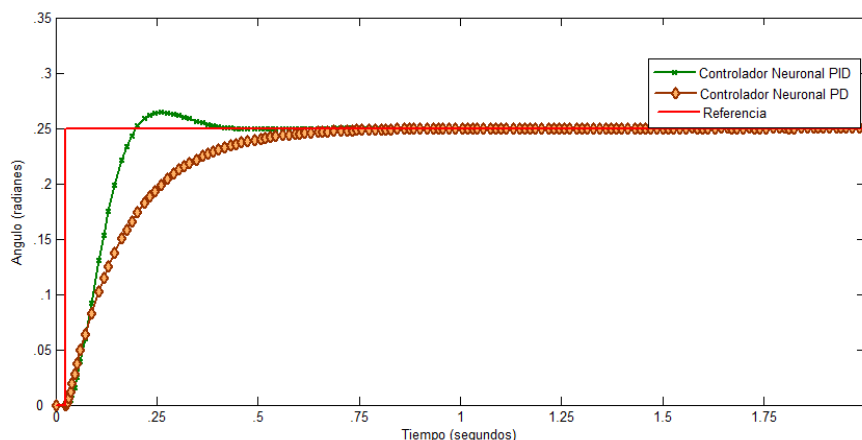


Figura 4.3: Seguimiento de trayectoria del Robot del Controlador Neuronal PD y Controlador Neuronal PID al escalón unitario

presenta en la Figura 4.4. Dado que el error en estado estable es demasiado grande, entonces la ganancia integral es seleccionada como:

$$K_i = \text{diag} [50, 20] \quad (4.52)$$

El resultado del control se muestra en la Figura 4.4 indicada como Controlador lineal PD, cabe mencionar que si hay un incremento de  $K_i$  entonces el sistema en lazo cerrado es inestable. Entonces utilizamos el compensador neuronal para reemplazar al integrador. A fin de disminuir el error en estado estable las ganancias derivativas pueden decrecer como:

$$K_d = \text{diag} [970, 900] \quad (4.53)$$

El resultado de este controlador se muestra en la Figura 4.4 indicada como "PD Neuronal". donde observamos que la respuesta se hace lenta.

Claramente el controlador neuronal PID puede compensar incertidumbres, tales como: fricción, pares gravitacionales y algunas otras incertidumbres del robot. Como el controlador lineal PID no tiene compensación tiene que incrementar su ganancia integral para cancelar las incertidumbres.

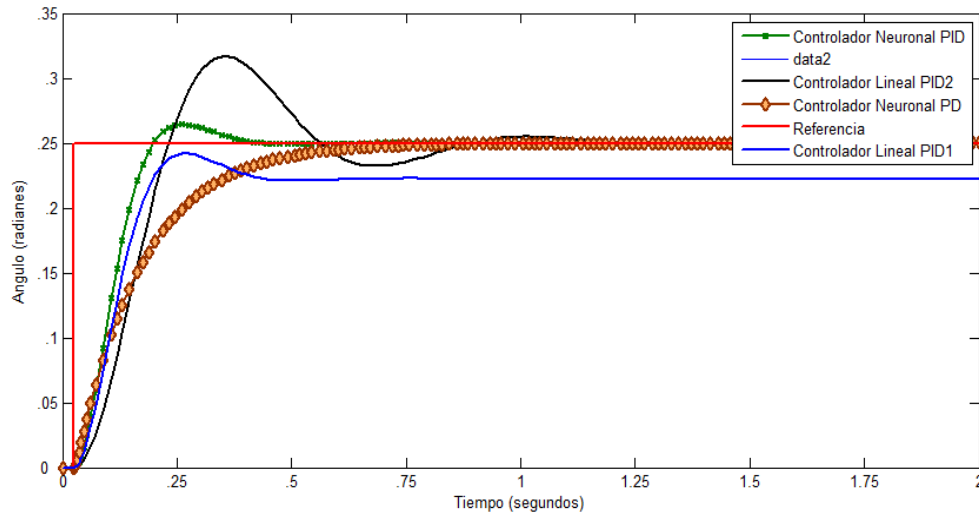


Figura 4.4: Comparación de diferentes controladores aplicados al robot de dos grados de libertad

La estructura del compensador neuronal es muy importante, ya que el número de nodos ocultos  $m$  en (4.5) constituye un problema estructural de la red neuronal. Es bien sabido que al incrementar la dimensión de las capas ocultas se puede ocasionar un problema de superposición y tener un costo computacional elevado. La mejor dimensión a utilizar, es un problema abierto sobre el tema de investigación de redes neuronales.

## 4.5. Conclusiones

El controlador neuronal PID propuesto en esta sección resuelve el problema de elección de ganancias grandes integral y derivativa en el controlador lineal PID y el controlador neuronal PD. Se pueden alcanzar las propiedades de los controladores industriales PID así como los compensadores neuronales probando estabilidad asintótica semiglobal. Cuando las velocidades de las articulaciones de los robots manipuladores no están disponibles, se asegura la estabilidad asintótica con el filtro de posición. Las condiciones de estabilidad nos dan un

método explícito para seleccionar las ganancias PID. Al aplicar nuestro controlador neuronal al robot de dos grados de libertad se valida la ley de control neuronal PID propuesta teóricamente.



# Capítulo 5

## Nuevo método de Sintonización de controladores PID

### 5.1. Introducción

Como se ha mencionado en los capítulos anteriores los controladores PID (proporcional-integral-derivativo) se utilizan ampliamente en robots manipuladores industriales. Ya sabemos que en ausencia del conocimiento del robot el control PID puede ser el mejor controlador, ya que es libre de modelo, y sus parámetros se pueden ajustar fácilmente y por separado [3][6]. Las ventajas del controlador PID sobre los otros es que estos son simples y tienen significados físicos muy claros. Sin embargo, las ganancias del controlador PID deben ser sintonizados para garantizar un buen desempeño, así como, aumento de tiempo, sobreimpulso, tiempo de establecimiento, y el error de estado estacionario.

Desde los orígenes del controlador lineal PID, el principal estudio sobre la sintonización PID se enfocó en sistemas lineales [48]. Donde básicamente el proceso de ajuste de ganancias de PID puede clasificarse en cinco categorías:

1. Modelo basado en sintonización analítica. De acuerdo con las relaciones analíticas entre el modelo y el objetivo de control, las ganancias de PID se calculan a partir de algunas ecuaciones algebraicas [8][11][28].

2. Métodos heurísticos. Estos métodos combinan varias técnicas, tales como la experiencia práctica [73][12], sintonización manual [6], e inteligencia artificial [60][40][32].
3. Métodos en dominio de la frecuencia. Las Frecuencias Características son fáciles de obtener para sistemas lineales. Cuando el proceso es controlado por un sistema lineal, el controlador PID puede ser sintonizado en dominio de frecuencia [57].
4. Métodos de optimización. El Controlador PID se transforma en una forma especial de control óptimo. El problema de sintonización del PID se convierte en un problema de optimización numérica fuera de línea [39].
5. Métodos Adaptables. Están basados en técnicas de control adaptable e identificación paramétrica en línea, las ganancias del controlador PID están sintonizados como un proceso de ajuste automático [67].

El problema de los métodos de sintonización anteriores es que no se pueden aplicar directamente en controladores PID en control de robots ya que la dinámica del robot es no lineal.

Por otro lado el problema de Sintonización de controladores PID en el control de robots se pueden agrupar en:

1. Métodos inteligentes. Las técnicas inteligentes, tales como lógica difusa [60], redes neuronales [40] y algoritmos genéticos [32] se utilizan para ajustar las ganancias del controlador PID de este modo los controladores finales ya no son PID lineales.
2. Control por Impedancia. La dinámica inversa se aplica para convertir el robot en un sistema lineal, La idea de la impedancia mecánica se aplicó a sintonizar ganancias del controlador PID [27]. Las ganancias del PID pueden ajustarse en tiempo discreto por aproximación de la dinámica inversa [8].
3. Enfoque de Lyapunov. El enfoque de Lyapunov se utilizó para ajustar el controlador PID de manera que el controlador de robot puede seguir un control de linealización [9].

Los métodos anteriores necesitan un completo conocimiento del modelo del robot, es muy común que se pierdan los significados físicos de las ganancias PID en estos métodos, ya que estos controladores PID no utilizan las propiedades de los robots.

En el problema de sintonización en control PID para robots existen algunas dificultades de diseño tales como:

- El par en cada articulación afecta a las otras y estos efectos presentan grandes no linealidades.
- El exceso de ganancias simultáneas para el problema de sintonización en robots mediante los métodos clásicos [73] o [12]. Por ejemplo, un robot de seis grados de libertad tiene 18 ganancias a sincronizar. Cuando se sintoniza una ganancia, se requiere el ajuste de las otras 17 debido al acoplamiento dinámico..
- Algunos métodos no lineales, tales como análisis de estabilidad, nos permiten obtener cotas superiores e inferiores para las ganancias del controlador PID. Sin embargo estos métodos no garantizan condiciones de desempeño deseado.

En este capítulo del presente trabajo de tesis se utilizan las siguientes tres condiciones para el control de robots con el fin de obtener un método de ajuste de forma sistemática:

1. En el caso de regulación, un robot puede ser estabilizado mediante cualquier controlador PD siempre y cuando las ganancias del controlador PD sean positivas.
2. El comportamiento en lazo cerrado del control PID es similar al comportamiento de un sistema lineal.
3. El control del par en cada junta es independiente de la dinámica del robot.

El método de ajuste propuesto para este trabajo se muestra en la Figura 5.1. Posteriormente se explicará como funciona cada bloque, también se aplicará este método en un brazo robot de dos grados de libertad. Los resultados experimentales muestran que este método de sintonización PID es simple, sistemático y eficaz en el control de Robots.

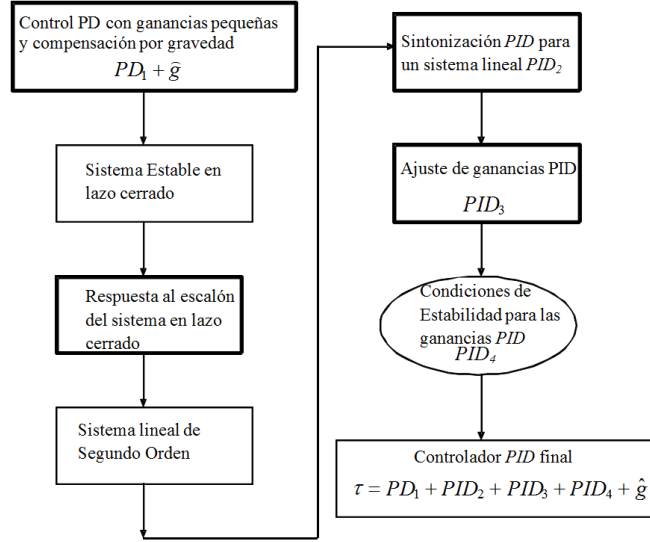


Figura 5.1: Esquema de Ajuste PID

## 5.2. Sintonización PID en lazo cerrado

La dinámica de un robot manipulador de  $n$ -eslabones esta dada por [59]

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + f(\dot{q}) = \tau \quad (5.1)$$

Donde  $q \in \mathfrak{R}^n$  representa las posiciones en los eslabones,  $\dot{q} \in \mathfrak{R}^n$  es la velocidad en los eslabones,  $M(q) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercia,  $C(q, \dot{q}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  es la matriz de fuerza centrípeta y de Coriolis,  $g(q) \in \mathfrak{R}^n$  representa el vector de fuerzas gravitatorias,  $f \in \mathfrak{R}^n$  representa los términos de fricción de Coulomb y  $\tau \in \mathfrak{R}^n$  es un vector de entradas de control.

Dado que la dinámica del robot no es estable en lazo abierto, es imposible enviar un comando que ajuste las ganancias del controlador PID para las articulaciones. En este trabajo se utiliza el siguiente método de sintonización en lazo cerrado.

De modo que el error de regulación del la ley de control PD (3.2) esta acotada en una bola de radio  $\bar{d}$ . Sin embargo la propiedad de estabilidad no es suficiente para el control de robots. Ya que el error en estado estable causado por los términos de fricción y gravedad

puede ser demasiado grande. Por otro lado la derivada de la ganancia  $K_d$  tiene que crecer para poder disminuir, de este modo el sistema en lazo cerrado se vuelve demasiado lento. Este asentamiento de tiempo no nos permite incrementar  $K_d$  como queremos.

En este trabajo usamos la propiedad de estabilidad del control PD (3.2) para estabilizar el robot inestable en lazo abierto (5.1). Para alguna  $K_d$ , cuando  $K_d - K_1 > 0$  ( $K_1 > 0$ ), el siguiente sistema en lazo cerrado es estable:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + f(\dot{q}) = PD_1 \quad (5.2)$$

En la dinámica de manipuladores con frecuencia suele utilizarse un vector de pares gravitacionales  $g(q)$ . Para lo cuál la compensación es un método muy popular para modificar el control PD (3.2). De este modo un nuevo control PD puede ser:

$$\tau = PD_1 + \hat{g}(q) \quad (5.3)$$

Donde  $g(q) = \hat{g}(q) + \tilde{g}(q)$ ,  $\hat{g}(q)$  y  $\tilde{g}(q)$  son el estimado de gravedad y el error aproximado respectivamente. En este caso (3.5) la función de Lyapunov se convierte en:

$$\dot{V}_{PD} \leq -\dot{q}^T (K_d - K_1) \dot{q} + \bar{d}_1$$

Donde  $\bar{d}_1$  es el límite superior de:

$$(\tilde{g} + f), (\tilde{g} + f)^T K_1^{-1} (\tilde{g} + f) \leq \bar{d}_1$$

Normalmente  $\bar{d}_1 \ll \bar{d}$ , dado que  $\tilde{g}$  es el estimado del error de gravedad. Entonces el sistema estable en lazo cerrado (5.2) se transforma en:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + f(\dot{q}) = PD_1 + \hat{g} \quad (5.4)$$

Dado que el control PD (5.3) no puede garantizar que el error en estado estable se haga cero. Podemos agregar un término integrador, el cuál es una herramienta efectiva para eliminar el error en estado estable. De esta forma el control PD (5.3) se transforma en la ley de control PID siguiente:

$$\tau = K_p \tilde{q} + K_i \int_0^t \tilde{q}(\tau) d\tau + K_d \frac{d\tilde{q}}{dt} = PID_2 \quad (5.5)$$

Donde  $K_p$ ,  $K_i$  y  $K_d$  son las ganancias proporcional, integral y derivativa respectivamente del controlador PID. La ganancia del integrador  $K_i$  tiene que incrementar cuando el error en estado estable es grande, esto ocasiona un tiempo de asentamiento grande y lo hace menos robusto.

Ahora mostraremos que en lazo cerrado  $PD_1$  de (3.2),  $\hat{g}(q)$  en (5.3) y  $PID_2$  en (5.5) pueden ajustarse independientemente. De (5.4) sabemos que el sistema en lazo cerrado con  $PD_1$  es estable. Cuando aplicamos un control PID al sistema en lazo cerrado (5.4), este se convierte en:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + \tilde{g}(q) + f(\dot{q}) - PD_1 = PID_2 \quad (5.6)$$

Cuando aplicamos una compensación por gravedad al sistema en lazo cerrado (5.4), este se convierte en:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + f(\dot{q}) - PD_1 = \hat{g}(q) \quad (5.7)$$

Luego si aplicamos un control PID y la compensación por gravedad al sistema en lazo cerrado (5.4) tenemos:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + f(\dot{q}) - PD_1 = PID_2 + \hat{g}(q) \quad (5.8)$$

De esta forma el control total de par del robot es:

$$\tau = PID_2 + PD_1 + \hat{g}(q) \quad (5.9)$$

De las ecuaciones (5.6) a (5.9), podemos ver que el control de par del robot manipulador es linealmente independiente de la dinámica del robot (5.1). Para el caso general, si ajustamos controladores PID  $m$  veces, estos se pueden expresar como:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + f(\dot{q}) = \sum_{j=1}^m PID_j + \hat{g}(q) \quad (5.10)$$

Donde:

$$\sum_{j=1}^m PID_j = \sum_{j=1}^m K_{p,j}\tilde{q} + \sum_{j=1}^m K_{i,j} \int_0^t \tilde{q}(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^m K_{d,j} \frac{d\tilde{q}}{dt}$$

Vemos que  $PD_1$  es un PID especial con  $K_i = 0$ . Esta propiedad nos permite iniciar un control PID con pequeñas ganancias, tal que el sistema en lazo cerrado es estable. Así podemos usar alguna otra regla de ajuste para obtener nuevas ganancias PID independientemente. De esta forma las ganancias finales del controlador PID son la suma de todos los controladores (ganancias).

### 5.3. Linealización del sistema en Lazo Cerrado

A pesar de que la dinámica del robot presenta grandes no linealidades el comportamiento en lazo cerrado con una acción de control PD/PID es similar a la respuesta transitoria de un sistema lineal. Por otro lado después de aplicar el control PID, cada junta del robot puede caracterizarse como un sistema simple entrada simple salida (SISO).

Se pueden utilizar varios métodos para linealizar el modelo de un robot. Si los términos de velocidad ( $C(q, \dot{q}) \dot{q}$ ) y gravedad ( $g(q)$ ) son despreciados en la dinámica no lineal (5.1). El sistema resultante es el modelo lineal siguiente [20]

$$M(q) \ddot{q} = u \quad (5.11)$$

Obviamente esta es una sobresimplificación del modelo y el término dependiente de la velocidad  $C(q, \dot{q}) \dot{q}$  que representa las fuerzas centrípetas y de Coriolis puede despreciarse para pequeñas velocidades. Así podemos usar el esquema de linealización siguiente [21]:

$$A\ddot{q} + Bq = u \quad (5.12)$$

Donde  $A = M(q) |_{q=q_0}$ ,  $B = \frac{\partial g(q)}{\partial q} |_{q=q_0}$ ,  $q_0$  es un punto de operación, pero para algunos experimentos se puede mostrar que a bajas velocidades el término  $C(q, \dot{q})$  no es cero [63].

Los efectos de la gravedad y velocidad son los principales problemas presentes en el control de robots, además de que son de las componentes principales de la dinámica de estos. Cuando el modelo de un robot es completamente conocido, la expansión en series de Taylor puede aplicarse en [44] sobre el punto de operación  $q_0$ , así el modelo no lineal (5.1) puede aproximarse por:

$$A\ddot{q} + D\dot{q} + Bq = \tau \quad (5.13)$$

Donde:

$$\begin{aligned} A &= M(q) \Big|_{q=q_0}, \\ B &= \frac{\partial [g(q) + C(q, \dot{q})]}{\partial q} \Big|_{q=q_0}, \\ D &= \frac{\partial C(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \Big|_{q=q_0} \end{aligned}$$

En este trabajo podemos utilizar un método de identificación basado en una linealización, para cada articulación, un modelo lineal típico es un sistema de primer orden con retardo como el presentado a continuación:

$$G_p = \frac{K_m}{1 + T_m s} e^{-t_m s} \quad (5.14)$$

Cuya respuesta esta caracterizada por tres parámetros, la ganancia de la planta  $K_m$ , el retardo de tiempo  $t_m$ , y una constante de tiempo  $T_m$ . Estos se determinan trazando una tangente a la respuesta escalón sobre el punto de inflexión sin intersectar el eje del tiempo y el valor del estado estable.

Algunas veces el modelo de primer orden (5.14) no puede describir la dinámica no lineal del robot completa. Un modelo razonable para el robot es el usado con series de Taylor de (5.13). Si escribimos el modelo en términos del dominio de la frecuencia tenemos:

$$\frac{q_i(s)}{\tau_i(s)} = \frac{K_m}{T_m^2 s^2 + 2\xi_m T_m s + 1} e^{-t_m s} \quad (5.15)$$

También lo podemos expresar en la forma factorizada:

$$\frac{q_i(s)}{\tau_i(s)} = \frac{K_m}{(1 + T_{m1}s)(1 + T_{m2}s)} e^{-t_m s}$$

La respuesta a este modelo de segundo orden es similar con movimientos mecánicos. Si existe un sobre impulso, podemos agregar un cero negativo, de modo que tenemos lo siguiente (5.15):

$$\frac{q_i(s)}{\tau_i(s)} = \frac{K_m (1 + T_{m3}s)}{(1 + T_{m1}s)(1 + T_{m2}s)} e^{-t_m s} \quad (5.16)$$

Las señales de entrada para el ajuste del controlador PID son escalones repetidos.



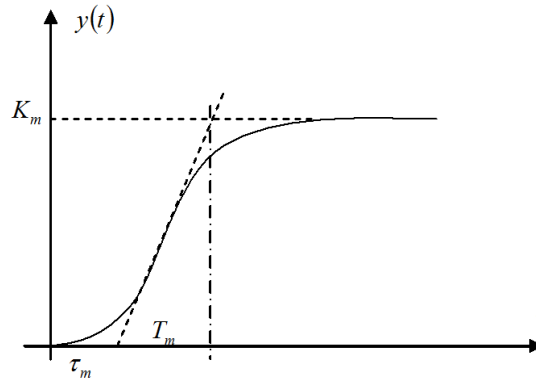


Figura 5.2: Respuesta al escalón de un sistema lineal

## 5.4. Ajuste PD/PID

Dado que el robot puede aproximarse por un sistema lineal, algunas reglas de sintonización se pueden aplicar algunas reglas de ajuste al sistema en lazo cerrado. Primero daremos algunas reglas para el ajuste del control PD, cuando cada articulación puede aproximarse por un sistema de primer orden.

$$G_p = \frac{K_m}{1 + T_m s} e^{-t_m s}$$

Aquí  $K_m$ ,  $T_m$  y  $t_m$  son obtenidas de la Figura 5.2.

La ley de control PID lineal en el dominio del tiempo (5.5) puede transformarse al dominio de la frecuencia por:

$$\tau(s) = K_c \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) E(s) = G_c(s) E(s) = PID_2$$

Dentro de los métodos de ajuste PID mas populares se encuentran los métodos de Ziegler-Nichols [73] y [12] Cohen-Coon, ver Tabla 1.

Tabla 1. Métodos de Ziegler-Nichols y Cohen-Coon para PI/PD

	$K_c$	$T_i$	$T_d$
Sintonización de Ziegler-Nichols	$a \frac{T_m}{K_m \tau_m}$	$0,5\tau_m$	
Método Cohen-Coon	$\frac{T_m}{K_m \tau_m} \left( \frac{4}{3} + \frac{\tau_m}{4T_m} \right)$	$\frac{4T_m \tau_m}{11T_m + 2\tau_m}$	
Nuestro Método	$\frac{T_{m2}}{K_m}$		$T_{m1}$

Si cada articulación es aproximada por un sistema de segundo orden:

$$\frac{q_i(s)}{u_i(s)} = \frac{K_m}{T_m^2 s^2 + 2\xi_m T_m s + 1}$$

Existen pocos métodos para el problema de sintonización PD, donde las ganancias para el control PD son ajustadas de acuerdo a la Tabla 2, la cuál muestra nuestro método respecto a otros dos enfoques.

Tabla 2. Sintonización PD para modelos de segundo orden

	$K_c$	$T_i$	$T_d$
Método 1	$\frac{5T_{m1}\xi_m}{K_m T_{m3}}$	$\frac{T_{m1} + 0,1\xi_m}{0,8T_{m1}\xi_m}$	
Método 2	$\frac{T_{m2}}{K_m}$	$T_{m1}$	
Nuestro Método	$\frac{T_{m2}}{K_m}$		$T_{m1}$

En esta tabla el Método 1 es tomado de [28] y el Método 2 se toma de [11]. Cuando un controlador PD no produce buenos resultados, un buen método alternativo es utilizar un control PID, donde las ganancias para el control PID de primer orden pueden elegirse de acuerdo a la Tabla 3.

Tabla 3. Sintonización de modelos de primer orden

	$K_c$	$T_i$	$T_d$
Sintonización Ziegler-Nichols	$a \frac{T_m}{K_m \tau_m}$ ,	$2\tau_m$	$0,5\tau_m$
Método de Cohen-Coon	$\frac{T_m}{K_m \tau_m} \frac{\tau_m}{4T_m}$	$\frac{\tau_m(32T_m + 6\tau_m)}{13T_m + 8\tau_m}$	$\frac{4T_m \tau_m}{11T_m + 2\tau_m}$
Nuestro Método	$\frac{T_{m2}}{K_m}$	$T_{m2}$	$T_{m1}$

En la Tabla 3, los términos  $K_c = K_p$  representan la ganancia proporcional,  $T_i = \frac{K_c}{K_i}$  es la

constante de tiempo integral y  $T_d = \frac{K_d}{K_c}$  es la constante de tiempo derivativa. Luego para la elección de las ganancias del control PID del modelo de segundo orden se puede utilizar la Tabla 4 siguiente.

Tabla 4. Sintonización PID para modelo de segundo orden

	$K_c$	$T_i$	$T_d$
Método 1	$\frac{5T_{m1}\xi_m}{K_m T_{m3}}$	$2T_{m1}\xi_m$	$\frac{T_{m1}+0,1\xi_m}{0,8T_{m1}\xi_m}$
Método 2	$\frac{T_{m2}}{K_m}$	$T_{m2}$	$T_{m1}$
Nuestro Método	$\frac{20\xi_m T_m}{K_m}$	$15\xi_m T_m$	$\frac{T_m^2}{10}$

De la referencia (5.25) podemos observar que las ganancias del control PID son linealmente independientes y las podemos modificar directamente. De este modo podemos incluir un nuevo controlador PID denotado por  $PID_3$ , Para ajustar las ganancias PID podemos utilizar la Tabla 5.

Tabla 5. Ajuste PID ( $PID_3$ )

	Pico	Sobreimpulso	Asentamiento	Error Estado	Estabilidad
$K_p \uparrow$	Decrece	Crece	Pequeña Crece	Decrece	Empeora
$K_i \uparrow$	Pequeña Decrece	Crece	Crece	Grande Decrece	Empeora
$K_d \uparrow$	Pequeña Decrece	Decrece	Crece	Menor Decrece	Mejora

Después podemos ajustar el proceso para la ley de control aplicada al Robot

$$\tau = PD_1 + PID_2 + PID_3 + \hat{g}(q) \quad (5.17)$$

Con el fin de disminuir el error en estado estable, podemos incrementar la ganancia  $K_i$ . Para tener un menor tiempo de asentamiento podemos disminuir  $K_d$ . Luego si queremos

un Sobreimpulso menor debemos disminuir  $K_p$ . A menudo el proceso de ajuste anterior no es suficiente para garantizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado. En el siguiente apartado daremos las condiciones para las cotas para las ganancias del controlador PID que nos garanticen la estabilidad.

## 5.5. Condiciones de Estabilidad para las ganancias PID.

El controlador PID lineal común no considera algún componente de la dinámica del robot dentro de esta ley. Con el fin de asegurar la estabilidad asintótica del control PID, el enfoque más simple es modificar el control PID lineal en uno no lineal. En [54] la dinámica del robot es reescrita como un sistema lineal desacoplado y acotado, este controlador lineal PID no puede garantizar la estabilidad asintótica. En [37] se presentan las condiciones suficientes de estabilidad para el controlador PID lineal utilizando un análisis basado en Lyapunov, sin embargo estas condiciones no son explícitas, de modo que el control PID no puede utilizar estas condiciones directamente, necesitando un procedimiento de ajuste un complicado como el usado en [38].

La ley de control PID dada por (5.5) puede expresarse mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\tau &= K_p e + K_d \dot{e} + \xi = PID_4 \\ \dot{\xi} &= K_i e, \quad \xi(0) = \xi_0\end{aligned}\tag{5.18}$$

En la discusión anterior solo hemos considerado  $PID_4$  sin considerar  $PD_1$ ,  $PID_2$  y  $PID_3$ . El sistema en lazo cerrado del robot (5.2) puede considerarse como:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = K_p \tilde{q} - K_d \dot{\tilde{q}} + \xi, \quad \dot{\xi} = K_i \tilde{q}$$

De donde podemos ver que el punto de equilibrio es  $\left[\xi, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}\right] = [\xi^*, 0, 0]$ . Cuando el punto de equilibrio satisface  $q = q^d$ , entonces tenemos que el equilibrio es  $[g(q^d), 0, 0]$ . Con el fin de mover el punto de equilibrio al origen, podemos definir  $\tilde{\xi} = \xi - g(q^d)$ . De modo que la ecuación del sistema en lazo cerrado se transforma en  $\dot{\tilde{\xi}} = K_i \tilde{q}$ ,

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = K_p \tilde{q} - K_d \dot{\tilde{q}} + \tilde{\xi} + g(q^d)\tag{5.19}$$

En [68] se ha probado que la dinámica del robot controlada por el controlador PID lineal (5.18) del sistema en lazo cerrado (5.19) es semiglobalmente asintóticamente estable sobre el equilibrio  $x = \left[ \xi - g(q^d), \tilde{q}, \dot{\tilde{q}} \right]^T = 0$ , mostrando que las ganancias de control satisfacen:

$$\lambda_m(K_p) \geq \frac{3}{2}k_g, \quad (5.20)$$

$$\lambda_M(K_i) \leq \beta \frac{\lambda_m(K_p)}{\lambda_M(M)}, \quad (5.21)$$

$$\lambda_m(K_d) \geq \beta + \lambda_M(M) \quad (5.22)$$

Donde  $\beta = \sqrt{\frac{\lambda_m(M)\lambda_m(K_p)}{3}}$ ,  $k_g$  satisfacen  $\|g(q_1) - g(q_2)\| \leq k_g \|q_1 - q_2\|$ .

Las tres matrices de ganancias del control PID lineal (5.18) pueden elegirse directamente de las condiciones (5.20). De (5.10) sabemos que el control PID con compensación por gravedad (5.17) es:

$$\tau = \sum_{j=1}^3 PID_j + \hat{g}(q) = PID_f + \hat{g}(q)$$

Ahora si aplicamos la condición (5.20) a  $PID_f$ . Y si las ganancias de  $PID_f$  no están en el límite de (5.20), podemos agregar un nuevo controlador PID,  $PID_4$ , tal que las ganancias de  $PID_f + PID_4$  están acotadas por (5.20). Así el control por par final del robot es:

$$\tau = PD_1 + PID_2 + PID_3 + PID_4 + \hat{g}(q)$$

Tal y como se ilustra en la Figura 5.1.

## 5.6. Resultados Experimentales

Considerando los parámetros geométricos del robot dados en la Tabla 1:

Tabla 1. Parámetros del robot de dos grados de libertad

Articulación	Masa (kg)	Centro (m)	Longitud (m)
1	1.5	0.15	0.3
2	1.5	0.15	0.3

Primero utilizaremos las siguientes ganancias del controlador  $PD_1$  con el fin de estabilizar el robot manipulador

$$\begin{aligned} K_{p1} &= \text{diag} [150, 150] \\ K_{d1} &= \text{diag} [330, 330] \end{aligned} \quad (5.23)$$

La velocidad en las articulaciones es estimada mediante los filtros estandar siguientes

$$\tilde{q}(s) = \frac{bs}{s+a}q(s) = \frac{18s}{s+30}q(s)$$

Luego para la energía potencial consideramos:

$$U = m_1gl_1s_1 + m_2gl_1s_1 + m_2gl_2s_1c_2 + m_2gl_2c_1s_2$$

De donde la compensación por gravedad del sistema en lazo cerrado (5.19) se calcula mediante:

$$\hat{g} = \frac{\partial}{\partial q}U(q)$$

Luego utilizamos la respuesta al escalón unitario para aproximar la respuesta en lazo cerrado del robot mediante el controlador  $PD_1$ . Donde la respuesta del sistema en lazo cerrado de las respuesta al escalón unitario de los dos eslabones se muestra en la Figura 5.3 de la elección de  $G_1 = \frac{0,93}{60s^2+9s+1}$ ,  $G_2 = \frac{1}{20s^2+3s+1}$ .

Con el fin de ajustar las ganancias PID del sistema lineal, podemos reescribir el controlador PID (5.5) como:

$$PID_t = K_c \left( \tilde{q} + \frac{1}{T_i} \int_0^t \tilde{q}(\tau) d\tau + T_d \dot{\tilde{q}} \right)$$

Donde  $K_c = K_p$  es la ganancia proporcional,  $T_i = \frac{K_c}{K_i}$  es una constante integral de tiempo y  $T_d = \frac{K_d}{K_c}$  es la constante derivativa de tiempo. Si utilizamos la siguiente regla de ajuste:

$$K_c = \frac{20\xi_m T_m}{K_m}, \quad T_i = 15\xi_m T_m, \quad T_d = \frac{T_m^2}{10} \quad (5.24)$$

Para ajustar los parámetros del controlador PID. Esta regla es similar a la utilizada en [28] y [11], en este caso  $K_c = \frac{5T_{m1}\xi_m}{K_m T_{m3}}$ ,  $T_i = 2T_{m1}\xi_m$ ,  $T_d = \frac{T_{m1}+0,1\xi_m}{0,8T_{m1}\xi_m}$ . Este ajuste varia respecto a las

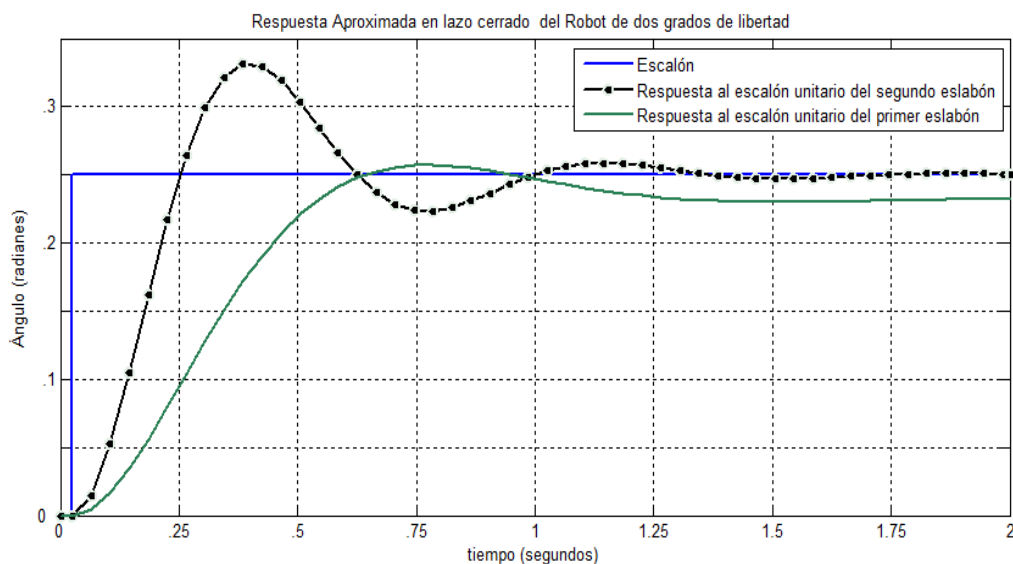


Figura 5.3: Respuesta aproximada al escalón unitario en el robot de dos grados de libertad

reglas clásica de Ziegler-Nichols y Cohen-Coon, donde  $K_c = a \frac{T_m}{K_m \tau_m}$ ,  $T_i = 2\tau_m$ ,  $T_d = 0,5\tau_m$  ó  $K_c = \frac{T_m}{K_m \tau_m} \left( \frac{4}{3} + \frac{\tau_m}{4T_m} \right)$ ,  $T_i = \frac{\tau_m(32T_m+6\tau_m)}{13T_m+8\tau_m}$ ,  $T_d = \frac{4T_m\tau_m}{11T_m+2\tau_m}$ . Esta regla de ajuste esta hecha para sistemas mecánicos. Luego de la regla (5.24), podemos elegir las ganancias para el controlador  $PID_2$  siguientes:

$$\begin{aligned} K_{p2} &= \text{diag} [90, 30] \\ K_{i2} &= \text{diag} [1, 2] \\ K_{d2} &= \text{diag} [500, 410] \end{aligned} \quad (5.25)$$

Si utilizamos el vector de pares  $u = PID_1 + \hat{g}(q) + PID_2$ . Podemos observar el resultado para el primer eslabón en la Figura 5.4.

Después si realizamos un ajuste las ganancias para el controlador  $PID_3$  serán:

$$\begin{aligned} K_{p3} &= \text{diag} [5, 4] \\ K_{i3} &= \text{diag} [32, 28] \\ K_{d3} &= \text{diag} [5, 4] \end{aligned} \quad (5.26)$$

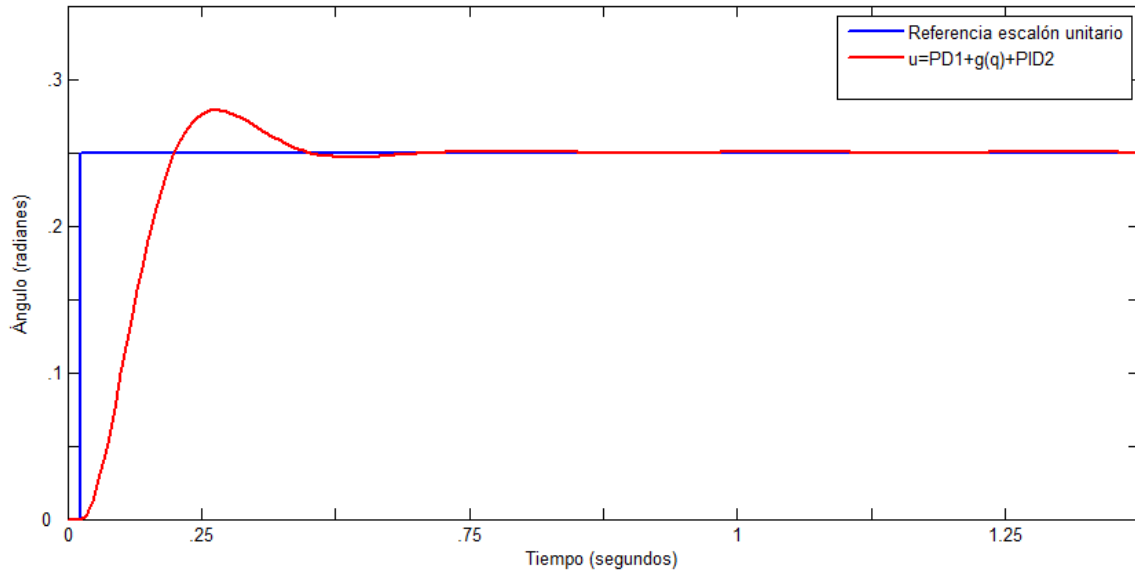


Figura 5.4: Controlador  $u = PD_1 + \hat{g}(q) + PID_2$  sobre el robot manipulador de dos grados de libertad

Por lo que la ley de control final será:

$$PID_f = PD_1 + \hat{g}(q) + PID_2 + PID_3 \quad (5.27)$$

La condición de estabilidad (5.20) nos proporciona las condiciones suficientes para elegir el valor mínimo de la ganancia proporcional y de la ganancia derivativa así como nos da las condiciones suficientes para elegir la máxima ganancia integral. Con lo cual tenemos que la ley de control final (5.27) satisface las condiciones (5.20) la cuál se ilustra en la Figura 5.5.

Luego para el control final del robot agregamos un nuevo controlador PID, de modo el control de fuerza definido por la Figura 5.1 presenta la estructura  $\tau = PD_1 + PID_2 + PID_3 + PID_4 + \hat{g}(q)$  cuyo comportamiento es ilustrado en la Figura 5.6.



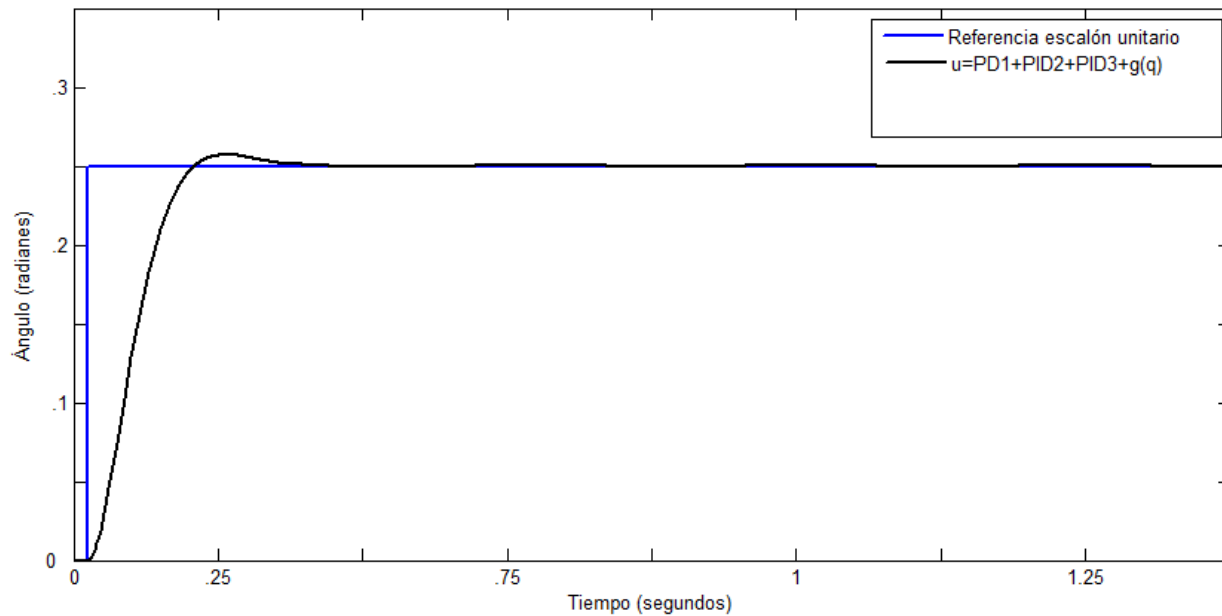


Figura 5.5: Controlador  $PID_f = PD_1 + \hat{g}(q) + PID_2 + PID_3$  sobre el robot manipulador de dos grados de libertad

## 5.7. Conclusiones

En este apartado se propone un nuevo método de ajuste sistemático para controladores PID. Este método puede ser aplicado bastante bien a robots manipuladores. Usando las propiedades de la dinámica de los robots manipuladores el proceso de ajuste se hace mas amigable en aplicaciones reales. Lo novedoso de este enfoque es el uso de respuestas escalón unitario para sistemas en lazo cerrado bajo la ley de control PD así como la separación del vector de par de las articulaciones en varios controladores PID independientes. Finalmente en la validación del controlador propuesto de forma teórica se obtuvieron buenos resultados en el robot de dos grados de libertad del laboratorio de pruebas del departamento de control automático.

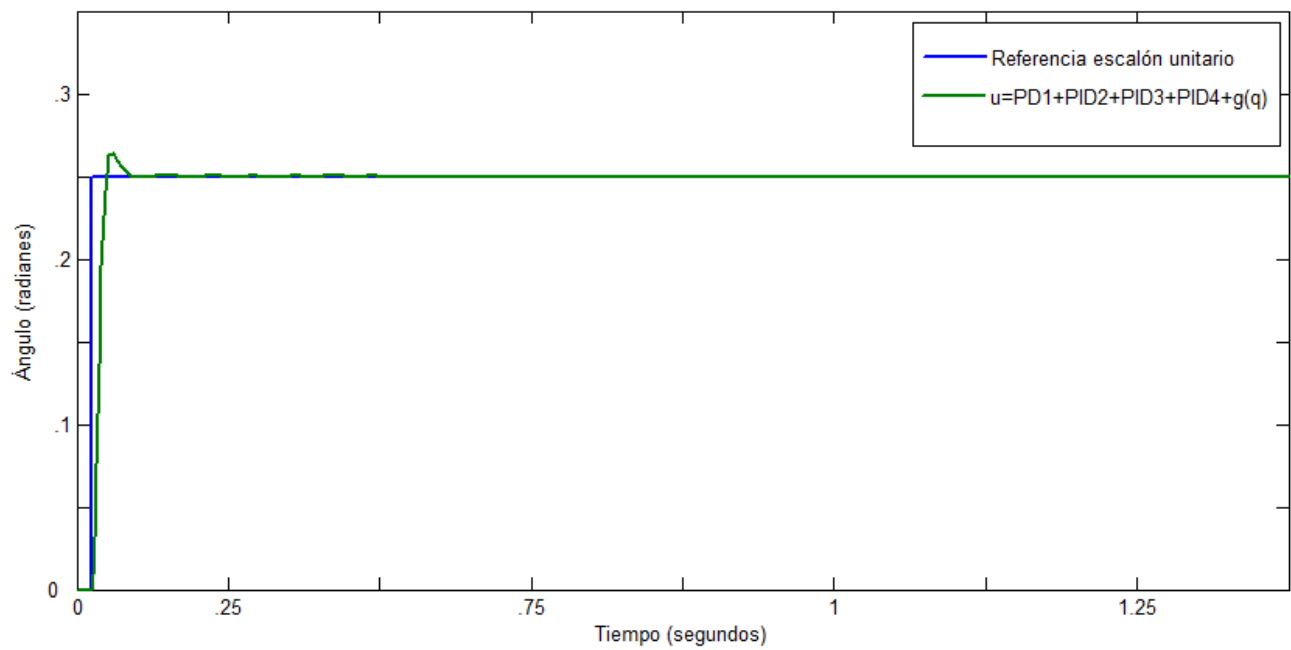


Figura 5.6: Controlador  $\tau = PD_1 + \hat{g}(q) + PID_2 + PID_3 + PID_4$  sobre el robot manipulador de dos grados de libertad

# Capítulo 6

## Conclusiones Finales

Primero al utilizar un método basado en la estabilidad de Lyapunov del capítulo 3 al controlador PID lineal clásico sobre el robot manipulador nos permite determinar las condiciones de estabilidad semiglobal y asintótica, cabe mencionar que estas condiciones son más sencillas de obtener respecto a otros trabajos además de que estas condiciones nos permiten obtener un método explícito para la elección de ganancias PID. Es importante mencionar que al aplicar este método a la planta en lazo cerrado se garantizara siempre su estabilidad.

Por otro lado el controlador neuronal PID propuesto en el capítulo cuatro resuelve el problema de elección de ganancias integral y derivativa grandes en el controlador lineal PID y el controlador neuronal PD. Se pueden alcanzar las propiedades de los controladores industriales PID así como los compensadores neuronales probando estabilidad asintótica semiglobal. Cuando las velocidades de las articulaciones de los robots manipuladores no están disponibles, se asegura la estabilidad asintótica con el filtro de posición. Las condiciones de estabilidad nos dan un método explícito para seleccionar las ganancias PID. Al aplicar nuestro controlador neuronal al robot de dos grados de libertad se valida la ley de control neuronal PID propuesta teóricamente.

En el capítulo cinco se propone un nuevo método de ajuste sistemático para controladores PID el cuál pudo aplicarse al robot manipulador de dos grados de libertad mejorando el índice de desempeño original. Como este controlador usa las propiedades de la dinámica de

los robots manipuladores el proceso de ajuste se hace mas amigable en aplicaciones reales. Lo novedoso de este enfoque es el uso de respuestas escalón unitario para sistemas en lazo cerrado bajo la ley de control PD así como la separación del vector de par de las articulaciones en varios controladores PID independientes.

# Bibliografía

- [1] ALVAREZ- Ramirez J., I.Cervantes, R.Kelly, "PID regulation of robot manipulators: stability and performance", *Systems & Control Letters*, Vol.41, 73-83, 2000.
- [2] ALVAREZ-Ramirez J., R.Kelly, I.Cervantes, "Semiglobal stability of saturated linear PID control for robot manipulators", *Automatica*, vol.39,989-995, 2003.
- [3] ANG K.H., Chong, G. and Li, Y., "PID Control System Analysis, Design, and Technology", *IEEE Trans. Control System Technology*, vol. 13, no. 4, pp. 559–576, 2005.
- [4] ARIMOTO S., "Fundamental problems of robot control: Part I, Innovations in the realm of robot servo-loops", *Robotica*, vol.13, No.1, 19–27, 1995.
- [5] ARIFOVICA J., R.Gencay, "Using genetic algorithms to select architecture of a feed-forward artificial neural network", *Physica A*, Vol.289, 574-594, 2001.
- [6] ASTROM Karl J., T. Hagglund, "*PID Controllers: Theory, Design and Tuning*", ISA Press, Research Triangle Park, North Carolina, 1995.
- [7] ASTROM K.J. and Hagglund, T., "Revisiting the Ziegler–Nichols step response method for PID control", *Journal of Process Control*, 14, pp.635–650, 2004.
- [8] CHANG P.H. and Jung J.H., "A systematic method for gain selection of robust PID control for nonlinear plants of second-order controller canonical form", *IEEE Trans. Control System Technology*, vol. 17, no. 2, pp. 473–483, 2009.

- [9] CHANG W.D., Hwang, R.C. and Hsieh, J.G., "A self-tuning PID control for a class of nonlinear systems based on the Lyapunov approach", *Journal of Process Control*, 12, pp.233–242, 1986.
- [10] CHEN C., "Dynamic Structure Neural-Fuzzy Networks for Robust Adaptive Control of Robot Manipulators", *IEEE Trans. Industrial Electronics*, VOL. 55, NO. 9, 3402-3414, 2008.
- [11] CHIEN I. L., P.S.Fruehauf, "Consider IMC tuning to improve controller performance", *Chemical Engineering Progress*, 33-41, 1990.
- [12] COHEN G.H., G.A. Coon, "Theoretical consideration of retarded control", *Trans. ASME*, 75, 827–834, 1953.
- [13] COMINOS P. and Munro N., "PID controllers: recent tuning methods and design to specifications", *IEE Proceedings—Control Theory and Applications*, 149 (1), pp.46–53, 2002.
- [14] CONG S. and Y. Liang, "PID-Like Neural Network Nonlinear Adaptive Control for Uncertain Multivariable Motion Control Systems", *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 56, no. 10, pp. 3872-3879, 2009.
- [15] DENAVIT J., R. S. Hartenberg, "A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices", *Journal of Applied Mechanics*, junio 1995.
- [16] DIERKS T., S.Jagannathan, "Neural Network Output Feedback Control of Robot Formations", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B*, Vol.40, No.4, 383-399, 2010.
- [17] DUPREE K., C-H.Liang, G.Hu, W. E.Dixon, "Adaptive Lyapunov-Based Control of a Robot and Mass–Spring System Undergoing", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B*, Vol.38, No.4, 1050-1061, 2008.

- [18] EMILIA G., A.Marra, E.Natale, "Use of neural networks for quick and accurate auto-tuning of PID controller", *Journal Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, Volume 23 Issue 2, 170-179, 2007.
- [19] ER M.J. and Y.Gao, "Robust Adaptive Control of Robot Manipulators Using Generalized Fuzzy Neural Networks", *IEEE Trans. Industrial Electronics*, VOL. 50, NO. 3, 620-628, 2003.
- [20] GOLDENBERG A. A. and Bazerghi, A., "Synthesis of robot control for assembly processes", *Mech. Machine Theory*, 21(1), pp.43-62, 1986.
- [21] GOLLA D.F., Garg S.C. and Hughes P.C., "Linear state-feedback control of manipulators", *Mech.Machine Theory*, 16, pp.93-103, 1981.
- [22] GUTIERREZ L.B. and F. L. Lewis, "Implementation of a neural net tracking controller for a single flexible link: comparison with PD and PID controllers", *IEEE Trans. Industrial Electronics*, VOL. 45, NO. 2, 307-318, 1998.No.1, 131-147, 2002.
- [23] HARINATH E.,G.Mann, "Design and Tuning of Standard Additive Model Based Fuzzy PID Controllers for Multivariable Process Systems", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B*, Vol.38, No.8, 667-674, 2008.
- [24] HAYKIN S. "*Neural Networks, A Comprehensive Foundation*", 2a Edición, Prentice Hall, 1999.
- [25] HERR H., "Exoskeletons and orthoses: classification, design challenges and future directions", *Journal of Neuro Engineering and Rehabilitation*, 6(21) pp.1023-1031, 2009.
- [26] HO S-J., L-S.Shu, S-Y.Ho, "Optimizing Fuzzy Neural Networks for Tuning PID Controllers Using an Orthogonal Simulated Annealing Algorithm OSA", *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, Vol.14, NO. 3, 421-434, 2006.
- [27] HOGAN N., "Impedance control: An approach to manipulation, Parts I-III", *ASME J. Dynam. Syst., Meas., Contr.*, vol. 107, pp. 1-24, 1985.

- [28] HUANG H.-P., J.-C.Jeng, K.-Y.Luo, "Auto-tune system using single-run relay feedback test and model-based controller design", *Journal of Process Control*, 15, 713-727, 2005.
- [29] IOANNOU P.A. and J.Sun, "*Robust Adaptive Control*", Prentice-Hall", Inc, Upper Saddle River: NJ, 1996.
- [30] JAFAROV E. M., M. N. A. Parlakçı, and Y. Istefanopulos, "A New Variable Structure PID-Controller Design for Robot Manipulators", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol.13, No.1, 122-130, 2005.
- [31] JIN Y., "Decentralized Adaptive Fuzzy Control of Robot Manipulators", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B*, Vol.28, No.1, 47-57, 1998.
- [32] JUANG, J.G., Huang, M.T. and Liu, W.K., "PID control using presearched genetic algorithms for a MIMO system", *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. C, Appl. Rev.*, vol. 38, no.5, pp.716-727, 2008.
- [33] KARRAY F. , W. Gueaieb, S. Al-Sharhan, "The Hierarchical Expert Tuning of PID Controllers Using Tools of Soft Computing", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B*, Vol.35, No.6, 1283-1294, 2005.
- [34] KASAC J., B.Novakovic, D.Majetic, and D.Brezak, "Global Positioning of Robot Manipulators With Mixed Revolute and Prismatic Joints", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.51, No.6, 1035-1040, 2006.
- [35] KELLY R., "PD control with desired gravity compensation of robotic manipulators: A review", *International Journal of Robotics Research*, Vol. 16, No.5, pp. 660-672 , 1997.
- [36] KELLY R., "Global Positioning of Robot Manipulators via PD Control Plus a Class of Nonlinear Integral Actions", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.43, No.7, 934-938, 1998.
- [37] KELLY R., V.Santibáñez, L.Perez, "*Control of Robot Manipulators in Joint Space*", Springer-Verlag London, 2005.



- [38] KELLY R, "A tuning procedure for stable PID control of robot manipulators", *Robotica*, 13, pp.141-148, 1995.
- [39] KRISTIANSOON B. and Lennartsson, B., "Robust and optimal tuning of PI and PID controllers", *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, 149 (1), pp.17-25, 2002.
- [40] LEWIS, F.L., Liu, K. and Yesildirek, A., "Neural net robot controller with guaranteed tracking performance", *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 6, no. 3, pp. 703–715, 1995.
- [41] LEWIS, F.L., Dawson, D.M. and Abdallah, C.T., "*Robot Manipulator Control: Theory and Practice*", Marcel Dekker, Inc, New York, NY 10016, 2004.
- [42] LEWIS F.L., "Nonlinear Network Structures for Feedback Control", *Asian Journal of Control*, vol. 1, no. 4, pp.205–228,1999.
- [43] LI H-X., L.Zhang, K-Y.Cai, G.Chen, "An Improved Robust Fuzzy-PID Controller With Optimal Fuzzy Reasoning", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B*, Vol.35, No.6, 1283-1294, 2005.
- [44] LI C.J., "An efficient method for linearization of dynamic models of robot manipulators", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Volume: 5 Issue: 4, pp.397-408, 1989.
- [45] LORETO Gomez Gerardo, "*Visual Servoing con compensación utilizando Redes Neuronales*"(Tesis de Maestría). Departamento de Control Automático, CINVESTAV-IPN, Junio 2002.
- [46] MANN G. K. I., B-G. Hu, R.G. Gosine, "Two-Level Tuning of Fuzzy PID Controllers ", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B*, Vol.31, No.2, 263-269, 2001.
- [47] NUNES E.V. L., L.Hsu, F.Lizarralde, "Arbitrarily small damping allows global output feedback tracking of a class of Euler-Lagrange systems", *2008 American Control Conference*,, Seattle, USA, 378-382, 2008

- [48] O'DWYER A., "*Handbook of PI and PID Controller Tuning Rules*", Imperial College Press, London , 2006.
- [49] ORTEGA R., A.Loria, R.Kelly, "A Semiglobally Stable Output Feedback PI<sup>2</sup>D Regulator for Robot Manipulators", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.40, No.0, 1432-1436, 1985.
- [50] PADEN B., R.Panja, "Globally asymptotically stable PD+ controller for robot manipulators", *International Journal of Control*, Vol. 47, No. 6, 1697–1712 , 1988.
- [51] PARRA-Vega, S.Arimoto, Y.-H.Liu,G.Hirzinger, P.Akella, "Dynamic Sliding PID Control for Tracking of Robot Manipulators: Theory and Experiments", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol.19, No.6, 967-976, 2003.
- [52] POZNYAK A., E.N. Sanchez, W.Yu., "*Differential Neural Networks for Robust Nonlinear Control, Identification, State Estimation and Trajectory Tracking*", World Scientific Publishing, 2001.
- [53] QU Z., D.M. Dawson, S. Y. Lim, J.F. Dorsey, "A New Class of Robust Control Laws for Tracking of Robots ", *International Journal of Robotics Research*, Vol. 13, No.4, 355–363 , 1994.
- [54] Rocco, P., "Stability of PID control for industrial robot arms", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol.12, No.4 , pp.606-614, 1996.
- [55] SALDAÑA S. S., "*Diseño, construcción y control de un prototipo de cadena cinemática abierta experimental de dos grados de libertad*"(Tesis de Maestría), Departamento de Control Automático, CINVESTAV-IPN, Junio 1999.
- [56] SCOTT G.M., J. W.Shavlik, W. H. Ray, "Refining PID Controllers Using Neural Networks", *Neural Computation*, Vol. 4, No. 5, 746-757, 1992.
- [57] SHINSKEY F.G., "*Process Control Systems - Application, Design and Tuning*", McGraw-Hill Inc., New York , 1996.

- [58] SLOTINE J. J., W.Li, "Adaptive manipulator control: A case study", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.33, No.11, 995–1003, 1988.
- [59] SPONG M. Vidyasagar and S. Hutchinson. "Robot Modeling and Control". John Wiley and Sons, 2006.
- [60] SUN D., S.Hu, X.Shao, and C.Liu, "Global Stability of a Saturated Nonlinear PID Controller for Robot Manipulators", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol.17, No.4, 892-899, 2009.
- [61] SUN Y.L. and Er, M.J., "Hybrid fuzzy control of robotics systems", *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 12, no. 6, pp.755-765, 2004.
- [62] SUZUKI K., I.Horina and N.Sugie, "A Simple Neural Network Pruning Algorithm with Application to Filter Synthesis", *Neural Processing Letters*, Vol.13, 43-53, 2001.
- [63] SWARP, A. and Gopal, M., "Comparative study on linearized robot models", *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, Volume 7, Number 3, pp.287-297, 1993
- [64] TOMEI P., "Adaptive PD Controller for Robot Manipulators", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 7, No. 4 , 565-570,1991.
- [65] UANG H. J. and C. C. Lien, "Mixed H<sub>2</sub>/H<sub>∞</sub> PID tracking control design for uncertain spacecraft systems using a cerebellar model articulation controller", *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, vol. 153, no. 1, pp. 1–13, 2006.
- [66] VISIOLI A. , "Modified anti-windup scheme for PID controllers", *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, Vol.161, No 1., 49-54, 2003.
- [67] WANG Q.G., Zhang, Y. and Guo, X., "Robust closed-loop identification with application to auto-tuning", *Journal of Process Control*, 11, pp. 519-530, 2001
- [68] YU D-Li, T. K. Chang, D-W.Yu, "Fault Tolerant Control of Multivariable Processes Using Auto-Tuning PID Controller", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B*, Vol.35, No.1, 32-43, 2005.

- [69] YU W. and Rosen J., "A Novel Linear PID Controller for an Upper Limb Exoskeleton", *49th IEEE Conference on Decision and Control, CDC'10*, Atlanta, USA, pp.3548-3553.
- [70] YU W. and Li X., "A Systematic Tuning Method of PID Controller for Robot Manipulators", *9th IEEE International Conference on Control & Automation, ICCA11*, Santiago Chile, pp.274-279.
- [71] Alexander S.Poznyak, Wen Yu, Edgar N. Sanchez, Jose P. Perez, Nonlinear Adaptive Trajectory Tracking Using Dynamic Neural Networks, *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol.10, No.6, 1402-1411,1999.
- [72] Xiaou Li and Wen Yu, Anti-swing control for an overhead crane with fuzzy compensation, *Intelligent Automation and Soft Computing*, Vol.18, No.1,1-11, 2012
- [73] ZIEGLER J. G. and Nichols N. B., "Optimum settings for automatic controllers", *Trans. ASME*, vol 64, pp.759-768.