

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS
AVANZADOS DEL IPN

DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

**Control Neuronal para un Robot Manipulador con
Compensación de Dinámicas no Modeladas.**

TESIS QUE PRESENTA EL

Ing. José Antonio Heredia Huerta *

PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS EN LA ESPECIALIDAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

DIRECTORES DE TESIS:

**Dr. Wen Yu Liu
Dr. Alexander S. Poznyak**

México, D.F., 14 de diciembre de 1999

* Becario del CONACyT

Contenido

- 1 Introducción. 8**
- 1.1 Antecedentes. 8
- 1.2 Motivación de la tesis. 10
- 1.3 Estructura de la tesis. 13
- 2 Preliminares. 15**
- 2.1 Dinámica de los robots manipuladores. 15
 - 2.1.1 Método de Euler-Lagrange. 16
 - 2.1.2 Método de Newton-Euler. 17
- 2.2 Dinámica de un robot manipulador rígido, planar, rotacional, de dos grados de libertad. 20
 - 2.2.1 Método de Euler-Lagrange. 20
 - 2.2.2 Método de Newton-Euler. 22
- 2.3 Valores numéricos de un robot manipulador. 28
- 2.4 Propiedades estructurales de las ecuaciones dinámicas del robot manipulador. 29
 - 2.4.1 Propiedades de la matriz de inercia $M(\theta)$ 29
 - 2.4.2 Propiedades de la matriz de coriolis $C(\theta, \dot{\theta})$ 31
 - 2.4.3 Propiedades de la matriz de gravedad $G(\theta)$ 33
 - 2.4.4 Propiedades de la matriz de fricción $F(\dot{\theta})$ 33
- 2.5 Redes neuronales. 34
 - 2.5.1 Modelo de una neurona. 34
 - 2.5.2 Estructuras de las redes neuronales. 39
- 2.6 Sistemas Singularmente Perturbados. 45
 - 2.6.1 El modelo estándar de los sistemas singularmente perturbados. 46

2.6.2	Propiedades de las dos escalas de tiempo del modelo estándar de los sistemas singularmente perturbados.	47
3	Control PD con observador de alta ganancia.	52
3.1	El observador de alta ganancia.	53
3.2	El control PD y el observador de alta ganancia.	55
3.3	Análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado.	57
3.3.1	Enfoque de Lyapunov.	57
3.3.2	Enfoque de sistemas singularmente perturbados.	59
3.4	Simulaciones.	66
3.4.1	Aplicación de la teoría a un robot manipulador de dos grados de libertad.	66
3.4.2	Comparación en laboratorio del observador de alta ganancia.	69
3.5	Comentario final.	76
4	Control PD con compensación neuronal.	77
4.1	Compensación neuronal.	78
4.2	Estructura del control PD y de la compensación neuronal.	80
4.3	Simulaciones.	84
4.3.1	Valores de las ganancias del control y de los parámetros de la red neuronal.	84
4.3.2	Resultados de las simulaciones para el seguimiento de las trayectorias.	85
4.4	Comentario final.	87
5	Control PD con compensación neuronal y observador de alta ganancia.	88
5.1	El control PD con compensación neuronal y el observador de alta ganancia.	89
5.2	Análisis del sistema mediante perturbaciones singulares.	92
5.2.1	Análisis de estabilidad del sub-sistema lento y del sub-sistema rápido.	93
5.2.2	Análisis de estabilidad del sistema completo.	95
5.3	Simulaciones.	102
5.3.1	Valores de las ganancias del control y parámetros de la red neuronal.	102
5.3.2	Cálculo de la cota superior del parámetro ϵ del observador de alta ganancia.	103
5.3.3	Resultados de las simulaciones para el seguimiento de trayectorias.	105
5.4	Comentario final.	108

6 Conclusiones.	110
7 Apéndices.	113
7.1 Apéndice A. Prueba de la condición de Lipschitz, [31].	113
7.2 Apéndice B. Sobre el control PD compensado, [3].	115
7.3 Apéndice C.	116

Índice de Figuras

2-1	Cuerpo rígido acelerado por \dot{v}_c	17
2-2	Cuerpo rígido rotando.	18
2-3	Robot Manipulador.	20
2-4	Esquema de una neurona biológica.	35
2-5	Modelo no-lineal de una neurona.	35
2-6	Tabla de funciones no lineales.	37
2-7	Primera función de umbral.	37
2-8	Segunda función de umbral.	38
2-9	Función Sigmoide.	38
2-10	Función tangente hiperbólica.	38
2-11	Función gaussiana.	39
2-12	Perceptrón multicapa.	41
2-13	Esquema de una red neuronal dinámica.	44
2-14	Sistemas dinámicos y estáticos equivalentes.	44
3-1	Polinomio de ϵ	68
3-2	Velocidad del robot y del observador.	68
3-3	Posición del robot.	69
3-4	Velocidad del robot y del observador con la perturbación.	69
3-5	Posición del robot con la perturbación.	70
3-6	Tabla de tiempos de la tarjeta MultiQ-3.	71
3-7	Velocidad vista por los dos observadores y el tacómetro.	73
3-8	Velocidad real.	74
3-9	Salida del observador de alta ganancia.	74
3-10	Seguimiento de trayectorias con la velocidad real.	75
3-11	Seguimiento de trayectoria usando el observador de alta ganancia.	75

3-12	Seguimiento de trayectoria usando el observador de Luenberguer.	75
4-1	Posiciones para el primer eslabón.	85
4-2	Posiciones para el segundo eslabón.	86
4-3	Error de seguimiento del primer eslabón.	86
4-4	Error de seguimiento del segundo eslabón.	86
5-1	Polinomio de ϵ	104
5-2	Seguimiento del primer eslabón.	105
5-3	Seguimiento del segundo eslabón.	105
5-4	Error de seguimiento del primer eslabón.	106
5-5	Error de seguimiento del segundo eslabón.	106
5-6	Índice de desempeño del primer eslabón.	107
5-7	Índice de desempeño del segundo eslabón.	107
5-8	Comportamiento del peso de un nodo en la capa oculta de la red neuronal. .	107
5-9	Comportamiento del peso de un nodo en la capa oculta de la red neuronal. .	108

Capítulo 1

Introducción.

1.1 Antecedentes.

De los robots manipuladores que existen en la industria, un gran número de ellos están equipados con un control proporcional-derivativo (control PD) el cual, además de tener una estructura sencilla y de fácil implementación (aunque el proceso de sintonizar las ganancias proporcional y derivativa puede ser complicado y en muchos casos requiera de la experiencia o experimentación), es capaz de posicionar de manera precisa al robot en cualquier punto dentro de su espacio de trabajo. Varias versiones de éste control han sido estudiadas e implementadas por [21], [22].

Sin embargo, el control PD es incapaz de hacer que el manipulador siga una trayectoria continua variante en el tiempo (una trayectoria cuyos valores cambien constantemente de manera continua) sin que se presente un error de seguimiento. Esta falta de precisión en el seguimiento de las trayectorias hace que el robot no pueda realizar tareas como el maquinado de piezas, donde la precisión con que se guía la herramienta de corte es muy importante. Obviamente, se reduce el número de aplicaciones que un robot, equipado con un control PD, es capaz de hacer.

Los estudios realizados sobre éste control muestran que es necesario añadir al control PD términos adicionales de compensación o de pre-alimentación para poder garantizar que el robot siga una trayectoria variante y continua en forma precisa, [24] y [3]. Dichos términos de compensación deben contemplar los efectos de la gravedad, la fricción no lineal y las dinámicas no modeladas del manipulador.

La otra desventaja del control PD es la medición de la velocidad de cada eslabón del

manipulador, lo cual introduce la necesidad de equipar al robot con sensores de velocidad además de los sensores de posición. Los sensores de velocidad son llamados tacómetros y presentan las desventajas de entregar la medición de la velocidad contaminada con ruido [23] y de ser muy costosos, por el contrario, los sensores de posición, conocidos como "encoders", están ampliamente difundidos y cualquier sistema que presente movimiento requiere de ellos. Es así, que al equipar al robot con ambos sensores, en cada eslabón, se encarece su costo de venta y de mantenimiento.

En base en los argumentos anteriores, es posible concluir que el control PD presenta las dos desventajas siguientes:

1. Se requiere la medición de la velocidad de cada eslabón del robot.
2. Es necesario compensar la gravedad, la fricción no lineal y las dinámicas no modeladas para que el robot pueda seguir una trayectoria.

Para resolver las desventajas anteriores, se hace uso de las siguientes técnicas: implementar un observador para estimar la velocidad de los eslabones en base a la medición de la posición únicamente. Y estimar los términos que modelan los efectos de la gravedad en el robot, de la fricción no lineal y de las dinámicas no modeladas, para incluirlas después en el control.

En el caso de los observadores para los robots manipuladores, existen dos enfoques: aquellos que hacen uso de la dinámica del sistema y aquellos que son independientes de ella. Los primeros necesitan conocer la dinámica del manipulador en forma total o parcial, por ejemplo: un observador usando modos deslizantes fue propuesto en [14] donde la matriz de inercia debe ser conocida. De igual forma, un observador basado en la teoría de sistemas adaptables fue propuesto en [15] y otro basado en métodos de pasividad en [16]. Por su parte, los observadores independientes de la dinámica del robot no requieren conocerla en forma alguna, siendo los de alta ganancia los más populares [17]. Recientemente, observadores independientes de la dinámica del robot han sido desarrollados con ayuda de redes neuronales, como en el trabajo de [23]. Tales observadores requieren conocer una cota sobre la matriz de inercia de la dinámica del robot y no su estructura exacta.

Por lo que se refiere al problema de compensación, existen varios trabajos: si los parámetros del término de gravedad del robot son desconocidos [26] propone una versión del control PD usando control adaptable, [25] garantiza la estabilidad global asintótica (del sistema

robot-control) empleando compensación discontinua de gravedad. Otro enfoque es el control PID (proporcional-derivativo-integral) que no requiere conocer la dinámica del robot en forma alguna; pero que carece de una prueba que garantice la estabilidad global asintótica, además de que el término integral puede crecer demasiado afectando el desempeño del robot [13]. Finalmente, en [24] y [27] se pre-alimenta al robot con términos integrales para garantizar la estabilidad global asintóticamente del control PD.

Un enfoque completamente distinto a los anteriores se presenta en [23], donde se emplean redes neuronales para estimar la velocidad del manipulador y para disminuir el error de seguimiento, es decir, no añade términos de compensación al control PD sino que se enfoca directamente en disminuir el error de seguimiento.

1.2 Motivación de la tesis.

Aún cuando las dos desventajas del control PD ya han sido estudiadas ampliamente e implementadas exitosamente un gran número de veces, esta tesis tiene como objetivo proponer un control que enriquezca dichas opciones, brindando una solución para las dos desventajas del control PD.

Primeramente, el control PD tiene la gran ventaja de ser independiente de la dinámica del manipulador. Así que, para no perder dicha ventaja se implementará un observador que sea independiente de la dinámica del robot. Tales observadores pueden ser: los de alta ganancia, los que usan redes neuronales, etc. Pero si se considera que la velocidad del manipulador corresponde a la derivada de la posición y que los observadores de alta ganancia estiman la derivada de los estados del sistema que se esté observando, la decisión de considerar un observador de alta ganancia, para estimar la velocidad del manipulador, se justifica por sí misma. Resta solamente seleccionar la estructura de la dinámica de dicho observador, para lo cual se hace uso de [17]. En ese trabajo, la dinámica del observador de alta ganancia no es muy compleja y además ofrece una prueba de que el observador estima con error cero los estados de cualquier sistema no-lineal para el cual exista un control capaz de hacer que sus estados sigan una trayectoria, continua y acotada, sin error. Para un robot manipulador, un control PD compensado o pre-alimentado es capaz de garantizar lo anterior, así que el observador de alta ganancia propuesto en [17] es la elección que ésta tesis toma.

Como argumento extra, el trabajo de [17] hace uso de un sistema no-lineal en general y no hace referencia explícita al robot manipulador ni al control PD compensado o pre-

alimentado. Posteriormente, el mismo autor propone en [18] el uso del mismo observador enfocado a un robot manipulador con articulaciones flexibles; pero no propone una prueba formal ni tampoco hace referencia de los controles PD compensados o pre-alimentados. Esta tesis desarrolla una prueba formal de estabilidad, en el sentido de Lyapunov, del sistema robot-observador-control.

Con respecto al observador de alta ganancia, nunca se establece el valor que el parámetro de alta ganancia puede tomar, dejándolo a que debe ser muy pequeño y que entre más pequeño mejor. En ese sentido, esta tesis plantea una prueba adicional de estabilidad en el sentido de Lyapunov, del mismo sistema robot-observador-control; pero usando un enfoque de sistemas singularmente perturbados basado en el trabajo de [20]. Con dicho enfoque, se garantiza la estabilidad asintótica del sistema en lazo cerrado y se obtiene una fórmula para calcular el valor máximo que el parámetro de alta ganancia puede tomar. Dicha fórmula también tiene la interpretación de una condición necesaria para la implementación del observador de alta ganancia a un robot manipulador y el control PD.

Es así, que el observador de alta ganancia propuesto en [17] puede retroalimentar la velocidad del manipulador al control PD, manteniendo la independencia de la dinámica del manipulador.

Por otro lado, y con respecto a la pre-alimentación del control PD, en [3] se determinan los términos que deben de incluirse en la pre-alimentación del control PD para garantizar que el manipulador pueda seguir una trayectoria (continua y acotada) con cero error. El teorema es el siguiente:

Teorema 1.1 *La ley de control:*

$$\tau = M(q) \ddot{\bar{q}}^d + C(q, \dot{q}) \dot{\bar{q}}^d + P(q, \dot{q}) - K_p \bar{q} - K_d \dot{\bar{q}}$$

aplicada al sistema:

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + P(q, \dot{q}) = \tau$$

resulta en un error de seguimiento, \bar{q} , cero. Donde K_p y K_d son matrices constantes definidas positivas, (q, \dot{q}) son los ángulos de rotación de las articulaciones del robot (posición y velocidad), $\bar{q} = q - q^d$, $\dot{\bar{q}} = \dot{q} - \dot{q}^d$ y q^d la trayectoria deseada.

Observación 1.1 *La prueba de éste teorema se muestra en el Apéndice B al final de esta*

tesis.

Al igual que con el observador, el control PD debe seguir siendo independiente de la dinámica del robot y al mismo tiempo incluir los términos de compensación o de pre-alimentación necesarios. Por ello, se ha elegido usar una red neuronal para estimar los términos de compensación.

En [40] se muestra la capacidad de las redes neuronales de aproximar una función no-lineal con cualquier exactitud.

De toda la gama de redes neuronales existentes, se ha elegido una red neuronal dinámica de funciones radiales básicas porque requiere de un menor número de neuronas. Las redes de funciones radiales básicas se pueden implementar con una sólo capa oculta y siendo una red dinámica requiere de pocas neuronas en dicha capa oculta, además, al tener una función de activación no-lineal se mejora la aproximación de cualquier función no lineal, Cover (1965).

Éste enfoque ha sido estudiado por [23] y [28]; pero la red neuronal se usa para disminuir el error de seguimiento, dejando al control PD sin compensación o pre-alimentación. En esta tesis, la red neuronal sólo aproxima los términos de la compensación y no del error de seguimiento, el cual es resultado de la dinámica conjunta del robot y el control PD. Es decir, en esta tesis se pretende que la red neuronal estime una dinámica menos compleja que la resultante del error de seguimiento.

Al igual que en los trabajos de [23] y [28], se obtienen las ventajas de una red neuronal que no requiere de entrenamiento previo ni de pesos iniciales específicos.

Finalmente, es necesario unir al observador de alta ganancia con la red neuronal para obtener un control PD sin las dos desventajas mencionadas al inicio (la medición de la velocidad y los términos de compensación) y llegar al resultado principal de esta tesis. Como se muestra en el capítulo 5, la teoría de sistemas singularmente perturbados permite aprovechar el estudio del observador y de la red neuronal para concluir que el sistema completo es estable.

Observación 1.2 *Se puede ver que la unión de los tres elementos (el control PD, el observador y la red neuronal) permanecen independientes de la dinámica del robot y al mismo tiempo son una solución más a las dos desventajas que el control PD tiene y que fueron expuestas al inicio.*

Observación 1.3 *La estructura del observador [17] y su aplicación a robots manipuladores fue propuesto en [18] (usando el enfoque de sistemas singularmente perturbados). Sin em-*

bargo, no se presenta una prueba formal. Éste trabajo llena ese hueco, con una prueba basada en el trabajo [20].

1.3 Estructura de la tesis.

Capítulo 2: *Preliminares.* Primero se presenta una breve descripción del cálculo de la dinámica de un robot manipulador de n eslabones rígidos, empleando el método de Newton-Euler y el de Euler-Lagrange. Posteriormente, se muestran las propiedades más importantes que la dinámica del manipulador posee y que serán empleadas a lo largo de toda la tesis. Debido a que la teoría desarrollada en esta tesis será ejemplificada con simulaciones, se calculan los valores numéricos de un robot manipulador particular.

Como segundo punto, se ofrece un panorama básico del desarrollo y estructura de las redes neuronales. Se muestra la estructura de las redes neuronales biológicas (RNB). Y después se discuten diferentes estructuras de las redes neuronales artificiales, como los son: de una capa, multicapa, de funciones radiales básicas, etc. Se hace énfasis en las características y ventajas de las redes neuronales de funciones radiales básicas.

Para terminar éste capítulo, se exponen los conceptos más importantes de la teoría de los sistemas singularmente perturbados: la forma en que éste análisis se lleva acabo, la estructura que presenta el sub-sistema lento y el rápido, las condiciones que se tienen que satisfacer para garantizar que el análisis sea adecuado. Y se presenta el teorema de Tikhonov.

Capítulo 3: *Observador de alta ganancia.* Se inicia presentando la estructura del observador de alta ganancia propuesto en [17] y el control PD pre-alimentado a utilizar. Después, se calcula el sistema en lazo cerrado (robot, observador y control) para obtener como punto de equilibrio al error de observación. Un análisis de estabilidad, en el sentido de Lyapunov, muestra que el sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable y permite encontrar una cota superior sobre el parámetro de alta ganancia del observador. Esta cota se traduce en una condición necesaria para poder usar éste observador en un robot manipulador. En el mismo análisis de estabilidad, se muestra también al sistema en lazo cerrado como dos sub-sistemas escalas de tiempo distintas: una rápida y otra lenta, para entender mejor las propiedades del observador de alta ganancia. Por último, las simulaciones muestran como la dinámica del observador es más rápida que la dinámica del robot-control. Hasta aquí, se ha resuelto el problema de medición de la velocidad del control PD.

Capítulo 4: *Red neuronal de funciones radiales básicas.* Se presenta la estructura de la

red neuronal a usar (una red de funciones radiales básicas) y la forma en que estimará los términos a compensar. En seguida, se define el error de seguimiento, siendo éste el punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado del robot y del control. Al realizar el análisis de estabilidad, en el sentido de Lyapunov, se determina la dinámica de las leyes de aprendizaje de la red neuronal y se muestra la estabilidad del sistema completo. Se puede ver que el control propuesto es independiente de la dinámica del robot y que no requiere de entrenamiento previo. Cabe mencionar, que se está haciendo uso de la velocidad del robot y no del observador. La parte final la constituyen las simulaciones del control PD, compensado con la red neuronal, en un robot manipulador.

El trabajo de éste capítulo fue sujeto a revisión y aceptado en el *International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN'99)*.

Capítulo 5: *Control PD con compensación neuronal y el observador de alta ganancia.* Es aquí donde se aplican conjuntamente los dos resultados anteriores: el sistema en lazo cerrado del robot, el control PD, la red neuronal y el observador de alta ganancia, siendo el error de observación y el error de seguimiento el punto de equilibrio del sistema completo en lazo cerrado. Al igual que en los capítulos anteriores, el análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov; pero haciendo uso de la teoría de sistemas singularmente perturbados; garantiza la estabilidad del sistema completo y determina la dinámica de las leyes de aprendizaje de la red. Como era de esperarse, las leyes de aprendizaje cambian con la inclusión del observador haciendo necesario conocer una cota sobre la matriz de inercia de la dinámica del robot. El resto de las propiedades de la red neuronal y del observador permanecen iguales. Otra consecuencia son 3 condiciones necesarias para poder aplicar el control y el observador a un robot manipulador. Por último, se presentan los resultados de las simulaciones de la teoría desarrollada.

Capítulo 6: *Conclusiones.* Se detallan los resultados obtenidos en la tesis, como son: (1) un control que sólo requiere conocer una cota sobre la matriz de inercia del manipulador, de fácil implementación, (2) un observador independiente de la dinámica del robot, (3) una red neuronal pequeña que no requiere de entrenamiento previo.

El sistema estudiado está conformado por el robot manipulador [26], el observador de alta ganancia [17] y el control PD compensado con una red neuronal.

La existencia de 3 condiciones necesarias, que se deben satisfacer, para garantizar la estabilidad del sistema.

Capítulo 2

Preliminares.

2.1 Dinámica de los robots manipuladores.

Se debe entender por dinámica a las ecuaciones de movimiento del manipulador, es decir, la manera en que el manipulador se mueve como consecuencia de fuerzas externas aplicadas a cada eslabón. La dinámica está constituida por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden no lineales, que dependen de las propiedades cinemáticas e inerciales del robot.

La dinámica del manipulador presenta dos enfoques: el primero, considera un punto dentro de una trayectoria dada (en el área de trabajo del manipulador) determinado por θ , $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$ y se desea encontrar el vector de torques τ necesario para satisfacer la ecuación dinámica. Este enfoque es útil para posicionar al manipulador en cualquier punto de su área de trabajo. El segundo, calcula los movimientos del manipulador θ , $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$ como resultado de un vector de torques dado. Este enfoque es útil para simular al robot.

Existen dos métodos para calcular la dinámica de un manipulador: el de *Euler-Lagrange* y el de *Newton Euler*. Ambos métodos, aunque distintos, son completamente equivalentes y para el caso de los manipuladores considerados en esta tesis, dan como resultado el mismo conjunto de ecuaciones diferenciales.

Observación 2.1 *En el contexto de esta tesis se tratará con manipuladores rígidos, planares, con articulaciones rotacionales y una rotación por cada articulación. Se asumirá, también, rigidez en los eslabones y en las articulaciones. El robot consta de n grados de libertad y sensores de posición únicamente (a menos que se indique lo contrario).*

2.1.1 Método de Euler-Lagrange.

Aunque en principio, las ecuaciones dinámicas pueden obtenerse sumando todas las fuerzas en cada eslabón del manipulador, en el método de Euler-Lagrange sólo es necesario calcular la energía cinética y potencial del sistema, dejando a un lado el tener que sumar las fuerzas inerciales, las de coriolis, las centrífugas, las de los actuadores y todas las otras fuerzas que pudieran estar actuando en cada articulación del robot.

Para escribir las ecuaciones de movimiento, es necesario definir el Lagrangiano, L , como la diferencia entre la energía cinética y la potencial del sistema, es decir [3]:

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q)$$

donde T es la energía cinética y V es la energía potencial del robot, ambos escritos en coordenadas generalizadas de posición q y de velocidad \dot{q} . Para el caso de los robots manipuladores con eslabones rígidos, las coordenadas generalizadas (q, \dot{q}) son los ángulos de rotación de las articulaciones del robot (posición y velocidad). Estos ángulos determinan de manera única la posición de todos los eslabones que componen al robot.

El siguiente teorema establece la forma de calcular las ecuaciones dinámicas para un robot manipulador:

Teorema 2.1 ([3]) *Las ecuaciones de movimiento para un sistema mecánico con coordenadas generalizadas $q \in R^n$ y el lagrangiano L , están dadas por:*

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} - \frac{\delta L}{\delta q_i} = \tau_i \quad (2.1)$$

donde $i = 1, \dots, n$ y τ_i es una fuerza externa que actúa en la i -ésima coordenada generalizada.

La ecuación (2.1) se denomina *Ecuación de Lagrange* y en forma vectorial se escribe como:

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{q}} - \frac{\delta L}{\delta q} = \tau$$

donde $\frac{\delta L}{\delta q}$, $\frac{\delta L}{\delta \dot{q}}$ y τ son vectores fila; pero por conveniencia de notación se escriben como vectores columna. τ son los torques producidos por los actuadores y el punto denota derivada con respecto al tiempo.

Una prueba del teorema anterior puede encontrarse en libros de dinámica de sistemas mecánicos, por ejemplo [4].

La ecuación de lagrange es una formulación elegante de la dinámica de un sistema mecánico. Reduce el número de ecuaciones necesarias para describir el movimiento del sistema de m , el número de partículas del sistema, a n , el número de coordenadas generalizadas, si tal es el caso.

2.1.2 Método de Newton-Euler.

En éste método se considera cada eslabón del manipulador como un cuerpo rígido. Si de éste cuerpo rígido se conoce dónde se localiza su centro de masa y el valor de su tensor de inercia, se puede caracterizar completamente la distribución de su masa. Por su parte, para mover los eslabones es necesario acelerarlos o desacelerarlos y la fuerza necesaria para lograr lo anterior está en función de la aceleración deseada y de la distribución de masa de los eslabones. Las ecuaciones de Newton junto con su análogo rotacional, la ecuación de Euler, describe la relación entre las fuerzas, las inercias y las aceleraciones del manipulador.

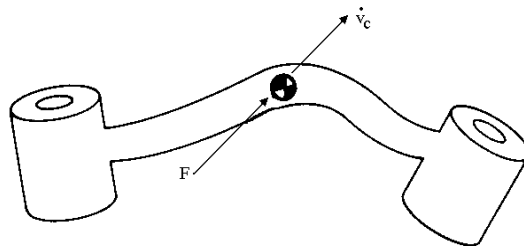


Figura 2-1: Cuerpo rígido acelerado por \dot{v}_c

La figura 2-1 muestra un cuerpo rígido cuyo centro de masa está siendo acelerado por \dot{v}_c . En esta situación, la fuerza F que actúa en el centro de masa está dada por:

$$F = m \dot{v}_c$$

donde m es la masa total de cuerpo rígido.

La figura 2-2 muestra un cuerpo rígido rotando con velocidad angular w y aceleración angular \dot{w} . El momento N , que debe de estar actuando en el cuerpo para producirle dicha

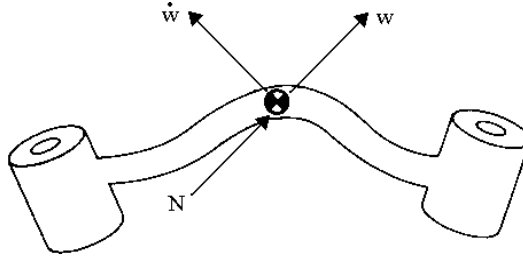


Figura 2-2: Cuerpo rígido rotando.

rotación, está dado por la ecuación de Euler:

$$N = I_c \dot{w} + w \times I_c w$$

donde I_c es el tensor de inercia del cuerpo rígido con respecto a un eje de coordenadas C , cuyo origen está situado en su centro de masa.

Para calcular los torques que corresponden al manipulador, cuando sigue una trayectoria, es necesario asumir que se conoce la posición, velocidad y aceleración de los eslabones $(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})$. Y con esto y el conocimiento de la cinemática y la distribución de masa del robot es posible calcular los torques necesarios para que el manipulador siga dicha trayectoria.

A continuación se presenta el algoritmo de Newton-Euler publicado por Luh, Walker y Paul en [5].

Primero se calculan las velocidades y las aceleraciones de cada eslabón en forma iterativa empezando por el eslabón 1 y hacia el eslabón final n , aplicando las ecuaciones de Newton-Euler en cada eslabón.

En el segundo paso, se calculan las fuerzas y los torques debidos a la interacción de los eslabones, así como los torques que deben de aplicar los actuadores. Esto, de manera recursiva, comenzando por el eslabón n al primer eslabón 1.

Las ecuaciones de éste proceso iterativo, para un manipulador con articulaciones rotacionales, son:

Primer paso ($i = 0$ a n),

$$\begin{aligned}
{}^{i+1}w_{i+1} &= {}^i R^{i+1} w_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1} \widehat{Z}_{i+1} \\
{}^{i+1} \dot{w}_{i+1} &= {}^i R^{i+1} \dot{w}_i + {}^{i+1} R^{i+1} w_i \times \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1} \widehat{Z}_{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1} {}^{i+1} \widehat{Z}_{i+1} \\
{}^{i+1} \dot{v}_{i+1} &= {}^i R^{i+1} (\dot{w}_i \times {}^i P_{i+1} + w_i \times ({}^i w_i \times {}^i P_{i+1})) + \dot{v}_i \\
{}^{i+1} \dot{v}_{C_{i+1}} &= {}^{i+1} \dot{w}_{i+1} \times {}^{i+1} P_{C_{i+1}} + {}^{i+1} w_{i+1} \times ({}^{i+1} w_{i+1} \times {}^{i+1} P_{C_{i+1}}) + {}^{i+1} \dot{v}_{i+1} \\
{}^{i+1} F_{i+1} &= m_{i+1} {}^{i+1} \dot{v}_{C_{i+1}} \\
{}^{i+1} N_{i+1} &= {}^{C_{i+1}} I_{i+1} {}^{i+1} \dot{w}_{i+1} + {}^{i+1} w_{i+1} \times {}^{C_{i+1}} I_{i+1} {}^{i+1} w_{i+1}
\end{aligned}$$

Segundo paso ($i = n$ a 1),

$$\begin{aligned}
{}^i f_i &= {}^i R^{i+1} f_{i+1} + {}^i F_i \\
{}^i n_i &= {}^i N_i + {}^i R^{i+1} n_{i+1} + {}^i P_{C_i} \times {}^i F_i + {}^i P_{i+1} \times {}^i R^{i+1} f_{i+1} \\
\tau_i &= {}^i n_i^T {}^i \widehat{Z}_i
\end{aligned}$$

donde:

m_i - masa del eslabón i .

${}^i v_j$ - velocidad lineal del eslabón j , medido desde el eje coordenado situado en el eslabón i .

${}^i w_j$ - velocidad angular del eslabón j , medido desde el eje coordenado situado en el eslabón i .

${}^i R$ - matriz de rotación de la matriz de transformación de Denavit-Hartenberg de i a j .

θ_i - ángulo articular desde el eje x_{i-1} al eje x_i alrededor del eje z_{i-1} .

${}^i \widehat{Z}_i$ - proyección en el eje z del sistema coordenado situado en i .

${}^i P_j$ - vector de posición de la matriz de transformación de Denavit-Hartenberg de i a j .

${}^i v_{C_i}$ - velocidad lineal del centro de masa del eslabón j , medido desde el eje coordenado situado en el eslabón i .

${}^i f_i$ - fuerza ejercida en el eslabón i debido al eslabón $i - 1$.

${}^i F_i$ - suma de fuerzas lineales en el eslabón i .

${}^i N_i$ - suma de torques en el eslabón i .

${}^i n_i$ - torque ejercido en el eslabón i debido al eslabón $i - 1$.

τ_i - torque requerido (el que los actuadores proporcionarán) en el eslabón i .

${}^i P_{c_i}$ - vector que localiza el centro de masa del eslabón i .

${}^C_i I_i$ - tensor de inercia en el centro de masa del eslabón i .

2.2 Dinámica de un robot manipulador rígido, planar, rotacional, de dos grados de libertad.

Debido a que esta tesis realiza las simulaciones con un robot manipulador de dos grados de libertad, con eslabones rígidos, con articulaciones rotacionales y planar; se calculará su dinámica asociada haciendo uso de los dos métodos explicados anteriormente. También se verá como ambos métodos resultan en el mismo conjunto de ecuaciones diferenciales.

Se asume que cada eslabón es un péndulo invertido, con toda su masa concentrada en el punto final del eslabón.

La figura 2-3 muestra el esquema de un manipulador de dos grados de libertad, planar y rotacional.

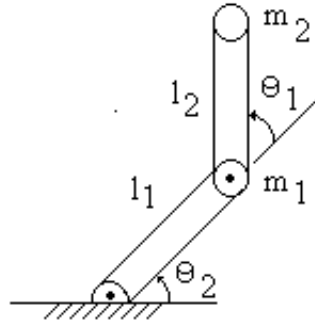


Figura 2-3: Robot Manipulador.

2.2.1 Método de Euler-Lagrange.

Partiendo de que:

$$x_1 = l_1 \cos \theta_1$$

$$y_1 = l_1 \sin \theta_1$$

$$x_2 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

cuyas derivadas son:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \\ \dot{y}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ \dot{x}_2 &= -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 + \theta_2) - l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \dot{y}_2 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)\end{aligned}$$

La energía cinética del sistema queda determinada por:

$$T = \frac{1}{2}m_1 \|V_1\|^2 + \frac{1}{2}m_2 \|V_2\|^2$$

donde:

$$\begin{aligned}\|V_1\| &= \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \\ \|V_2\| &= \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2l_2^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + l_2^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ &\quad + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2\end{aligned}$$

Y la energía potencial del sistema queda determinada por:

$$V = -m_1 g(l_1 - l_1 \sin \theta_1) - m_2 g(l_1 - l_1 \sin \theta_1 + l_2 - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

Luego, el lagrangiano queda determinado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}L = T - V &= \frac{1}{2}m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ &+ m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + m_1 g l_1 - m_1 g l_1 \sin \theta_1 + m_2 g l_1 + m_2 g l_2 - m_2 g l_1 \sin \theta_1 - m_2 g l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)\end{aligned}$$

El cálculo de las derivadas para obtener la ecuación de lagrange (después de reducir

términos mediante identidades trigonométricas) está dado por:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta L}{\delta \theta_1} &= -m_1 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\
\frac{\delta L}{\delta \theta_2} &= -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - m_2 g l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\
\frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}_1} &= m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_1 + 2m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\
\frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}_2} &= m_2 l_2^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \\
\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}_1} &= m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_1 - 2m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\
&\quad + 2m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\
\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}_2} &= m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_1 - 2m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + 2m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 \\
&\quad - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 + m_1 g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\
\tau_2 &= m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 + m_2 g l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

2.2.2 Método de Newton-Euler.

Primero, se calcula el vector que localiza el centro de masa de cada eslabón:

$$\begin{aligned}
{}^1P_{C_1} &= l_1 \hat{X}_1 \\
{}^2P_{C_2} &= l_2 \hat{X}_2
\end{aligned}$$

donde \hat{X}_i denota la coordenada en el eje X del eje de coordenadas localizado en la i -ésima articulación del robot.

Debido a que toda la masa del eslabón se concentra en un punto, no aparece la inercia en el manipulador. Y los tensores de inercia, en el centro de masa de cada eslabón, están

dados por:

$$c_{1I_1} = 0$$

$$c_{2I_2} = 0$$

Dado que no existen fuerzas que actúen en el elemento final del robot, es posible hacer la siguiente consideración:

$$f_3 = 0$$

$$n_3 = 0$$

donde f_3 y n_3 son la fuerza y la torca en el extremo final del segundo eslabón (es decir, donde se encontraría la tercera articulación si hubiese un cuarto eslabón conectado al robot).

La base del robot no gira, por lo tanto:

$${}^0w_0 = 0$$

$${}^0\dot{w}_0 = 0$$

Para incluir la fuerza de gravedad, se considera que:

$${}^0\dot{v}_0 = g \hat{Y}_0$$

donde \hat{Y}_i denota la coordenada en el eje Y del eje de coordenadas localizado en la i -ésima articulación del robot y g es el valor de la fuerza de gravedad.

Las matrices rotacionales entre eslabones consecutivos son:

$${}^0_1R = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_2R = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$${}^1_0R = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2_1R = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora, se realizan los cálculos del primer paso para el eslabón 1:

$${}^1w_1 = \dot{\theta}_1 \hat{Z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$${}^1\dot{w}_1 = \ddot{\theta}_1 \hat{Z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$${}^1\dot{v}_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \sin \theta_1 \\ g \cos \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1\dot{v}_{C_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_1 \dot{\theta}_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g \sin \theta_1 \\ g \cos \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \dot{\theta}_1^2 + g \sin \theta_1 \\ l_1 \ddot{\theta}_1 + g \cos \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1F_1 = \begin{bmatrix} -m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 + m_1 g \sin \theta_1 \\ m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 + m_1 g \cos \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1N_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los resultados del primer paso para el eslabón 2 son:

$$\begin{aligned}
{}^2w_2 &= \overset{\cdot 2}{\theta_2} Z_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\
\dot{{}^2w_2} &= \overset{\cdot\cdot 2}{\theta_2} Z_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\
\dot{{}^2v_2} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_1 \overset{\cdot 2}{\theta_1} + g \sin \theta_1 \\ l_1 \ddot{\theta}_1 + g \cos \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} l_1 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_2 - l_1 \overset{\cdot 2}{\theta_1} \cos \theta_2 + g \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + l_1 \overset{\cdot 2}{\theta_1} \sin \theta_2 + g \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} \\
{}^2\dot{v}_{C_2} &= \begin{bmatrix} 0 \\ l_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_2 - l_1 \overset{\cdot 2}{\theta_1} \cos \theta_2 + g \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + l_1 \overset{\cdot 2}{\theta_1} \sin \theta_2 + g \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} l_1 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_2 - l_1 \overset{\cdot 2}{\theta_1} \cos \theta_2 + g \sin(\theta_1 + \theta_2) - l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + l_1 \overset{\cdot 2}{\theta_1} \sin \theta_2 + g \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} \\
{}^2F_2 &= \begin{bmatrix} m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_2 - m_2 l_1 \overset{\cdot 2}{\theta_1} \cos \theta_2 + m_2 g \sin(\theta_1 + \theta_2) - m_2 l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + m_2 l_1 \overset{\cdot 2}{\theta_1} \sin \theta_2 + m_2 g \cos(\theta_1 + \theta_2) + m_2 l_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} \\
{}^2N_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ahora, el cálculo del segundo paso para el eslabón 2 es:

$$\begin{aligned}
{}^2f_2 &= {}^2F_2 = \begin{bmatrix} m_2l_1 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_2 - m_2l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_2 + m_2g \sin(\theta_1 + \theta_2) - m_2l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ m_2l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + m_2l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 + m_2g \cos(\theta_1 + \theta_2) + m_2l_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)^2 \\ 0 \end{bmatrix} \\
{}^2n_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2l_1l_2 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + m_2l_1l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 + m_2l_2g \cos(\theta_1 + \theta_2) + m_2l_2^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Las ecuaciones del segundo paso para el eslabón 1 son:

$$\begin{aligned}
{}^1f_1 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} m_2l_1 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_2 - m_2l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_2 + m_2g \sin(\theta_1 + \theta_2) - m_2l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ m_2l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + m_2l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 + m_2g \cos(\theta_1 + \theta_2) + m_2l_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)^2 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} -m_1l_1 \dot{\theta}_1^2 + m_1g \sin \theta_1 \\ m_1l_1 \ddot{\theta}_1 + m_1g \cos \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
{}^1n_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2l_1l_2 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + m_2l_1l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 + m_2l_2g \cos(\theta_1 + \theta_2) + m_2l_2^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)^2 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_1l_1g \cos \theta_1 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_2l_1l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \sin \theta_2 + m_2l_1g \sin \theta_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ + m_2l_1l_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos \theta_2 + m_2l_1g \cos(\theta_1 + \theta_2) \cos \theta_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Finalmente, las ecuaciones dinámicas del sistema son:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 (2 \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos \theta_2 + (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 \\
&\quad - 2m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + m_2 l_2 g \cos(\theta_1 + \theta_2) + (m_1 + m_2) l_1 g \cos \theta_1 \\
\tau_2 &= m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_2 + m_2 l_2 g \cos(\theta_1 + \theta_2) + m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Para ver que ambos metodos generan el mismo resultado, basta observar las ecuaciones (2.2) y (2.3).

Estas ecuaciones pueden ser escritas en la siguiente forma matricial:

$$M(\theta) \ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} + G(\theta) = \tau \tag{2.4}$$

que para el caso de (2.2) y (2.3), las matrices de (2.4) tienen la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
M(\theta) &= \begin{bmatrix} l_2^2 m_2 + 2l_1 l_2 m_2 \cos \theta_2 + l_1^2 (m_1 + m_2) & l_2^2 m_2 + l_1 l_2 m_2 \cos \theta_2 \\ l_2^2 m_2 + l_1 l_2 m_2 \cos \theta_2 & l_2^2 m_2 \end{bmatrix} \\
C(\theta, \dot{\theta}) &= \begin{bmatrix} -2m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 & -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 & 0 \end{bmatrix} \\
G(\theta) &= \begin{bmatrix} m_2 l_2 g \cos(\theta_1 + \theta_2) + (m_1 + m_2) l_1 g \cos \theta_1 \\ m_2 l_2 g \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \\
\tau &= \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \\
\dot{\theta} &= \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

En la literatura, las matrices $M(\theta)$, $C(\theta, \dot{\theta})$, $G(\theta)$ de (2.4) se les conoce con el nombre de inercia, de coriolis y de gravedad respectivamente.

En la práctica, el robot manipulador está sujeto a fuerzas de fricción y perturbaciones. Por lo tanto, generalizaremos el modelo que se ha calculado añadiendole un término de fricción viscosa, $F(\dot{\theta})$, y uno de perturbaciones, τ_d . De esta forma, (2.4) se transforma en:

$$M(\theta) \ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} + G(\theta) + F(\dot{\theta}) + \tau_d = \tau \tag{2.5}$$

donde

$$F(\dot{\theta}) = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

y τ_d es un término cuya estructura desconocemos y que representa las dinámicas no modeladas del robot.

Observación 2.2 *El término de fricción no es fácil de modelar, ya que depende de la estructura física del robot. En esta tesis, por simplicidad, se asume fricción viscosa; pero un análisis más profundo se puede hallar en [6].*

Observación 2.3 *A diferencia de la fricción viscosa, la cual es benéfica para el robot; la fricción no lineal, por ejemplo la fricción de Coulomb, es dañina para la estabilidad del sistema y debe ser compensada de alguna forma.*

Las dos ecuaciones que componen (2.5) son:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_1 - 2m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + 2m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 \\ &\quad - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 + m_1 g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + k_1 \dot{\theta}_1 \\ \tau_2 &= m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 + m_2 g l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + k_2 \dot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde k_1, k_2 son los coeficientes de fricción de (2.6).

2.3 Valores numéricos de un robot manipulador.

Para poder llevar a efecto las simulaciones en esta tesis, es necesario definir los valores numéricos de (2.5), por lo tanto, se consideran los siguientes parámetros del robot: $m_1 = m_2 = 1Kg$, $l_1 = 1m$, $l_2 = 2m$; los coeficientes de fricción son de 0.3 y la gravedad tiene un valor de $9.8 \frac{m}{s^2}$.

El resultado final es el siguiente:

$$M = \begin{bmatrix} 4 \cos(\theta_2) + 6 & 2 \cos(\theta_2) + 4 \\ 2 \cos(\theta_2) + 4 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -4 \cos(\dot{\theta}_2) \sin(\theta_2) & 2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2) \\ -2 \cos(\dot{\theta}_2) \sin(\theta_2) & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 19.6 \cos(\theta_1 + \theta_2) + 19.6 \cos \theta_1 \\ 19.6 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$
(2.8)

donde (θ_1, θ_2) y $(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$ son los vectores de posición y de velocidad del primer y segundo eslabón del manipulador respectivamente.

2.4 Propiedades estructurales de las ecuaciones dinámicas del robot manipulador.

Estas propiedades corresponden al estudio del modelo dinámico (2.7), dicho estudio se encuentra con mayor detalle en [2] y [7].

Estas propiedades permitirán mejorar el diseño del controlador en las secciones subsiguientes y serán empleadas a lo largo de toda la tesis.

2.4.1 Propiedades de la matriz de inercia $M(\theta)$.

Intuitivamente, es posible escribir la energía cinética del manipulador en la forma cuadrática siguiente:

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^T K(\theta) \dot{\theta} \tag{2.9}$$

donde $K(\theta)$ es una matriz que describe la distribución de la masa del manipulador en función de θ . Cada elemento de $K(\theta)$ debe tener unidades de inercia (kgm^2). Claramente, $K(\theta)$ debe ser positiva definida para que el valor de (2.9) sea siempre positivo y represente energía. Más aún, dada la forma cuadrática de (2.9) es posible sumar cualquier matriz *skew-symmetric*¹ sin alterar el valor de la forma cuadrática. Luego, dado que cualquier matriz puede escribirse

¹Una matriz $S \in R^{n \times n}$ se llama *skew-symmetric* si satisface que $S^T = -S$.

como la suma de una matriz simétrica y una *skew-symmetric*, podemos concluir que la matriz *skew-symmetric* que corresponde a $K(\theta)$ debe ser nula porque de lo contrario el sistema tendría masa que no contribuye en la energía cinética. Por lo tanto, la matriz $K(\theta)$ es simétrica y definida positiva.

Por otra parte, la energía potencial del manipulador puede escribirse como una función escalar, $P(\theta)$, en términos de θ . Con lo cual, el lagrangiano estaría dado por:

$$L = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T K(\theta) \dot{\theta} - P(\theta)$$

Y la ecuación de Lagrange como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}} \right) - \frac{\delta L}{\delta \theta} &= \tau \\ \frac{d}{dt} \left(K(\theta) \dot{\theta} \right) - \frac{\delta}{\delta \theta} \left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^T K(\theta) \dot{\theta} - P(\theta) \right) &= \tau \\ \dot{K}(\theta) \dot{\theta} + K(\theta) \ddot{\theta} - \frac{1}{2} \dot{\theta}^T \left(\frac{\delta}{\delta \theta} K(\theta) \right) \dot{\theta} + \frac{\delta}{\delta \theta} P(\theta) &= \tau \end{aligned} \quad (2.10)$$

Si comparamos la última ecuación de (2.10) con (2.5) se observa, después de igualar los términos de $\ddot{\theta}$, que:

$$M(\theta) = K(\theta)$$

con lo que $M(\theta)$ debe ser la matriz de la energía cinética del manipulador.

Si de la misma forma, se igualan los coeficientes de $\dot{\theta}$:

$$C(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} = \dot{M}(\theta) \dot{\theta} - \frac{1}{2} \dot{\theta}^T \left(\frac{\delta}{\delta \theta} K(\theta) \right) \dot{\theta} \quad (2.11)$$

es posible demostrar (ver [8]) que:

$$\dot{M}(\theta) = 2C(\theta, \dot{\theta}) - J$$

donde J es una matriz *skew-symmetric*. Entonces, la forma cuadrática de J satisface la propiedad:

$$x^T \left(\dot{M}(\theta) - 2C(\theta, \dot{\theta}) \right) x = 0$$

para cualquier vector x de dimensiones adecuadas.

Otra propiedad importante, es que toda la dependencia de θ de los elemento de $M(\theta)$ es a través de funciones trigonométricas senos y cosenos, las cuales están acotadas para cualquier valor en su argumento y todas ellas en el numerador de $M(\theta)$. Por lo tanto, $M(\theta)$ está acotada para cualquier valor de θ .

Para resumir, la matriz $M(\theta)$ tiene las siguientes propiedades:

1. Es simétrica.
2. Es positiva definida y está acotada superior e inferiormente. Es decir,

$$\alpha_m I_m \leq M(\theta) \leq \beta_m I_m$$

donde I_m es la matriz identidad y $0 \leq \alpha_m \leq \beta_m$ escalares.

3. Su inversa existe, es definida positiva y acotada.
4. Su derivada está definida por $\dot{M}(\theta) = 2C(\theta, \dot{\theta}) - J$, donde J es una matriz *skew-symmetric*.
5. $M(\theta)$ es la matriz de la energía cinética del manipulador.

2.4.2 Propiedades de la matriz de coriolis $C(\theta, \dot{\theta})$.

A esta matriz se le conoce con el nombre de matriz de coriolis y de fuerzas centrífugas.

Tomando como base (2.11), es posible escribir:

$$C(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}^T V_1(\theta) \dot{\theta} \\ \dot{\theta}^T V_2(\theta) \dot{\theta} \\ \vdots \\ \dot{\theta}^T V_n(\theta) \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

donde $V_i(\theta)$ son matrices simétricas de $n \times n$.

De lo anterior, se puede obtener que:

$$C(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} \dot{\theta}^T & V_1(\theta) \\ \dot{\theta}^T & V_2(\theta) \\ \vdots & \vdots \\ \dot{\theta}^T & V_n(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Nótese que $C(\theta, \dot{\theta})$ puede escribirse en la forma $C(\theta, \dot{\theta}) = C_p(\theta)C_v(\dot{\theta}) \dot{\theta}$; donde $C_v(\dot{\theta})$ es una matriz de tamaño $\frac{1}{2}n(n+1) \times n$ dada por:

$$C_v(\dot{\theta}) = \begin{bmatrix} O_{n-1,1} & \dot{\theta}_1 I_n \\ \vdots & \dot{\theta}_2 I_{n-1} \\ \vdots & \vdots \\ O_{1,n} & \dot{\theta}_n \end{bmatrix}$$

donde $O_{n,m}$ es una matriz de ceros de tamaño $n \times m$ y $C_p(\theta)$ es una matriz de tamaño $n \times \frac{1}{2}n(n+1)$.

Tambien es posible escribir la matriz $C(\theta, \dot{\theta})$ en la forma:

$$C(\theta, \dot{\theta}) = B(\theta) \begin{bmatrix} \dot{\theta}\dot{\theta} \end{bmatrix} + C(\theta) \begin{bmatrix} \dot{\theta}^2 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

donde $B(\theta)$ es una matriz de tamaño $n \times \frac{1}{2}n(n-1)$ de coeficientes de coriolis y $\begin{bmatrix} \dot{\theta}\dot{\theta} \end{bmatrix}$ un vector de tamaño $\frac{1}{2}n(n-1) \times 1$ cuyos elementos están dados por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}\dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 & \dots & \dot{\theta}_{n-1}\dot{\theta}_n \end{bmatrix}^T$$

$C(\theta)$ una matriz de coeficientes centrífugos y $\begin{bmatrix} \dot{\theta}^2 \end{bmatrix}$ un vector $n \times 1$ con elementos descritos por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 & \dot{\theta}_2^2 & \dots & \dot{\theta}_n^2 \end{bmatrix}^T$$

Nuevamente, la dependencia de θ aparece sólo en función de senos y cosenos, en el numerador, así que $C(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta}$ tiene una cota independiente de θ ; pero que se incrementa

cuadráticamente en función de $\dot{\theta}$.

Para resumir, la matriz $C(\theta, \dot{\theta})$ tiene las siguientes propiedades:

1. Es cuadrática en función de $\dot{\theta}$.
2. Puede ser escrita de distintas maneras: (2.12), (2.13) y (2.14).
3. Se relaciona con la derivada de la matriz de inercia a través de la igualdad:

$$C(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \left(\dot{M}(\theta) + J \right)$$

donde J es una matriz *skew-symmetric*.

2.4.3 Propiedades de la matriz de gravedad $G(\theta)$.

La dependencia de θ de esta matriz, también es a través de senos y cosenos en el numerador. Por lo tanto, $G(\theta)$ tiene una cota superior e inferior, independiente de θ .

2.4.4 Propiedades de la matriz de fricción $F(\dot{\theta})$.

El término de fricción, dependiente de $\dot{\theta}$, que esta tesis considera tiene únicamente tres propiedades:

1. La fricción es un efecto local, así que los elementos de $F(\dot{\theta})$ son $f_i(\dot{\theta}_i)$; $i = 1, \dots, n$.
2. La fuerza de fricción es disipativa, es decir, $\dot{\theta}^T F(\dot{\theta}) \geq 0$.
3. $F(\dot{\theta})$ depende linealmente de $\dot{\theta}$.

Los tres puntos anteriores dan como resultado que:

$$F(\dot{\theta}) = \begin{bmatrix} f_1 \dot{\theta}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & f_n \dot{\theta}_n \end{bmatrix}$$

donde f_i son constantes positivas e $i = 1, \dots, n$.

Observación 2.4 *En ocasiones, el término de fricción $F(\dot{\theta})$ puede depender también de θ debido a efectos en los engranes del robot y otras características inherentes a la estructura*

del manipulador. Es entonces que se hace necesario compensar la fricción para obtener un buen desempeño del robot al seguir una trayectoria continua y variante en el tiempo.

2.5 Redes neuronales.

Los sistemas biológicos proveen de muchas pistas para el desarrollo del aprendizaje *robusto* (altamente estable) y de algoritmos adaptables.

Dichos sistemas procesan la información en forma diferente a los esquemas de control convencionales, ya que no están basados en ningún modelo, sin embargo son muy eficientes para tratar con incertidumbres y complejidades.

Tales sistemas no requieren del desarrollo de un modelo matemático para ejecutar tareas complejas. Ciertamente, pueden aprender a ejecutar nuevas tareas y adaptarse fácilmente a cambios en el ambiente. Si los principios fundamentales de la computación encajaran en los sistemas biológicos (por ejemplo: el cerebro), entonces una generación totalmente nueva de métodos de control podría ser desarrollada mas allá de las capacidades de las técnicas actuales, basadas en un modelo matemático explícito.

Se dice que un sistema de control tiene la habilidad de aprender si adquiere información durante la operación, de comportamientos desconocidos de la planta y de su ambiente, tal que la ejecución completa sea mejorada. Con éste enriquecimiento el controlador podría expandir su región de operación , implementando así un sistema autónomo.

Una clase de modelos, con la potencialidad de implementar éste aprendizaje, son las redes neuronales artificiales. Y aunque la morfología neuronal del sistema nervioso es mucho más compleja, una analogía simplificada puede ser desarrollada, la cual podría ser utilizada en aplicaciones de ingeniería.

Tomando como base esta comprensión simplificada, las estructuras de las redes neuronales artificiales pueden ser desarrolladas.

2.5.1 Modelo de una neurona.

Una red neuronal artificial (RNA) [39] es un elemento capaz de procesar gran cantidad de información en forma paralela y distribuida, inspirada en las redes neuronales biológicas (ver Fig.2-4), las cuales pueden almacenar conocimiento experimental y tenerlo disponible para su uso [40]. Algunas de sus similitudes con el cerebro son:

1. El conocimiento es adquirido a través del proceso de aprendizaje.
2. La conectividad entre neuronas es llamada pesos sinápticos y estos son utilizados para almacenar el conocimiento.

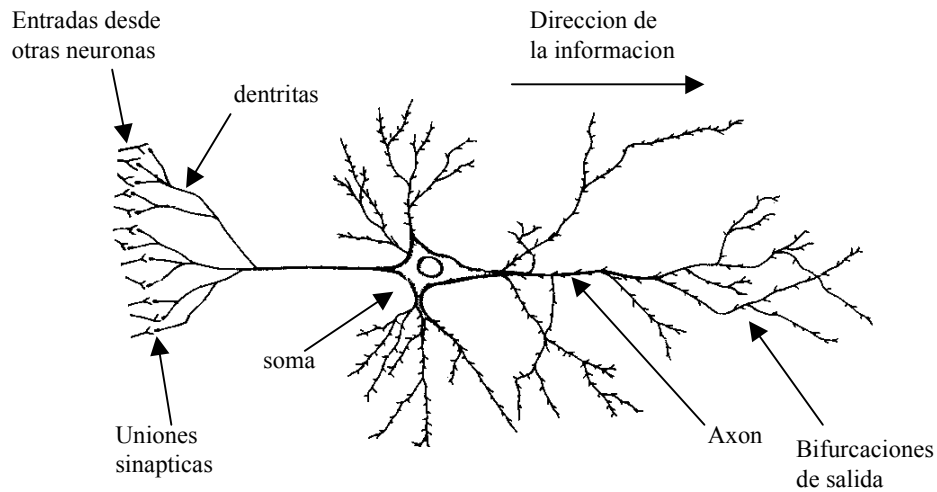


Figura 2-4: Esquema de una neurona biológica.

El procedimiento para el proceso de aprendizaje es conocido como algoritmo o leyes de aprendizaje. Su función es modificar los pesos sinápticos de la red neuronal para alcanzar una meta preestablecida. La modificación de los pesos provee el método tradicional para el diseño e implementación de las redes neuronales.

La neurona es la unidad fundamental para la operación de la red neuronal. La Fig. 2-5 muestra el esquema de una neurona.

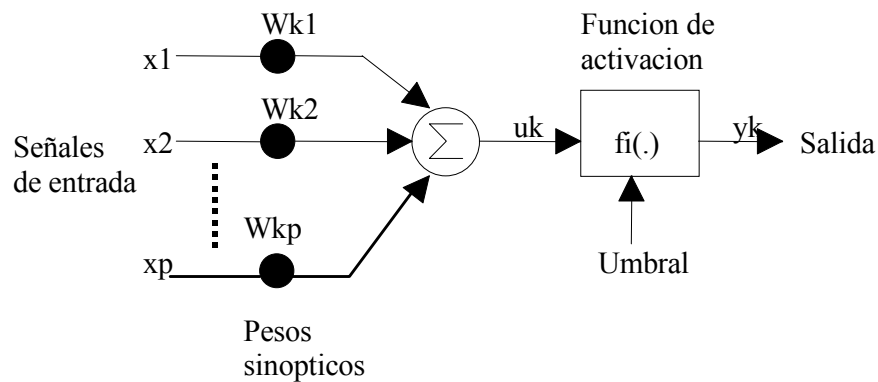


Figura 2-5: Modelo no-lineal de una neurona.

Existen 3 elementos básicos de la RNA:

1. Un conjunto de uniones sinápticas, en cada elemento, caracterizadas por su propio peso.
2. Un sumador, el cual suma los componentes de la señal de entrada multiplicados por su respectivo peso sináptico.
3. Una función de activación no-lineal que transforma la salida del sumador en la entrada de la siguiente neurona.
4. Un umbral externo para reducir la entrada de la función de activación.

En términos matemáticos, la i -ésima neurona se describe como:

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j \\ y_i &= \varphi(u_i - \rho_i) \end{aligned} \tag{2.15}$$

donde:

x_j j -ésimo componente de la entrada.

w_{ij} peso de la conexión entre la j -ésima componente de la entrada y la i -ésima neurona

u_i salida del sumador.

ρ_i umbral.

$\varphi(\cdot)$ función de activación no-lineal.

y_i salida de la i -ésima neurona.

La función de activación no-lineal es denotada por $g(\cdot)$ y genera el elemento de la salida y_i , recibiendo como entrada x_i :

$$y_i = g(x_i) \tag{2.16}$$

Una clasificación para éste tipo de funciones es la siguiente:

1. Diferenciable y No-diferenciable.
2. Tipo pulso y Tipo escalón.
3. Positiva y Promedio cero.

La clasificación 1 se distingue por tener funciones suaves y discontinuas. Las funciones suaves son necesarias para algunos algoritmos de adaptación como el de propagación hacia atrás (backpropagation), mientras que las funciones discontinuas (por ejemplo: la funciones de umbral) son necesarias para generar una salida binaria. La clasificación 2 se distingue por tener funciones con un solo valor significativo de salida cuando las entradas están cerca del cero, porque las funciones sólo cambian significativamente alrededor del cero. La clasificación 3 se refiere a las funciones positivas que cambian de 0 en $-\infty$ a 1 en ∞ y a las funciones de promedio cero que cambian de -1 en $-\infty$ a 1 en ∞ .

Algunas funciones estándar pueden observarse en la Fig. 2-6. y cuyas gráficas se muestran

Nombre	Fórmula	Características
Umbral	$\begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$	No-diferenciable, tipo escalón, positiva
Umbral	$\begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$	No-diferenciable, tipo escalón, prom. Cero
Sigmoide	$\frac{1}{1 + e^{-x}}$	Diferenciable, tipo escalón, positiva
Tangente hiperbólica	$\tanh(x)$	Diferenciable, tipo escalón, prom. Cero
Gaussiana	$e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}$	Diferenciable, tipo pulso

Figura 2-6: Tabla de funciones no lineales.

a continuación:

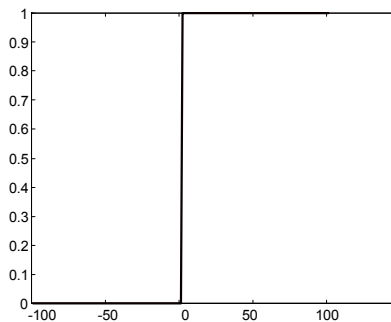


Figura 2-7: Primera función de umbral.

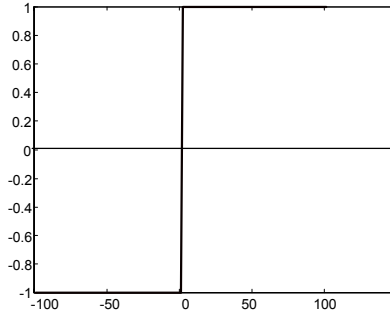


Figura 2-8: Segunda función de umbral.

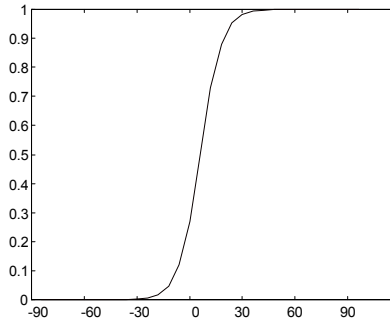


Figura 2-9: Función Sigmoide.

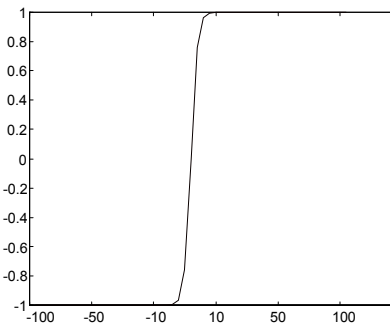


Figura 2-10: Función tangente hiperbólica.

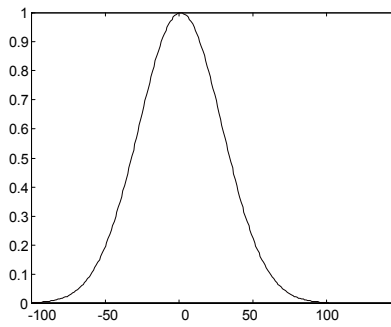


Figura 2-11: Función gaussiana.

2.5.2 Estructuras de las redes neuronales.

La forma en que las neuronas de una red neuronal están interconectadas determina su estructura. Para propósitos de identificación y control, las estructuras más usadas son:

1. Redes de alimentación hacia adelante de una capa.
2. Redes de alimentación hacia adelante multicapa.
3. Redes de funciones radiales básicas.
4. Redes neuronales dinámicas.

Redes de alimentación hacia adelante de una capa.

Esta es la forma más simple de una red neuronal. Tiene sólo una capa de neuronas. La más conocida es llamada *Perceptrón*. Básicamente consta de una neurona con pesos sinápticos ajustables y de una función de activación.

El algoritmo de aprendizaje que ajusta los pesos de estas redes neuronales apareció por primera vez en [41], [42]. Ahí es probado que los vectores de información, usados para entrenar el perceptrón, son tomados de dos clases lineales separables, entonces el algoritmo de aprendizaje del perceptrón converge y define una superficie de decisión: un hiperplano que separa las dos clases. La prueba de convergencia, respectiva, es conocida como el teorema de convergencia del perceptrón.

El perceptrón básico es el llamado modelo de McCulloch-Pitts [43], en el cual la función de activación $\varphi(\cdot)$ es de límites extremos.

El propósito del perceptrón es el de clasificar la señal de entrada, con componentes: u_1, u_2, \dots, u_n , en una o dos clases: C_1 ó C_2 . La regla de decisión para la clasificación consiste en asignar a cada punto, que corresponde a una entrada u_1, u_2, \dots, u_n , la clase C_1 si la salida del perceptrón y es igual a $+1$ y la clase C_2 si es -1 .

Usualmente el umbral ρ es tratado como un peso sináptico conectado a una entrada fijada en -1 , así el vector de entrada queda definido por:

$$(u(k))^T = (-1, u_1(k), u_2(k), \dots, u_n(k)) \quad (2.17)$$

donde k es la k -ésima entrada.

El sumador que produce la salida es calculado por:

$$v(k) = w^T(k) u(k) = u^T(k) w(k) \quad (2.18)$$

donde w es el vector de los pesos sinápticos.

Para cualquier k , en el espacio n -dimensional, la ecuación $w^T u$, con coordenadas u_1, u_2, \dots, u_n , define un hiperplano que separa las entradas en dos clases: C_1 y C_2 . Si estas clases son linealmente separables existe un vector w tal que:

$$\begin{aligned} w^T u &\geq 0, \quad \forall u \in C_1 \\ &\text{y} \\ w^T u &< 0, \quad \forall u \in C_2 \end{aligned} \quad (2.19)$$

El algoritmo de aprendizaje adapta el vector de los pesos como sigue:

$$\begin{aligned} 1. - w(k+1) &= w(k) && \text{si } w^T u \geq 0, \forall u \in C_1 \\ & \text{ó} && \text{si } w^T u < 0, \text{ para } u \in C_2 \\ 2. - w(k+1) &= w(k) - \eta(k) u(k) && \text{si } w^T u \geq 0, \text{ para } u \in C_2 \\ & \text{ó} && \\ & w(k+1) = w(k) + \eta(k) u(k) && \text{si } w^T u < 0, \text{ para } u \in C_1 \end{aligned} \quad (2.20)$$

La convergencia de éste algoritmo puede ser demostrada utilizando un argumento por contradicción.

Si se observa únicamente la salida $v(k)$ y se define el error como:

$$e(k) = d(k) - v(k) \quad (2.21)$$

el algoritmo de mínimos cuadrados puede ser aplicado para minimizar el error. La obtención de éste algoritmo está basado en el método del gradiente descendiente. El cual da por resultado la siguiente ley de aprendizaje:

$$w(k+1) = w(k) + \eta e(k) u(k) \quad (2.22)$$

Puesto que el error depende linealmente de los pesos, éste algoritmo asegura la obtención de un mínimo global.

Redes de alimentación hacia adelante multicapa.

Estas se distinguen por la presencia de una o más capas ocultas (ver Fig. 2-12) cuyos nodos computacionales se llaman neuronas ocultas. Típicamente, las neuronas en cada capa tienen como señal de entrada las señales de salida de la capa precedente. Si cada neurona, en cada capa, es conectada con todas las neuronas de la capas adyacentes la red neuronal se dice que está totalmente conectada, en el caso opuesto, es llamada parcialmente conectada.

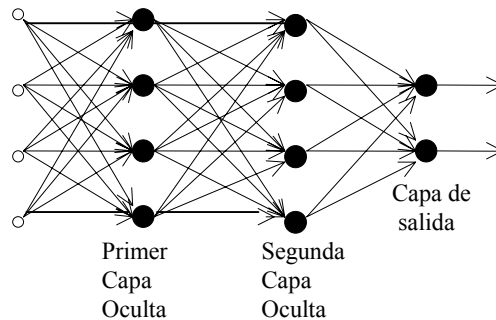


Figura 2-12: Perceptrón multicapa.

El perceptrón multicapa tiene las siguientes tres características:

1. La función de activación para cada neurona es suave, en oposición a la de límites extremos usada en el perceptrón de una sola capa. Usualmente, esta función no-lineal

es una sigmoide definida por:

$$\varphi_i(v_i) = \frac{1}{1 + e^{-v_i}} \quad (2.23)$$

2. La red está compuesta por una o más capas ocultas de neuronas.
3. La red presenta un alto grado de conectividad.

El perceptrón multicapa obtiene su poder computacional a través de la combinación de estas características y su habilidad de aprender de la experiencia. Sin embargo, la presencia de no-linealidades distribuidas y la alta conectividad de la red hacen el análisis teórico difícil de realizar.

Redes de funciones radiales básicas.

En el contexto de una red neuronal, los nodos de la capa escondida proveen una serie de "funciones" que constituyen una "base" arbitraria para los patrones de entrada (vectores) cuando éstos se expanden a los espacios de los nodos de la capa escondida; esas funciones se les denomina "funciones radiales básicas". Las funciones radiales básicas fueron introducidas por primera vez para la solución de problemas de interpolación multivariable reales.

Cuando una red estándar de funciones radiales básicas se usa para desarrollar una tarea de clasificación de patrones complejos, el problema se soluciona básicamente al llevarlo a un espacio de muchas dimensiones de una manera no lineal. La justificación para hacer esto, está provista por el teorema de Cover (1965) sobre los patrones de separabilidad, en donde se establece que un problema de clasificación de patrones complejos, enmarcada en un espacio no lineal multidimensional, es más fácil de separar de manera lineal, que si se enmarca en un espacio de baja dimensión lineal.

Básicamente, el mapeo no lineal se usa para transformar un problema de clasificación separable no linealmente en uno separable linealmente.

De forma similar, se puede utilizar un mapeo no lineal para aproximar una función no lineal en un contexto más sencillo.

Éste tipo de red neuronal tiene tres capas totalmente diferentes:

1. La capa de nodos de entrada.

2. La capa oculta. Donde cada nodo ejecuta una transformación no-lineal de la entrada, denotada como función radial básica.
3. La capa de salida. Formada por una combinación lineal de las salidas de las neuronas de la capa oculta.

Los trabajos pioneros en éste tema se llevaron a cabo por Powell, [33]. La primera aplicación de las funciones radiales básicas en el diseño de redes neuronales fue reportado en [34]. Contribuciones específicas a la teoría, diseño y aplicación de estas funciones a las redes neuronales, se encuentran en [35], [36] y [37].

Redes neuronales dinámicas.

Éste tipo de redes se distinguen de las redes neuronales estáticas porque tienen al menos un ciclo de retroalimentación. Éstos ciclos involucran el uso del tiempo discreto y de bifurcaciones compuestas por elementos de una unidad de retraso. Esta unidad se denota por q^{-1} , tal que $u(k-1) = q^{-1} u(k)$, con k indicando el k -ésimo muestreo en el tiempo. La ecuación de las redes neuronales dinámicas es:

Tiempo discreto:

$$y(k+1) = g[y(k), y(k+1), \dots, y(k-n); u(k), u(k+1), \dots, u(k-m)] \quad (2.24)$$

Tiempo Continuo:

$$\dot{\hat{x}} = A \hat{x} + w_1 \sigma(v_1 x) + w_2 \phi(v_2 x) u \quad (2.25)$$

donde $\sigma(\cdot)$ y $\phi(\cdot)$ son funciones sigmoidales (ver Fig.2-13).

Los ciclos de retroalimentación traen como resultado un comportamiento dinámico no-lineal debido a la función de activación no-lineal de las neuronas. Como consecuencia, se les llama redes neuronales dinámicas.

Estas redes neuronales ofrecen grandes ventajas computacionales. De hecho, es bien sabido que un sumador lineal estático finito es equivalente a un sistema lineal retroalimentado de un solo polo, como se ve en la Fig.2-14.

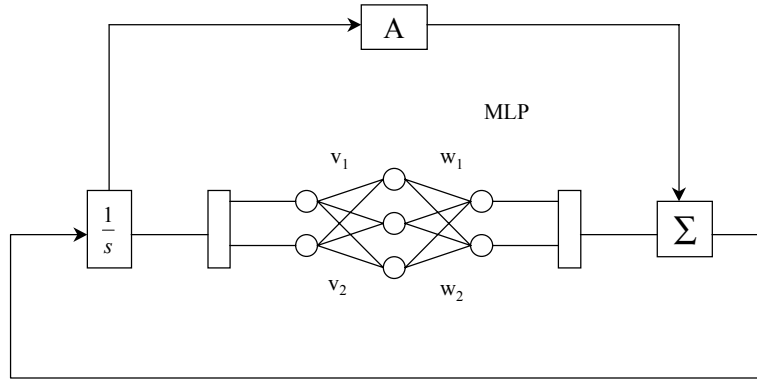


Figura 2-13: Esquema de una red neuronal dinámica.

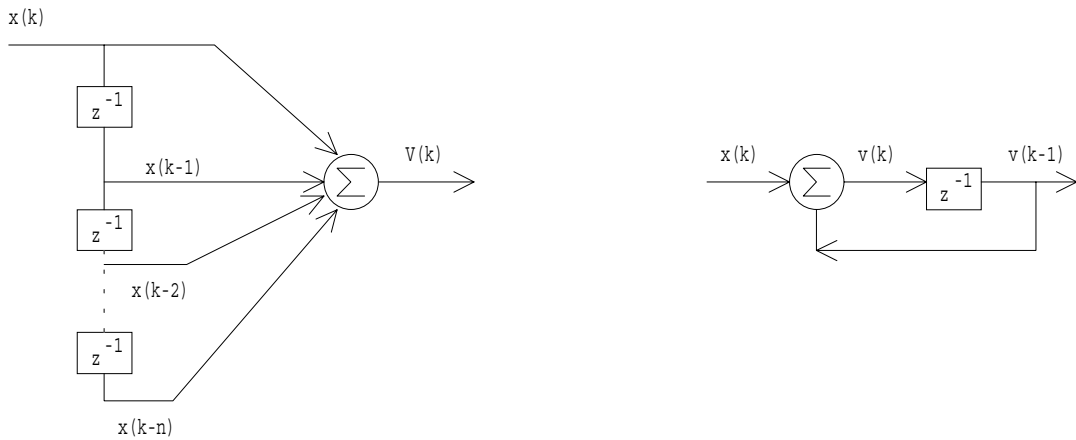


Figura 2-14: Sistemas dinámicos y estáticos equivalentes.

De la Fig. 2-14, el sumador de salida es:

$$v(k) = u(k) + u(k-1) + \dots + u(k-n) = \sum_{i=0}^n u(k-i); \quad n \rightarrow \infty \quad (2.26)$$

El sistema lineal está descrito por:

$$\begin{aligned} v(k) &= v(k-1) + u(k) \\ \frac{v(k)}{u(k)} &= \frac{1}{1-q^{-1}} = 1 + q^{-1} + q^{-2} \dots + q^{-n} \\ v(k) &= u(k) + u(k-1) + \dots + u(k-n) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Es claro que las dos estructuras son equivalentes, pero desde el punto de vista computacional, el sistema con retroalimentación es equivalente a una muy grande, posiblemente infinita, estructura estática. Esta propiedad es muy interesante para identificación y control,

y abre el camino para las aplicaciones de las redes neuronales dinámicas en éstos campos.

Finalmente, esta tesis empleará la siguiente estructura matemática de una red neuronal de funciones radiales básicas:

$$y = W^T \sigma(V^T x) \quad (2.28)$$

donde $x = [x_0^T, x_1^T, \dots, x_{N_1}^T]^T$ es el vector de entrada, $y = [y_1^T, y_2^T, \dots, y_{N_2}^T]^T$ es el vector de salida y $x_0^T = 1$ (para el umbral). Los pesos de la red neuronal corresponden a las matrices $W = [w_{ij}] \in R^{N_3 \times N_2}$, $V = [v_{jk}] \in R^{N_1 \times N_3}$. La función de activación es $\sigma(z) = [\sigma(z_1), \sigma(z_2), \dots, \sigma(z_{N_3})]$. N_3 es el número de nodos de la capa oculta.

Con la siguiente función de activación:

$$\sigma(z) = e^{-\frac{(z-m)^2}{s}} \quad (2.29)$$

donde m y s son constantes positivas.

2.6 Sistemas Singularmente Perturbados.

Esta teoría permite simplificar un modelo dinámico que contenga parámetros constantes pequeños, que incrementen el orden del sistema. Sin embargo, trabajar con un modelo sobre-simplificado puede llevar a resultados alejados del punto óptimo, o en algunos casos, a una inestabilidad del sistema. Es por ello, que la teoría de perturbaciones singulares propone trabajar con el modelo simplificado como primer paso, porque éste modela las características principales del sistema; y posteriormente estudia los fenómenos relativos a los parámetros que se despreciaron, para determinar su importancia en la respuesta del modelo. Las características principales, o promedio, del modelo están determinadas por una respuesta lenta, mientras que los fenómenos relativos a los parámetros despreciados se desarrollan a mayor velocidad.

La teoría de sistemas singularmente perturbados permite determinar cuándo un modelo se puede simplificar, bajo qué condiciones y qué características presentan los sub-sistemas lento y rapido. Todo ésto permite el cálculo de un mejor control, el desarrollo de un observador o de cualquier otro interés.

Esta parte del capítulo está basada en [12].

2.6.1 El modelo estándar de los sistemas singularmente perturbados.

El modelo que a continuación se presenta es el más común dentro de la literatura de control, teoría de sistemas, matemáticas, etc. Y ha sido estudiado ampliamente por Tikhonov (1948,1952), Levinson (1950), Vasileva (1963), Wasow (1956), etc. El modelo es el siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, z, \epsilon, t), \quad x(t_0) = x^0, \quad x \in R^n \\ \epsilon \dot{z} &= g(x, z, \epsilon, t), \quad z(t_0) = z^0, \quad z \in R^m\end{aligned}\tag{2.30}$$

donde el punto denota derivada con respecto al tiempo t ; f, g son campos vectorial continuamente diferenciables en sus argumentos x, z, ϵ, t . ϵ es una constantes escalar pequeña que representa los parámetros que se van a despreciar.

El considerar un solo parámetro pequeño ϵ en (2.30) no es una restricción. Por ejemplo: si T_1 y T_2 son parámetros pequeños de la misma magnitud, uno de ellos puede ser tomado como ϵ y el otro como un múltiplo del primero, es decir, $T_1 = \epsilon$ y $T_2 = \alpha\epsilon$, donde $\alpha = \frac{T_2}{T_1}$ es una constante conocida.

Para llevar acabo la reducción del modelo se hace $\epsilon = 0$, convirtiendo a ϵ en una perturbación llamada "singular" y reduciendo el orden del sistema, o modelo, de $n + m$ a orden n . La segunda ecuación de (2.30) se transforma en:

$$0 = g(\bar{x}, \bar{z}, 0, t)\tag{2.31}$$

donde la barra significa que la variable pertenece al sistema cuando $\epsilon = 0$. Se dice que (2.30) está en la forma estándar si la siguiente aseveración se cumple:

A1: (2.31) tiene $k \geq 1$ raíces reales distintas

$$\bar{z} = \bar{\phi}_i(\bar{x}, t), \quad i = 1, 2, \dots, k\tag{2.32}$$

en algún dominio de interés.

Cuando la aseveración 1 se satisface, se garantiza que existe un sistema n dimensional bien planteado por cada raíz de (2.32). Para obtener el modelo reducido (o sistema lento)

basta sustituir (2.32) en (2.30):

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{\phi}_i(\bar{x}, t), 0, t), \quad \bar{x}(t_0) = x^0 \quad (2.33)$$

o en una notación más compacta:

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, t), \quad \bar{x}(t_0) = x^0 \quad (2.34)$$

Éste modelo se llama "modelo quasi-estacionario" (quasi-steady-state model) porque la velocidad de z ($\dot{z} = \frac{g(\cdot)}{\epsilon}$) es bastante grande cuando ϵ es muy pequeña, haciendo que z llegue rápidamente a una raíz de (2.32), la cual es la forma quasi-estacionaria de (2.30).

2.6.2 Propiedades de las dos escalas de tiempo del modelo estándar de los sistemas singularmente perturbados.

Los sistemas singularmente perturbados tienen dinámicas en dos escalas de tiempo diferentes: un sub-sistema lento y otro rápido. Haciendo un abuso del lenguaje, podemos decir que el sub-sistema lento (el modelo quasi-estacionario) está caracterizado por el modelo reducido (2.34), mientras que la diferencia entre la respuesta del sistema quasi-estacionario y la del sistema original (2.30) está caracterizado por el sistema rápido. Para comprender mejor éste punto, basta examinar la variable z , la cual ha sido excluída del modelo reducido al sustituirla por su estado "quasi-estacionario" \bar{z} . A diferencia de la condición inicial $z(t_0) = z^0$, la condición inicial de \bar{z} está dada por: $\bar{z}(t_0) = \bar{\phi}(\bar{x}(t_0), t_0)$, teniendo así una discrepancia entre ambos casos. Por lo tanto, \bar{z} no puede ser una aproximación uniforme de z y lo mejor que se puede esperar es una aproximación de tipo:

$$z = \bar{z}(t) + O(\epsilon) \quad (2.35)$$

para algún intervalo $t \in [t_1, T]$ donde $t_1 > t_0$. Sin embargo, las condiciones iniciales de x y de \bar{x} si son las mismas ($\bar{x}(t_0) = x(t_0) = x^0$), siendo su aproximación:

$$x = \bar{x}(t) + O(\epsilon) \quad (2.36)$$

uniforme y válida en un intervalo $t \in [t_0, T]$ donde $\bar{x}(t)$ exista.

La aproximación (2.35) muestra que durante el intervalo inicial o capa frontera ("boundary layer") $[t_0, t_1]$ la variable z tiende a \bar{z} y posteriormente, en el intervalo $[t_1, T]$, permanece muy cerca de \bar{z} . Es importante hacer notar que la velocidad de z ($\dot{z} = \frac{g(\cdot)}{\epsilon}$) puede hacerse lo suficientemente grande llegando hasta $\epsilon = 0$ donde el transitorio de z será instantáneo siempre que $g(\cdot) \neq 0$.

Sin embargo, hay que determinar si z tendrá un tiempo de escape finito o convergerá a \bar{z} durante el intervalo transitorio y para ello hay que estudiar el comportamiento de $\epsilon \dot{z}$, el cual deberá permanecer finito aún cuando ϵ tienda a cero y \dot{z} tienda a infinito. Defínase lo siguiente:

$$\epsilon \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{d\tau}, \text{ o lo que es igual: } \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\epsilon} \quad (2.37)$$

y considerese $\tau = 0$ como el valor inicial en $t = t_0$. La nueva variable de tiempo

$$\tau = \frac{t - t_0}{\epsilon}, \quad \tau = 0 \text{ cuando } t = t_0 \quad (2.38)$$

implica que cuando ϵ tiende a cero τ tiende a infinito, incluso con valores de t ligeramente más grandes que t_0 , es decir, τ representa un estiramiento del tiempo. Así que mientras z y τ cambian casi instantaneamente, x permanece muy cercano a su valor x^0 .

Para describir el comportamiento de z con respecto a τ se hace uso de la llamada corrección de capa frontera ("boundary layer correction") $\hat{z} = z - \bar{z}$, la cual define el siguiente sistema de capa frontera ("boundary layer system"):

$$\frac{d\hat{z}}{d\tau} = g(x^0, \hat{z}(\tau) + \bar{z}(t_0), 0, t_0) \quad (2.39)$$

con la condición inicial $\hat{z}(0) = z^0 - \bar{z}(t_0)$, y x^0, t_0 parámetros constantes. La solución de esta ecuación diferencial sirve para definir la corrección de capa frontera para una posible aproximación uniforme de:

$$z = \bar{z}(t) + \hat{z}(\tau) + O(\epsilon) \quad (2.40)$$

donde $\bar{z}(t)$ es la respuesta lenta de z y $\hat{z}(\tau)$ es la respuesta rápida de z . Ahora bien, para que (2.40) se aproxime a (2.35), luego de un corto periodo de tiempo, es necesario que $\hat{z}(\tau)$ tome valores de magnitud $O(\epsilon)$ conforme $\tau \rightarrow \infty$, lo cual se lleva acabo rápidamente en la

escala de tiempo t porque:

$$\frac{d\widehat{z}(\tau)}{dt} = \frac{d\widehat{z}(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\epsilon} \frac{d\widehat{z}(\tau)}{d\tau}$$

Las propiedades de estabilidad del sistema de capa frontera (2.39); las cuales son indispensables para satisfacer las aproximaciones (2.35), (2.36) y (2.40); se enumeran en las siguientes dos aseveraciones:

A2: El punto de equilibrio $\widehat{z}(\tau) = 0$ de (2.39) es uniforme asintóticamente estable en x^0 y t_0 . Y $z^0 - \bar{z}(t_0)$ está contenido en su dominio de atracción, así que $\widehat{z}(\tau)$ existe para todo $\tau \geq 0$.

Si esta aseveración se satisface, entonces:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \widehat{z}(\tau) = 0 \quad (2.41)$$

uniformemente en x^0, t_0 , lo cual implicaría que z se aproxima a su estado quasi-estacionario \bar{z} en algún tiempo $t_1 > t_0$. Para garantizar que z permanezca cerca de \bar{z} , considere cualquier tiempo $t \in [t_1, T]$ como el instante inicial y suponga lo siguiente, sobre la linealización de (2.39):

A3: Los eigenvalores de $\frac{\delta g}{\delta z}$; evaluados en $\epsilon = 0$ y a lo largo de $x(t), z(t)$; tienen partes reales menores a un número negativo constante, i. e.

$$\operatorname{Re} \lambda \left\{ \frac{\delta g}{\delta z} \right\} \leq -c < 0 \quad (2.42)$$

Ambas aseveraciones son condiciones fuertes de estabilidad para (2.39). Si z^0 es lo suficientemente cercano a $\bar{z}(t_0)$, entonces A3 implica A2. De igual forma, la no singularidad de $\frac{\delta g}{\delta z}$ implica que las raíces $\bar{z}(t)$ son todas diferentes, tal como lo pide la A1.

Estas 3 aseveraciones son comunes en mucha de la literatura de perturbaciones singulares, por ejemplo: Tikhonov (1984, 1952); Levinson (1950); Vasileva (1963); Hoppensteadt (1971). Estas referencias contienen la prueba y los detalles del siguiente teorema:

Teorema 2.2 *Si las aseveraciones A2 y A3 se satisfacen, las aproximaciones de (2.36) hasta (2.40) son válidas para toda $t \in [t_0, T]$ y además existe también un $t_1 \geq t_0$ tal que (2.35) es válida para toda $t \in [t_1, T]$.*

Éste resultado es conocido como el teorema de Tikhonov, aunque aquí está presentado

en la forma propuesta por Vasileva y otros autores. La prueba del teorema hace uso de una técnica que expande asintóticamente a x y a z en dos escalas de tiempo, teniendo términos definidos en t y en τ . Pero la prueba del teorema se omitirá en esta tesis y sólo se ejemplificará el uso de dicha técnica.

Primeramente, se sustituye $x = \bar{x}(t) + \hat{x}(\tau)$, $z = \bar{z}(t) + \hat{z}(\tau)$, las derivadas de x y de z con respecto a t y τ , la relación (2.30) en el sistema (2.37), para obtener el siguiente resultado:

$$\dot{\bar{x}}(t) + \frac{d\hat{x}(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = f(\bar{x} + \hat{x}, \bar{z} + \hat{z}, \epsilon, t) \quad (2.43)$$

$$\epsilon \dot{\bar{z}}(t) + \epsilon \frac{d\hat{z}(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = g(\bar{x} + \hat{x}, \bar{z} + \hat{z}, \epsilon, t) \quad (2.44)$$

Si $\bar{x}(t)$ satisface el modelo reducido (2.33), (2.43) se transforma en:

$$\frac{d\hat{x}(\tau)}{d\tau} = \epsilon [f(\bar{x} + \hat{x}, \bar{z} + \hat{z}, \epsilon, t) - f(\bar{x}, \bar{z}, 0, t)] \quad (2.45)$$

y $\frac{d\hat{x}(\tau)}{d\tau} \rightarrow 0$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Entonces $\hat{x}(\tau)$ es constante cuando $\epsilon = 0$ y dado que $\bar{x}(t_0) = x^0$, esa constante debe ser cero, i. e. $\hat{x}(\tau) = 0$ cuando $\epsilon = 0$. Esto muestra que si la cantidad entre corchetes de (2.45) permanece acotada, $x(t, \epsilon) \rightarrow \bar{x}(t)$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Para mostrar que el error no es mayor a $O(\epsilon)$ se requiere de un análisis más detallado de (2.45).

Partiendo de que $\hat{x}(\tau) = 0$ y suponiendo que $z(t)$ satisface (2.31), (2.44) se transforma en:

$$\frac{d\hat{z}(\tau)}{d\tau} = g(\bar{x}(t), \hat{z}(\tau) + \bar{z}(t), \epsilon, t) - \epsilon \dot{\bar{z}}, \quad \hat{z}(0) = z^0 - \bar{z}(t_0) \quad (2.46)$$

donde $\dot{\bar{z}}$ se obtuvo al diferenciar (2.32) con respecto al tiempo. Nótese que (2.46) es una forma más general de un sistema de capa frontera que (2.39). Ahora, se sustituye $t = t_0 + \epsilon\tau$, la relación (2.38) y $\epsilon \rightarrow 0$ en (2.46), para obtener (2.39). Siendo éste último el caso límite de (2.46). Para que todo lo anterior sea posible, es necesario que el punto de equilibrio $\hat{z}(\tau) = 0$ de (2.39) tenga las propiedades de estabilidad que las aseveraciones A2 y A3 piden.

Las expansiones asintóticas hacen uso de dos series de potencias en términos de ϵ para representar $x(t, \epsilon)$. Los coeficientes de las primeras series son funciones de t y los de las segundas series son funciones de τ . De igual forma, se emplean dos series de potencias

en términos de ϵ para representar $z(t, \epsilon)$. Luego, estas series se sustituyen en (2.30) para obtener unas ecuaciones parecidas a (2.43) y (2.44), las cuales se igualan término a término para poder calcular los valores de sus coeficientes.

Capítulo 3

Control PD con observador de alta ganancia.

En éste capítulo y debido a la argumentación del principio de la tesis, se resuelve el primer problema del control PD: la necesidad de medir la velocidad de los eslabones del manipulador. Para ello, se hace uso de un observador de alta ganancia evitando el ruido que los sensores de velocidad (tacómetros) generan y disminuyendo, también, el costo del robot porque dichos sensores son considerablemente más costosos que los sensores de posición.

El observador de alta ganancia es capaz de estimar la derivada de los estado del sistema, en éste caso la velocidad.

Éste capítulo presenta dos pruebas de estabilidad, para el sistema completo, con enfoques diferentes: el primero, hace uso de una función de Lyapunov y sigue el procedimiento mostrado en [17]. El segundo, hace uso de la teoría de sistemas singularmente perturbados y está basado en el trabajo [20]. Éste enfoque será la base para el desarrollo del resto de la teoría de esta tesis.

El contenido de éste capítulo se conforma, primeramente, por la implementación del observador de alta ganancia propuesto en [17] y un control PD pre-alimentado, [3], a un robot manipulador. Posteriormente, el sistema en lazo cerrado que resulta se le analiza su estabilidad. Siendo el enfoque de sistemas singularmente perturbados el más interesante porque divide al sistema original en dos sub-sistemas en escalas de tiempo distintas: la parte rápida (la dinámica del observador) y la parte lenta (la dinámica del robot con el control PD). También se da una fórmula para calcular una cota superior del parámetro de alta ganancia del observador. Finalmente, se muestran los resultados de las simulaciones, donde

es posible observar la velocidad de convergencia del observador y corroborar las propiedades de estabilidad del sistema completo.

Observación 3.1 *Éste capítulo es una extensión del trabajo de [18] porque: (1) ofrece la prueba de estabilidad del sistema robot-observador-control que el trabajo de [18] carece. (2) Añade una forma para calcular la cota superior del parámetro de alta ganancia del observador, la cual resulta en una condición necesaria para la estabilidad asintótica del sistema en lazo cerrado (robot-observador-control PD) y corresponde a la mínima velocidad de convergencia del observador.*

3.1 El observador de alta ganancia.

Las ecuaciones dinámicas de un robot manipulador de n -eslabones, como el planteado en el capítulo de *Preliminares*, se pueden escribir de la siguiente manera [17]:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x_1, x_2) + g(x_1)u \\ y &= x_1\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde $x_1 = q \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de posiciones, $x_2 = \dot{q} \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de velocidades (en ambos casos se trata de posiciones y velocidades de los eslabones que componen al manipulador), $y \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de salida, el cual es medible, y

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2) &= M(x_1)^{-1}[-C(x_1, x_2)x_2 - G(x_1) - Fx_2] \\ g(x_1) &= M(x_1)^{-1}u\end{aligned}\tag{3.2}$$

El observador de alta ganancia propuesto en [17] tiene la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + \frac{1}{\varepsilon}H_p(y - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \frac{1}{\varepsilon^2}H_v(y - \hat{x}_1)\end{aligned}\tag{3.3}$$

donde $\hat{x}_1 \in \mathfrak{R}^n$, $\hat{x}_2 \in \mathfrak{R}^n$ denotan los valores observados, o estimados, de los estados x_1 , x_2 respectivamente; ε es una constante positiva pequeña (el parámetro de alta ganancia) y H_p ,

H_v son matrices constantes definidas positivas tales que:

$$\begin{bmatrix} -H_p & I \\ -H_v & 0 \end{bmatrix}$$

es una matriz estable en el sentido de Hurwitz.

Observación 3.2 *Para entender mejor la naturaleza del observador de alta ganancia (3.3) se muestra, a continuación, su función de transferencia:*

$$\frac{\widehat{x}_2}{y}(s) = \frac{\frac{1}{\varepsilon^2} H_v s}{s^2 + \frac{1}{\varepsilon} H_p s + \frac{1}{\varepsilon^2} H_v} \quad (3.4)$$

Defínase el siguiente error de observación:

$$\widetilde{x}_1 := x_1 - \widehat{x}_1, \quad \widetilde{x}_2 := x_2 - \widehat{x}_2$$

entonces, la dinámica del error de observación tomando en cuenta (3.1) y (3.3) queda definida por la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \dot{\widetilde{x}}_1 &= \widetilde{x}_2 - \frac{1}{\varepsilon} H_p \widetilde{x}_1 \\ \dot{\widetilde{x}}_2 &= -\frac{1}{\varepsilon^2} H_v \widetilde{x}_1 + f(x_1, x_2) + g(x_1)u \end{aligned} \quad (3.5)$$

El sistema (3.5) se puede escribir en términos de las siguientes variables:

$$\begin{aligned} \widetilde{z}_1 &: = \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{z}_2 &: = \varepsilon \widetilde{x}_2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

como:

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{\widetilde{z}}_1 &= \widetilde{z}_2 - H_p \widetilde{z}_1 \\ \varepsilon \dot{\widetilde{z}}_2 &= -H_v \widetilde{z}_1 + \varepsilon^2 [f(x_1, x_2) + g(x_1)u] \end{aligned} \quad (3.7)$$

y también en la forma matricial siguiente:

$$\varepsilon \dot{\widetilde{z}} = A\widetilde{z} + \varepsilon^2 B [f(x_1, x_2) + g(x_1)u] \quad (3.8)$$

donde

$$\tilde{z} := [\tilde{z}_1^T, \tilde{z}_2^T]^T, A := \begin{bmatrix} -H_p & I \\ -H_v & 0 \end{bmatrix}, B := \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

3.2 El control PD y el observador de alta ganancia.

Toca el momento de mostrar el control PD que se empleará junto con el observador de alta ganancia (3.3).

Considere el siguiente control PD, [3]:

$$u = M(x_1) \dot{x}_2^d + C(x_1, \hat{x}_2)x_2^d + F\hat{x}_2 + G(x_1) - K_p(x_1 - x_1^d) - K_d(\hat{x}_2 - x_2^d) \quad (3.10)$$

donde $x_1^d \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de posiciones deseadas, x_2^d es el vector de velocidades deseadas y $K_p, K_d \in R^{n \times n}$ son matrices positivas constantes.

Cabe notar que el vector de posiciones y velocidades deseadas corresponden a la trayectorias deseadas (una para cada eslabón del robot), las cuales son continuas y variantes en el tiempo, para el caso de seguimiento de trayectorias, o constantes, para el caso de regulación. Y que las matrices K_p, K_d corresponden a las ganancias proporcional y derivativa del control PD.

Éste control PD compensa los efectos de la gravedad y de la fricción del robot y añade dos términos extra para poder garantizar que el robot siga la trayectoria deseada con error cero. En resumen, los términos adicionales al control PD (3.10) y que se denominan términos de pre-alimentación son:

$$M(x_1) \dot{x}_2^d + C(x_1, \hat{x}_2)x_2^d + F\hat{x}_2 + G(x_1)$$

Observación 3.3 *A lo largo de esta tesis, se asume que las trayectorias deseadas son acotadas (en posición y en velocidad) y que sus dos primeras derivadas también lo son.*

Observación 3.4 *Si el vector de velocidades pudiese ser medido, el control PD propuesto quedaría igual. Sólo sería necesario cambiar la variable \hat{x}_2 por x_2 .*

Más adelante y a manera de confirmación del punto anterior, se presenta un teorema que muestra que éste control PD hace del sistema en lazo cerrado (robot-control PD) asintóticamente estable si la velocidad del robot fuese medible.

Para continuar con el análisis, se define el error de seguimiento de la siguiente forma:

$$\bar{x}_1 := x_1 - x_1^d, \bar{x}_2 := x_2 - x_2^d$$

De las ecuaciones (3.1) y (3.10) la dinámica del error de seguimiento queda dada por:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{x}_1^d = \bar{x}_2 \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{x}_2^d = f(x_1, x_2) + g(x_1)u - \dot{x}_2^d \end{aligned}$$

que a su vez se transforma en:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= \bar{x}_2 \\ \dot{\bar{x}}_2 &= H(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_1^d, x_2^d, \tilde{x}_2) - \dot{x}_2^d \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde:

$$\begin{aligned} H &= M(\bar{x}_1 + x_1^d)^{-1} [-F\tilde{x}_2 - K_p\bar{x}_1 + K_d\tilde{x}_2 - K_d\bar{x}_2 - C(\bar{x}_1 + x_1^d, x_2^d)\tilde{x}_2 \\ &\quad + M(x_1)\dot{x}_2^d - C(\bar{x}_1 + x_1^d, \bar{x}_2 + x_2^d)\bar{x}_2] \end{aligned}$$

Ahora, es posible integrar a la dinámica del error de observación (3.7) el control (3.10), para obtener:

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{\tilde{z}}_1 &= \tilde{z}_2 - H_p\tilde{z}_1 \\ \varepsilon \dot{\tilde{z}}_2 &= -H_v\tilde{z}_1 + \varepsilon^2 H(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_1^d, x_2^d, \tilde{x}_2) \end{aligned} \quad (3.12)$$

De esta forma, el sistema en lazo cerrado completo queda formado por las ecuaciones (3.1), (3.10) y (3.3), i.e. por el error de seguimiento, el error de observación y el control PD compensado, con la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= \bar{x}_2 \\ \dot{\bar{x}}_2 &= H - \dot{x}_2^d \\ \varepsilon \dot{\tilde{z}}_1 &= \tilde{z}_2 - H_p\tilde{z}_1 \\ \varepsilon \dot{\tilde{z}}_2 &= -H_v\tilde{z}_1 + \varepsilon^2 H \end{aligned} \quad (3.13)$$

y punto de equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = (0, 0, 0, 0)$.

3.3 Análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado.

Aunque se presentan dos enfoques para mostrar la estabilidad del sistema (3.13): el primero basado en [17], y el segundo basado en la teoría de sistemas singularmente perturbados, no son enfoques que se contraponen, ya que el primero muestra que el observador estima los estados reales del sistema con un error distinto a cero; sin embargo, no pone ninguna restricción sobre ϵ ni sobre la capacidad de implementar el observador al robot y el control PD. Por su parte, el segundo enfoque si establece una condición necesaria para poder implementar el observador al control PD y al manipulador; pero garantiza la estabilidad asintótica del sistema.

Si dicha condición necesaria no se satisface, se dice que el teorema falló y no es posible concluir nada, i. e. queda abierta la posibilidad de que el observador pueda ser implementado exitosamente.

La condición necesaria también es una cota sobre el máximo valor que puede tomar ϵ y corresponde a la mínima velocidad de convergencia del observador.

Observación 3.5 *En este trabajo se dará más importancia al segundo enfoque (de sistemas singularmente perturbados) porque establece la estabilidad asintótica del sistema mediante una combinación convexa de las funciones de Lyapunov del sub-sistema lento y rápido. El uso de una combinación convexa de funciones de Lyapunov será de gran utilidad cuando al robot manipulador se le añada el control PD compensado neuronalmente y el observador de alta ganancia (capítulo 5). De usar el primer enfoque, el encontrar una función candidata de Lyapunov para el sistema robot-PD-red neuronal-observador podría resultar muy complicado.*

3.3.1 Enfoque de Lyapunov.

Teorema 3.1 *Usando el observador de alta ganancia (3.3) para estimar la velocidad de la dinámica del robot manipulador (3.1), el error de observación \tilde{x} converge al conjunto:*

$$D_\epsilon = \{\tilde{x} \mid \|\tilde{x}\| \leq 2\epsilon^2 C_T\}$$

donde

$$C_T := \sup_{t \in [0, T]} \|BH(x, u)\|^T \|P\| \quad (3.14)$$

Prueba. Debido a que A es una matriz Hurwitz estable, existe una matriz constante definida positiva P tal que satisface la siguiente ecuación de Lyapunov:

$$A^T P + PA = -I \quad (3.15)$$

donde A está definida en (3.9). Considere la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\tilde{z}) = \varepsilon \tilde{z}^T P \tilde{z}$$

Su derivada con respecto al tiempo y a lo largo de las trayectorias de (3.12) es:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \varepsilon \dot{\tilde{z}}^T P \tilde{z} + \varepsilon \tilde{z}^T P \dot{\tilde{z}} \\ &= (A\tilde{z} + \varepsilon^2 BH(x, u))^T P \tilde{z} + \tilde{z}^T P (A\tilde{z} + \varepsilon^2 BH(x, u)) \\ &= \tilde{z}^T (A^T P + PA) \tilde{z} + 2\varepsilon^2 (BH(x, u))^T P \tilde{z} \\ &\leq \tilde{z}^T (A^T P + PA) \tilde{z} + 2\varepsilon^2 \|BH(x, u)\|^T \|P\| |\tilde{z}| \end{aligned} \quad (3.16)$$

Dado que con el control u siempre existe una solución para (3.12) para cualquier $t \in [0, T]$, entonces $\|H(x, u)\|$ está acotado para cualquier tiempo finito T [19]. Por lo tanto, es posible concluir que $\|BH(x, u)\|^T \|P\|$ está acotado en la forma (3.14).

Tomando como base (3.15) se obtiene:

$$\dot{V} \leq -\|\tilde{z}\|^2 + \overline{K}(\varepsilon) \|\tilde{z}\|$$

donde

$$\overline{K}(\varepsilon) := 2\varepsilon^2 C_T.$$

Cabe notar que si se cumple:

$$\|\tilde{z}(t)\| > \overline{K}(\varepsilon) \quad (3.17)$$

entonces $\dot{V}_i < 0$, $\forall t \in [0, T]$. Así que el tiempo total durante el cual $\|\tilde{z}(t)\| > \overline{K}(\varepsilon)$ es finito. Sea T_k el intervalo de tiempo en el cual $\|\tilde{z}(t)\| > \overline{K}(\varepsilon)$, entonces:

- El tiempo en que $\tilde{z}(t)$ está fuera del círculo de radio $\overline{K}(\varepsilon)$ es finito (porque después

entra en el círculo), es decir, $\tilde{z}(t)$ prácticamente permanece dentro de dicho círculo.

- Si $\tilde{z}(t)$ sale del círculo un número finito de veces y siendo tal tiempo finito, i. e. $\sum_{k=1}^{\infty} T_k < \infty$, entonces:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = 0 \quad (3.18)$$

Por lo tanto $\tilde{z}(t)$ es acotado en base a los argumentos anteriores. De (3.8) $\dot{\tilde{z}}(t)$ también está acotada. Sea $\|\tilde{z}_k(t)\|$ el error de seguimiento más grande en el intervalo T_k , entonces (3.18) y el hecho de que $\dot{\tilde{z}}(t)$ es acotada implican que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [\|\tilde{z}_k(t)\| - \overline{K}(\varepsilon)] = 0$$

lo que a su vez implica que $\|\tilde{z}_k(t)\|$ va a converger al conjunto $\overline{K}(\varepsilon)$.

Finalmente, dado que $\tilde{x} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon}I \end{bmatrix} \tilde{z}$ y $0 < \varepsilon < 1$, entonces $\|\tilde{x}\|$ convergirá al círculo de radio $\overline{K}(\varepsilon)$. ■

Observación 3.6 Debido a que C_T es acotado, es posible seleccionar ε arbitrariamente pequeña para hacer el error de observación lo suficientemente pequeño.

3.3.2 Enfoque de sistemas singularmente perturbados.

Primero, se hace notar que el sistema (3.13) tiene la forma de un sistema singularmente perturbado (2.30), por lo tanto se puede analizar siguiendo dicha teoría.

Para comenzar, se hace $\epsilon = 0$,

$$0 = \tilde{z}_2 - H_p \tilde{z}_1$$

$$0 = -H_v \tilde{z}_1$$

lo cual implica que:

$$\tilde{z}_1 = 0 = x_1 - \hat{x}_1$$

$$\tilde{z}_2 = 0 = \epsilon(x_2 - \hat{x}_2)$$

y por consecuencia, se tiene un punto de equilibrio $(x_1, x_2) = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, es decir, el sistema

(3.13) tiene la forma estándar de un sistema singularmente perturbado.

Observación 3.7 Aunque para efectos de este análisis se hace $\epsilon = 0$, en realidad $0 < \epsilon < 1$ teniendo como consecuencia que el punto de equilibrio $(x_1, x_2) = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ sea único.

Análisis de los sub-sistemas lento y rápido.

Substituyendo el punto de equilibrio $(x_1, x_2) = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ en las dos primeras ecuaciones de (3.13), se obtiene el modelo quasi-estacionario con la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= \bar{x}_2 \\ \dot{\bar{x}}_2 &= H(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_1^d, x_2^d, 0) - \dot{x}_2 \\ &= M(\bar{x}_1 + x_1^d)^{-1} [-K_p \bar{x}_1 - K_d \bar{x}_2 - C(\bar{x}_1 + x_1^d, \bar{x}_2 + x_2^d) \bar{x}_2 + M(x_1) \dot{x}_2^d] - \dot{x}_2 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Por otro lado, el sistema de capa frontera de (3.13) queda definido por:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \tau} \tilde{z}_1(\tau) &= \tilde{z}_2(\tau) - H_p \tilde{z}_1(\tau) \\ \frac{\delta}{\delta \tau} \tilde{z}_2(\tau) &= -H_v \tilde{z}_1(\tau) \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde $\tau = \frac{t}{\epsilon}$.

(3.20) se puede escribir como:

$$\frac{\delta}{\delta \tau} \tilde{z}(\tau) = A \tilde{z}(\tau) \quad (3.21)$$

donde $\tilde{z}(\tau) = [\tilde{z}_1^T(\tau), \tilde{z}_2^T(\tau)]^T$ y A definida en (3.9).

El siguiente teorema muestra las propiedades de estabilidad de los puntos de equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0)$ y $(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = (0, 0)$ para los sistemas (3.19) y (3.21) respectivamente.

Teorema 3.2 El punto de equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0)$ de (3.19) y el punto de equilibrio $(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = (0, 0)$ de (3.21) son asintóticamente estables.

Prueba. Para el primer sistema, considere la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \frac{1}{2} \bar{x}_2^T M(\bar{x}_1 + x_1^d) \bar{x}_2 + \frac{1}{2} \bar{x}_1^T K_P \bar{x}_1 \quad (3.22)$$

cuya derivada con respecto al tiempo y a lo largo de las trayectorias de (3.19) es:

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= \bar{x}_2^T [-K_p \bar{x}_1 - K_d \bar{x}_2 - C(\bar{x}_1 + x_1^d, \bar{x}_2 + x_2^d) \bar{x}_2] + \frac{1}{2} \bar{x}_2^T \dot{M} (\bar{x}_1 + x_1^d) \bar{x}_2 + \bar{x}_1^T K_P \bar{x}_2 \\ &= \bar{x}_2^T \left[\frac{1}{2} \dot{M} (\bar{x}_1 + x_1^d) - C(\bar{x}_1 + x_1^d, \bar{x}_2 + x_2^d) \right] \bar{x}_2 - \bar{x}_2^T K_d \bar{x}_2 \\ &= -\bar{x}_2^T K_d \bar{x}_2 \leq 0\end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Lasalle, las únicas soluciones de (3.19) que se desenvuelven en el conjunto:

$$\Omega_{V_1} = \{(\bar{x}_1, \bar{x}_2) | \bar{x}_2 = 0\}$$

son:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_1 &= 0 \\ 0 &= -[M(\bar{x}_1 + x_1^d)^{-1} K_p] \bar{x}_1\end{aligned}$$

lo que implica que $\bar{x}_1 = 0$ (ver *Propiedades de la matriz de inercia* $M(\theta)$) y por lo tanto $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0)$ es asintóticamente estable.

Con lo que respecta al segundo sistema, dado que A es una matriz Hurwitz estable, existe una matriz definida positiva P tal que:

$$A^T P + P A = -Q \quad (3.23)$$

donde Q es una matriz definida positiva.

Considere la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V_2(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = \tilde{z}^T P \tilde{z} \quad (3.24)$$

cuya derivada con respecto al tiempo y a lo largo de las trayectorias de (3.21) es:

$$\dot{V}_2 = \tilde{z}^T (A^T P + P A) \tilde{z} = -\tilde{z}^T Q \tilde{z} < 0$$

lo cual prueba la estabilidad asintótica de $(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = (0, 0)$. ■

La ventaja de utilizar la teoría de perturbaciones singulares, es que se puede dividir el problema original en dos sub-sistemas: el sub-sistema lento o quasi-estacionario y

el sub-sistema rápido o de capa frontera; para posteriormente estudiar cada uno en forma independiente en distintas escalas de tiempo: t para el sistema lento y τ para el sistema rápido.

Debido a que la velocidad del observador (3.3) está dada por:

$$\dot{\tilde{z}} = \frac{A\tilde{z} + \varepsilon^2 B [f(x_1, x_2) + g(x_1)u]}{\varepsilon}$$

al hacer $\varepsilon \rightarrow 0$ se incrementa notablemente, explicando por qué la dinámica del observador estima en (\hat{x}_1, \hat{x}_2) los valores de (x_1, x_2) con la velocidad suficiente para que la dinámica del robot y del control PD vean en (\hat{x}_1, \hat{x}_2) valores muy próximos a los reales. Bajo la suposición de que $\varepsilon = 0$, el error de observación y el error de seguimiento tienden a cero.

Análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado.

Como parte última de éste análisis y debido a que es imposible hacer que el observador (3.3), de manera práctica, tenga un valor de $\varepsilon = 0$, es necesario encontrar los valores positivos de ε para los cuales las propiedades de estabilidad mostradas anteriormente sigan siendo válidas. Y para ello, proponemos la siguiente modificación al trabajo de [20].

Teorema 3.3 *El origen $(\bar{x}, \tilde{z}) = (0, 0)$ de (3.13) es asintóticamente estable si existe un intervalo continuo $\Gamma = (0, \bar{\varepsilon})$ tal que para toda $\varepsilon \in \Gamma$ se satisfaga:*

$$\left(\frac{d^2 K_2^2}{2}\right) \varepsilon^4 + ((1-d)d\beta_1 K_2) \varepsilon^2 + ((1-d)\alpha_1 K_1) \varepsilon + \frac{(1-d)^2 \beta_1^2}{2} - (1-d)d\alpha_1 \alpha_2 < 0 \quad (3.25)$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, K_1, K_2$ son constantes no negativas, $0 < d < 1$ y $\bar{\varepsilon}$ una raíz positiva del polinomio (3.25).

Prueba. Considere la siguiente función candidata de Lyapunov para (3.13):

$$V_d(x, z) = (1-d)V_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + dV_2(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) \quad (3.26)$$

cuya derivada con respecto al tiempo y a lo largo de las trayectorias de (3.13) es:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{cl} &= (1-d) \left[\bar{x}_2^T M(\bar{x}_1 + x_1^d) \dot{\bar{x}}_2 + \frac{1}{2} \bar{x}_2^T \dot{M}(\bar{x}_1 + x_1^d) \bar{x}_2 + \bar{x}_1^T K_P \bar{x}_2 \right] \\
&\quad + \frac{d}{\epsilon} \left[\tilde{z}^T P \dot{\tilde{z}} + \tilde{z}^T P \dot{\tilde{z}} \right] \\
&= (1-d) \left[\bar{x}_2^T M(\bar{x}_1 + x_1^d) H(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_1^d, x_2^d, 0) + \frac{1}{2} \bar{x}_2^T \dot{M}(\bar{x}_1 + x_1^d) \bar{x}_2 + \bar{x}_1^T K_P \bar{x}_2 \right] \\
&\quad + (1-d) \left[\bar{x}_2^T M(\bar{x}_1 + x_1^d) [H(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_1^d, x_2^d, \epsilon) - H(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_1^d, x_2^d, 0)] \right] \\
&\quad + \frac{d}{\epsilon} \left[\tilde{z}^T (PA + A^T P) \tilde{z} \right] + \frac{d}{\epsilon} \left[2\tilde{z}^T P \epsilon^2 BH(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_1^d, x_2^d, \epsilon) \right]
\end{aligned}$$

Tomando en cuenta el teorema 3.2, es posible obtener:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{cl} &= -(1-d) \bar{x}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_d \end{bmatrix} \bar{x} \\
&\quad + (1-d) \left[\bar{x}_2^T M(\bar{x}_1 + x_1^d) [H(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_1^d, x_2^d, \epsilon) - H(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_1^d, x_2^d, 0)] \right] \\
&\quad - \frac{d}{\epsilon} \tilde{z}^T Q \tilde{z} + \frac{d}{\epsilon} \left[2\tilde{z}^T P \epsilon^2 BH(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_1^d, x_2^d, \epsilon) \right]
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Antes de continuar, es necesario simplificar los siguientes términos:

$$\begin{aligned}
&\left[\bar{x}_2^T M(\bar{x}_1 + x_1^d) [H(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_1^d, x_2^d, \epsilon) - H(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_1^d, x_2^d, 0)] \right] \\
&= \bar{x}_2^T \left[-F \tilde{x}_2 + K_d \tilde{x}_2 - C(\bar{x}_1 + x_1^d, x_2^d) \tilde{x}_2 \right] \\
&= \bar{x}^T \frac{1}{\epsilon} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -F + K_d - C(\bar{x}_1 + x_1^d, x_2^d) \end{bmatrix} \tilde{z}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

usando (3.6). Nótese que esta matriz es acotada porque F y K_d son matrices constantes y porque $C(\bar{x}_1 + x_1^d, x_2^d)$ es acotada haciendo uso de las propiedades de la matriz de Coriolis.

De la misma manera, las propiedades de la matriz de Coriolis y (3.6), hacen que las siguientes relaciones sean válidas:

$$\begin{aligned}
& [2\tilde{z}^T P \epsilon^2 B H(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_1^d, x_2^d, \epsilon)] \\
= & 2\tilde{z}^T P \epsilon^2 \left[\begin{array}{c} 0 \\ M(\bar{x}_1 + x_1^d)^{-1} \begin{pmatrix} -F\tilde{x}_2 - K_p\bar{x}_1 + K_d\tilde{x}_2 - K_d\bar{x}_2 \\ -C(\bar{x}_1 + x_1^d, x_2^d)\tilde{x}_2 - C(\bar{x}_1 + x_1^d, \bar{x}_2)(\bar{x}_2 + x_2^d) \end{pmatrix} \end{array} \right] \\
\leq & 2\tilde{z}^T P \epsilon^2 \left[\begin{array}{c} 0 \\ M(\bar{x}_1 + x_1^d)^{-1} \begin{pmatrix} -F\tilde{x}_2 - K_p\bar{x}_1 + K_d\tilde{x}_2 - K_d\bar{x}_2 \\ -C(\bar{x}_1 + x_1^d, x_2^d)\tilde{x}_2 - C(\bar{x}_1 + x_1^d, x_2^d)\bar{x}_2 \end{pmatrix} \end{array} \right] \quad (3.29) \\
\leq & \tilde{z}^T P \epsilon \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & -2M(\bar{x}_1 + x_1^d)^{-1} (F - K_d + C(\bar{x}_1 + x_1^d, x_2^d)) \end{array} \right] \tilde{z} \\
+ & \tilde{z}^T P \epsilon^2 \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -M(\bar{x}_1 + x_1^d)^{-1} K_p & -M(\bar{x}_1 + x_1^d)^{-1} (K_d + C(\bar{x}_1 + x_1^d, x_2^d)) \end{array} \right] \bar{x}
\end{aligned}$$

Después de incluir (3.28) y (3.29) en (3.27) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_d = & -(1-d)\bar{x}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_d \end{bmatrix} \bar{x} + (1-d)\frac{1}{\epsilon}\bar{x}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -F + K_d - C(\bar{x}_1 + x_1^d, x_2^d) \end{bmatrix} \tilde{z} \\
& -d\tilde{z}^T \left(\frac{1}{\epsilon}Q - P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2M(\bar{x}_1 + x_1^d)^{-1} (F - K_d + C(\bar{x}_1 + x_1^d, x_2^d)) \end{bmatrix} \right) \tilde{z} \\
& +d\epsilon\tilde{z}^T P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -M(\bar{x}_1 + x_1^d)^{-1} K_p & -M(\bar{x}_1 + x_1^d)^{-1} (K_d + C(\bar{x}_1 + x_1^d, x_2^d)) \end{bmatrix} \bar{x} \\
\leq & -(1-d)\alpha_1\psi^2(\bar{x}) + (1-d)\frac{1}{\epsilon}\beta_1\psi(\bar{x})\phi(\tilde{z}) - d \left[\frac{\alpha_2}{\epsilon} - K_1 \right] \phi^2(\tilde{z}) + d\epsilon K_2\psi(\bar{x})\phi(\tilde{z}) \quad (3.30)
\end{aligned}$$

donde:

$$\alpha_1 = \left\| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_d \end{bmatrix} \right\|, \quad \alpha_2 = \|Q\|$$

$$K_1 = \left\| \left\| P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2M(\bar{x}_1 + x_1^d)^{-1} (F - K_d + C(\bar{x}_1 + x_1^d, x_2^d)) \end{bmatrix} \right\| \right\|$$

$$K_2 = \left\| \left\| P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -M(\bar{x}_1 + x_1^d)^{-1} K_p & -M(\bar{x}_1 + x_1^d)^{-1} (K_d + C(\bar{x}_1 + x_1^d, x_2^d)) \end{bmatrix} \right\| \right\|$$

$$\beta_1 = \left\| \left\| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -F + K_d - C(\bar{x}_1 + x_1^d, x_2^d) \end{bmatrix} \right\| \right\|$$

$$\psi(\bar{x}) = \|\bar{x}\|, \quad \phi(\tilde{z}) = \|\tilde{z}\|$$

(3.30) se puede escribir en forma matricial como:

$$\dot{V}_{cl} \leq - \begin{bmatrix} \psi(x) \\ \phi(z) \end{bmatrix}^T T \begin{bmatrix} \psi(x) \\ \phi(z) \end{bmatrix}$$

donde:

$$T = \begin{bmatrix} (1-d)\alpha_1 & -\frac{(1-d)\beta_1}{2\epsilon} - \frac{\epsilon d K_2}{2} \\ -\frac{(1-d)\beta_1}{2\epsilon} - \frac{\epsilon d K_2}{2} & d \left[\frac{\alpha_2}{\epsilon} - K_1 \right] \end{bmatrix}$$

En éste punto, es necesario que T sea una matriz definida positiva. Y lo es siempre que exista un intervalo continuo $\Gamma = (0, \bar{\epsilon})$ tal que para toda $\epsilon \in \Gamma$ se cumpla:

$$\left(\frac{d^2 K_2^2}{2} \right) \epsilon^4 + ((1-d)d\beta_1 K_2) \epsilon^2 + ((1-d)\alpha_1 K_1) \epsilon + \frac{(1-d)^2 \beta_1^2}{2} - (1-d)d\alpha_1 \alpha_2 < 0$$

Finalmente, $\bar{\epsilon}$ es una cota superior de ϵ . ■

Observación 3.8 Debido a que (3.25) tiene 4 posibles raíces, el teorema es válido siempre que exista una raíz real (sin parte imaginaria) positiva tal que en el intervalo $(0, \bar{\epsilon})$ (3.25) sea negativa, donde $\bar{\epsilon}$ es dicha raíz real positiva.

Observación 3.9 La ecuación (3.25) es la condición necesaria para poder implementar el observador (3.3) en el robot y el control PD (3.10).

Las diferencias principales entre [20] y el teorema anterior son:

- Se quitó la suposición 3-a del teorema original porque la función de Lyapunov del teorema anterior no depende de \bar{x} .

- El lado derecho de la suposición 3-b del teorema original no depende de ϵ .
- El término que incluye a la constante K_2 , de la suposición 3-c del teorema original, está multiplicada por ϵ^2 mientras que en esta tesis está multiplicada por ϵ .
- La fórmula para calcular $\bar{\epsilon}$ en el trabajo [20] es mucho más sencilla que la encontrada anteriormente (un polinomio de grado cuatro).

3.4 Simulaciones.

3.4.1 Aplicación de la teoría a un robot manipulador de dos grados de libertad.

El robot manipulador que se considerará es el mismo que fue explicado en el capítulo *Preliminares, valores numéricos de un robot manipulador*.

En éste capítulo sólo se añaden los valores numéricos que corresponden a los parámetros del control PD y del observador de alta ganancia. Así como los valores de las trayectorias deseadas.

Valores de las ganancias del control y del observador.

Se seleccionaron las siguientes ganancias para el control PD:

$$K_p = \begin{bmatrix} 24950 & 0 \\ 0 & 40050 \end{bmatrix}, K_d = \begin{bmatrix} 9630 & 0 \\ 0 & 9630 \end{bmatrix}$$

$$H_p = H_v = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Los valores de las matrices P y Q son:

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 45 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 45 & 0 & 0 \\ -45 & 0 & 5.5 & 0 \\ 0 & -45 & 0 & 5.5 \end{bmatrix}$$

Dada la información anterior, el cálculo de las constantes del teorema 3.3 dió por resul-

tado:

$$\alpha_1 = \left\| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_d \end{bmatrix} \right\| = 80, \alpha_2 = \|Q\| = 45$$

$$K_1 = \left\| P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2M(\bar{x}_1 + x_1^d)^{-1} (F - K_d + C(\bar{x}_1 + x_1^d, x_2^d)) \end{bmatrix} \right\| = 42.71$$

$$K_2 = \left\| P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -M(\bar{x}_1 + x_1^d)^{-1} K_p & -M(\bar{x}_1 + x_1^d)^{-1} (K_d + C(\bar{x}_1 + x_1^d, x_2^d)) \end{bmatrix} \right\| = 84.3242$$

$$\beta_1 = \left\| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -F + K_d - C(\bar{x}_1 + x_1^d, x_2^d) \end{bmatrix} \right\| = 80.0288$$

donde $\|A\| = [\lambda_{\max}(A^T A)]^{\frac{1}{2}}$ denota la norma 2 inducida.

Cálculo de la cota superior del parámetro ϵ del observador de alta ganancia.

El polinomio (3.25) está dado por:

$$f(\epsilon) = 3555.3d^2\epsilon^4 + 6748.4(1-d)d\epsilon^2 + 6745.9(1-d)\epsilon + 3202.3(1-d)^2 - 3600(1-d)d \quad (3.31)$$

Con un valor de $d = 0.5$, el polinomio (3.31) se muestra en la figura 3-1.

Por lo tanto, con los valores de $0 < \epsilon < 0.0558309561787$ el polinomio (3.31) es negativo. Siendo $\bar{\epsilon} = 0.056$, i. e., $\Gamma = (0, 0.056)$.

Observación 3.10 *Con los valores anteriores de H_v , H_p y de ϵ , la función de transferencia del observador de alta ganancia (3.4) queda definido por:*

$$\frac{\widehat{x}_2}{y}(s) = \frac{40000s}{(s + 1774.596)(s + 225.403)}$$

Resultados de las simulaciones para el seguimiento de trayectorias.

Se usó el valor de $\epsilon = 0.003$ para el observador de alta ganancia (3.3). Y cada eslabón del robot debe seguir una trayectoria senoidal.

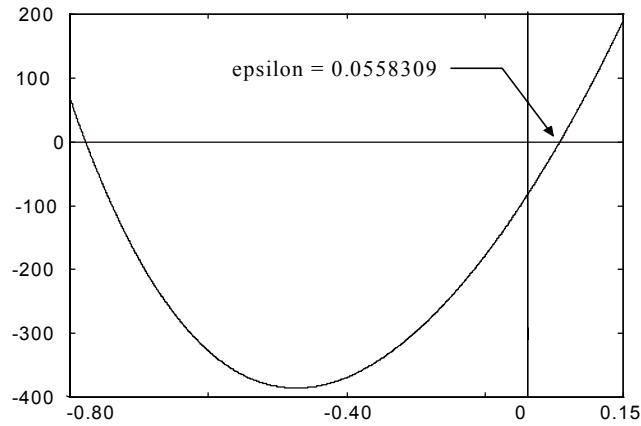


Figura 3-1: Polinomio de ϵ .

La figura 3-2 muestra una convergencia rápida de los valores del observador a los valores reales de velocidad. El error de observación se vuelve cero en un intervalo corto de tiempo. La figura 3-3 muestra que los eslabones del manipulador siguen la trayectoria deseada, como efecto del control PD sobre el manipulador y haciendo uso del observador.

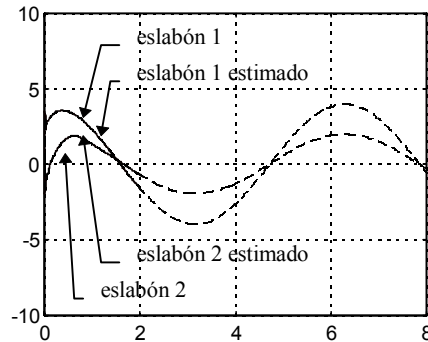


Figura 3-2: Velocidad del robot y del observador.

La estabilidad asintótica asegura que la posición deseada sea alcanzada por el robot conforme $t \rightarrow \infty$. La convergencia rápida y precisa del observador de alta ganancia es muy importante para el buen funcionamiento del control PD porque los valores observados son parte de la retroalimentación del controlador. El observador (3.3) posee tales características.

La figura 3-4 muestra el comportamiento del observador de alta ganancia cuando una perturbación se añade al sistema en el tiempo $t = 3$. La perturbación consiste en un incremento del 20% en la masa de la segunda articulación. Esta prueba tiene como objetivo

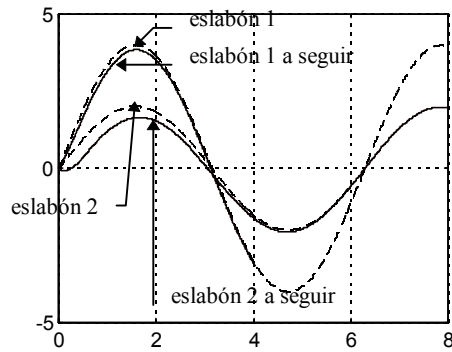


Figura 3-3: Posición del robot.

probar la robustez del sistema de control (observador + PD). La figura 3-5 muestra el desempeño de la tarea de regulación cuando la misma incertidumbre es añadida al sistema en el tiempo $t = 3$.

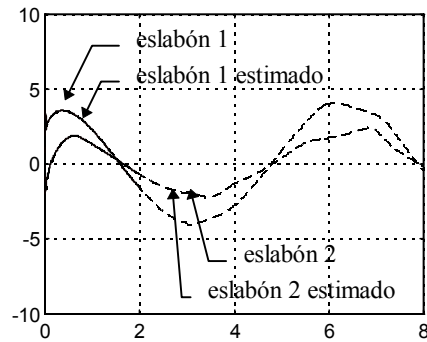


Figura 3-4: Velocidad del robot y del observador con la perturbación.

3.4.2 Comparación en laboratorio del observador de alta ganancia.

A efecto de comparar la efectividad con que el observador de alta ganancia (3.3) estima la velocidad del manipulador se implementó en un motor de corriente continua (i. e. en un robot manipulador de un grado de libertad planar).

Posteriormente, se hicieron mediciones de la velocidad en la flecha del motor y se compararon los resultados con los obtenidos usando un observador de Luenberger. Éste último considerando un modelo lineal del motor.

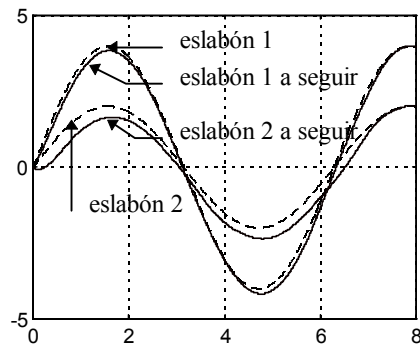


Figura 3-5: Posición del robot con la perturbación.

Características de la implementación del equipo de laboratorio.

El equipo con que se implementaron los dos observadores (el de alta ganancia y el de Luenberger) es el siguiente:

1. Una tarjeta MultiQ-3.
2. El programa WinCon 3.1Beta.
3. Un motor de corriente directa.
4. Un encoder óptico de 10,000 pulsos por revolución.
5. Una computadora como cliente y otra como servidor.

MultiQ-3 es una tarjeta de propósito general de control y de adquisición de datos. Cuenta con 8 entradas analógicas, 8 salidas analógicas, 16 bits de entrada, 16 bits de salida, 3 relojes (timers) programables y hasta 8 entradas para encoders. Es capaz de generar interrupciones por uno de los tres *timers*, por una línea de entrada digital y por el fin de una conversión análogo-digital. La tarjeta se conecta al *bus* de una computadora y se accesa empleando 16 direcciones de memoria consecutivas, las cuales se seleccionan ajustando los micro-interruptores montados en la tarjeta.

Cada entrada para encoder trabaja con 24 bits de precisión, pudiendo contar de 0 hasta 16,777,215. Si se conecta un encoder de 8000 pulsos por revolución, se pueden medir 2097 revoluciones sin saturar al contador. Mediante programación es posible aumentar dicha cota.

Las salidas analógicas trabajan con un convertidor analógico-digital de 12 bits sin signo. Un valor de 0x000 equivale a -5 volts, 0x3FF a 0 volts y 0xFFF a 5 volts. Por lo tanto,

Función	Tiempo en micro-segundos
Entrada digital (16 bits)	2
Salida digital (16 bits)	2
Lectura del encoder (24 bits)	7
Conversión analógica-digital (13 bits)	19.2
Conversión digital-analógica (12 bits)	5

Figura 3-6: Tabla de tiempos de la tarjeta MultiQ-3.

el programa debe escribir un número de 12 bits (0 a 4095) en el registro apropiado y luego habilitarlo (latched). La salida analógica cambia de valor hasta que el número es habilitado.

La tabla 3-6 muestra las velocidades de entrada/salida de datos a la tarjeta MultiQ-3 usándo un procesador Pentium II a 200 Mhz:

El programa WinCon 3.1Beta consta de dos partes: una para la computadora cliente y otra para el servidor. En el servidor se genera código para una máquina virtual a partir de un esquema en Simulink. Después, se ensambla y compila usando un compilador de Visual C++. Para al final cargar el código ejecutable en la computadora cliente. El servidor se encarga de iniciar y parar los procesos en el cliente, de mantener la comunicación (TCP/IP) con el cliente, recibir información del cliente relativa a un proceso que se esté ejecutando y almacenar todos los datos de cada proceso. La computadora cliente trabaja ejecutando, en tiempo real, el programa que el servidor le haya pasado, con un periodo de muestreo determinado por el servidor. Así mismo, se encarga de recabar la información del proceso y pasarsela al servidor.

La tarjeta MultiQ-3 y el programa WinCon 3.1Beta fueron desarrollados por Quanser Consulting Inc.

Resultados obtenidos.

Primeramente, el observador de Luenberguer requiere conocer la dinámica del sistema del cual va a estimar los estados. Y es necesario que el sistema sea lineal, i. e. se pueda escribir como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u \\ y &= C(t)x + D(t)u \end{aligned} \tag{3.32}$$

donde $x \in R^n$ es el vector de estados, $y \in R^m$ es el vector de salida y A, B, C, D son matrices de dimensiones apropiadas las cuales pueden ser variantes en el tiempo o constantes.

La dinámica del observador de Luenberger es la siguiente:

$$\dot{\hat{x}} = A(t)\hat{x} + B(t)u + L(y - C(t)\hat{x}) \quad (3.33)$$

donde \hat{x} es el vector de estimación de los estados, L una matriz constante, x, y, A, B, C, D definidas en la forma anterior.

De (3.33) resulta claro la necesidad de conocer la dinámica del sistema a observar, a diferencia del observador de alta ganancia (3.3), que es independiente de la dinámica del sistema a observar.

La dinámica de un motor de corriente continua se puede escribir de la forma [21]:

$$J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt} = K_m i_a \quad (3.34)$$

donde J_m es la inercia del rotor del motor, B_m representa fuerzas no conservativas que se oponen al movimiento del rotor (por ejemplo, la fricción), K_m es un parámetro de construcción, i_a es la corriente de armadura y θ_m es la posición de la flecha del motor.

La ecuación (3.34) es un sistema no-lineal. Sin embargo, bajo ciertas suposiciones se puede aproximar por un sistema lineal del tipo (3.32). Con las desventajas de obtener resultados con un error mayor, dependiendo de la aproximación que se haya hecho, en comparación con el error que se podría obtener usando un modelo no lineal que considere la mayor cantidad de efectos del motor (eléctricos y mecánicos); sin embargo, un modelo no lineal así, es bastante más complejo. Cuando se sabe que el motor opera en una región pequeña de trabajo o cuando se sabe que ciertos efectos en él son despreciables, las aproximaciones lineales simplifican grandemente el estudio teórico del sistema. En el mismo sentido, puede haber parámetros de construcción del motor que no se conozcan, lo cual también conduce a un modelo dinámico simplificado.

Para el caso del motor, en el que se hicieron los experimentos, no se cuenta con los parámetros de construcción, por lo tanto, se realizó un proceso de identificación para determinar el modelo lineal al cual respondiera con el menor margen de error.

El trabajo de identificación del motor se llevó a cabo de manera independiente a esta tesis

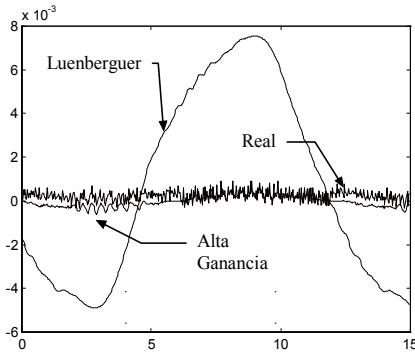


Figura 3-7: Velocidad vista por los dos observadores y el tacómetro.

y su resultado es el siguiente:

$$y = \left[\frac{a}{s(s+b)} \right] u \quad (3.35)$$

donde y es la posición de la flecha del motor, $a = 3021.135797663987$, $b = 0.42087163896558$ y u es la entrada al motor proveniente de la tarjeta MultiQ-3.

Entonces, (3.35) es el modelo lineal que el observador de Luenberguer empleará, para dar paso a la dinámica [30]:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} (y - \hat{x}_1) \quad (3.36)$$

donde \hat{x}_i es el valor estimado de x_i , $i = 1, 2$; $l_1 = l_2 = 0.3$.

Los argumentos anteriores permiten comprender por qué el observador de alta ganancia resulta más sencillo de implementar, aunque presenta la siguiente desventaja: es muy sensible a perturbaciones. El observador no puede anticipar si una desviación de los estados es parte del comportamiento normal del sistema o una respuesta no deseada producto de una perturbación.

La figura 3-7 muestra el desempeño de los dos observadores (el de alta ganancia y el de Luenberguer) estimando la velocidad de la flecha del motor. El observador de Luenberguer tiene el mayor error debido a la aproximación lineal del motor, mientras que el observador de alta ganancia se aproxima más a la velocidad real.

Las figuras 3-8 y 3-9 muestran la velocidad medida a través de un tacómetro y a través del observador de alta ganancia (3.3). Como se explicó en el capítulo de *Preliminares*, los

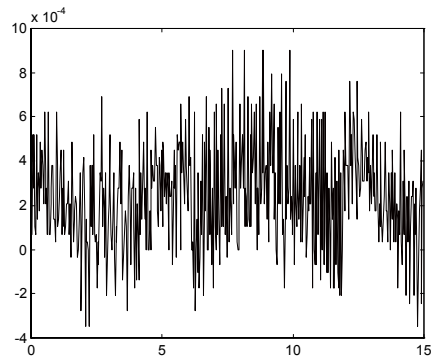


Figura 3-8: Velocidad real.

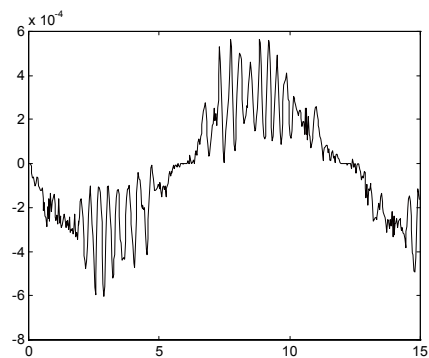


Figura 3-9: Salida del observador de alta ganancia.

tacómetros entregan la salida contaminada por ruido. El observador de alta ganancia no varía tanto aunque no es posible considerar su salida como perfecta, pues presenta una gran cantidad de variaciones.

Como complemento de los resultados anteriores, se retroalimentó la velocidad estimada por ambos observadores y el tacómetro a un control PD, para que la flecha del motor siguiera una trayectoria senoidal.

La figura 3-10, 3-11 y 3-12 muestran la posición de la flecha del motor, cuando se retroalimenta la velocidad del tacómetro, del observador de alta ganancia y del observador de Luenberger respectivamente. *En las tres gráficas de seguimiento de trayectorias, la línea punteada representa la trayectoria deseada, mientras que la línea continua representa la trayectoria seguida por la flecha del motor.*

En todos los casos anteriores, se usaron las mismas ganancias proporcional y derivativa del control PD. Únicamente se cambió la forma de medir la velocidad del motor (tacómetro,

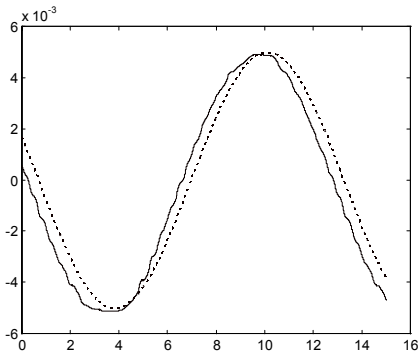


Figura 3-10: Seguimiento de trayectorias con la velocidad real.

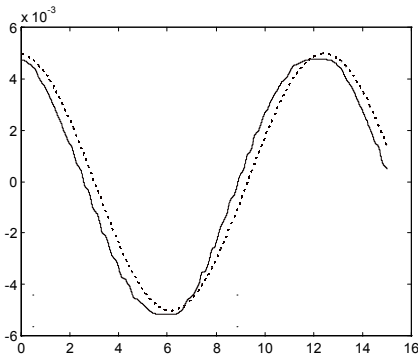


Figura 3-11: Seguimiento de trayectoria usando el observador de alta ganancia.

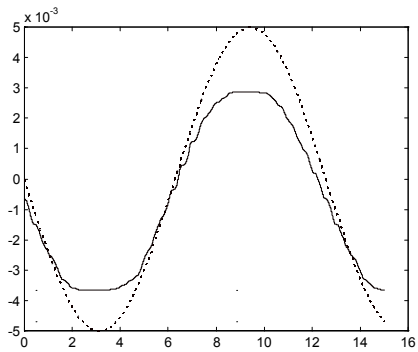


Figura 3-12: Seguimiento de trayectoria usando el observador de Luenberguer.

observador de alta ganancia y observador de Luenberguer).

El observador de alta ganancia tiene un mejor desempeño porque la medición de velocidad que hace es más exacta. Esto coincide con el argumento dado en la primera parte del experimento.

Comentarios finales.

Aunque el observador de alta ganancia ha demostrado ser más eficaz y más sencillo de implementar que el observador de Luenberguer, es más sensible a perturbaciones, lo cual puede dificultar la tarea del control porque éste último tendría que compensar las perturbaciones en el sistema mismo y en el observador. Mientras que el observador de Luenberguer es menos inestable a perturbaciones.

Finalmente, los sistemas de alta ganancia tienden a saturar los dispositivos en los cuales se implementan.

3.5 Comentario final.

En éste capítulo se re-examinó el observador de alta ganancia propuesto en [17], el cual se usa para estimar la velocidad de las articulaciones de un robot manipulador. Se obtuvo, así mismo, una forma de calcular una cota superior para ϵ , basada en la investigación de [20]. Se muestra que el sistema completo en lazo cerrado es asintóticamente estable. Finalmente, se muestra la efectividad de la teoría mediante unas simulaciones, donde es posible que el manipulador sigue las trayectorias especificadas con error cero.

Capítulo 4

Control PD con compensación neuronal.

Si se desea posicionar al robot en puntos fijos de su espacio de trabajo (problema de regulación) el control PD puede prescindir de términos de compensación o de pre-alimentación y hacer el error de posicionamiento cero [26], [2]. Pero como se vió en el capítulo anterior, el control PD requiere de términos adicionales (términos de compensación) para compensar algunas no-linealidades de la dinámica del robot, con el propósito de hacer cero el error de seguimiento. Y como lo demuestran los trabajos de [29] y [21], al menos el efecto de la gravedad se debe compensar para mejorar el error de seguimiento.

El uso de las redes neuronales para compensar algunos términos no lineales de la dinámica del robot puede encontrarse en [28] y [23]. En [28] los autores usan una red neuronal para aproximar el sistema completo del robot y después usan ese compensador neuronal hacia adelante con un control PD para garantizar un seguimiento de trayectorias eficiente. Pero como es sabido, basta añadir algunos términos de compensación al control PD, [3], para hacer del sistema en lazo cerrado asintóticamente estable.

Así que en éste capítulo, se toman como base tales trabajos y se propone una red neuronal de funciones radiales básicas para estimar la compensación que el control PD necesita para resolver el problema de seguimiento de trayectorias. Dicha compensación consta de los efectos de fricción no lineales, de los efectos de gravedad y de las dinámicas no modeladas de la dinámica del robot.

Posteriormente se garantiza que el punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado (robot y control PD compensado) es el error de seguimiento y que además es estable.

Aunque la compensación que se proponé en éste capítulo hace uso de menos términos que en el capítulo anterior, la prueba de estabilidad asegura que el sistema en lazo cerrado es estable. Esto simplifica la implementación del controlador en un robot real, reduciendo el tiempo de cómputo y requiriendo una red neuronal de baja complejidad.

Las leyes de aprendizaje que se obtienen son muy parecidas a la versión continua del algoritmo de propagación hacia atrás (backpropagation), con algunos términos adicionales. Además, la red neuronal no requiere de entrenamiento previo o fuera de línea antes de incluirse en el control y los valores iniciales de los pesos son independientes de la dinámica o parámetros del robot.

Finalmente, se presentan los resultados de simular el control PD compensado con la red neuronal al mismo robot manipulador de dos grados de libertad del capítulo anterior. En ellas es posible observar la estabilidad del sistema completo y su desempeño comparado con un control PD sin compensar y con un control PD compensado de manera exacta.

Observación 4.1 *En éste capítulo se asume que las velocidades del robot se encuentran disponibles, i. e. no se hace uso de ningún tipo de observador.*

4.1 Compensación neuronal.

Las ecuaciones dinámicas de un robot manipulador de n -eslabones, como se planteo en el capítulo de *Preliminares*, se pueden escribir de la manera siguiente [17]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x_1, x_2) + g(x_1)u \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde $x_1 = q \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de posiciones, $x_2 = \dot{q} \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de velocidades (en ambos casos se trata de posiciones y velocidades de los eslabones que componen al manipulador), $y \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de salida, el cual es medible y:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= M(x_1)^{-1}[-C(x_1, x_2)x_2 - G(x_1) - Fx_2] \\ g(x_1) &= M(x_1)^{-1}u \end{aligned} \tag{4.2}$$

Los términos de fricción, de gravedad y de las dinámicas no modeladas del sistema (4.1)

se pueden aproximar con la siguiente red neuronal de funciones radiales básicas (2.28):

$$P(x_1, x_2) = W^* \Phi(V^* s) + \tilde{P} \quad (4.3)$$

donde

$$P(x_1, x_2) := G(x_1) + Fx_2 + \tau_d \quad (4.4)$$

W^* , V^* son valores constantes finitos para los pesos, \tilde{P} es el error de aproximación cuya magnitud depende de los valores de W^* y de V^* , y τ_d es un término cuya estructura desconocemos que representa las dinámicas no modeladas del robot. Dado que esta tesis asume que la fricción es viscosa, al compensarla sólo se está inyectando más amortiguamiento al robot por parte del control.

La estimación de $P(x_1, x_2)$ se puede definir como $\hat{P}(x_1, x_2)$:

$$\hat{P}(x_1, x_2) = \hat{W} \Phi(\hat{V} s) \quad (4.5)$$

En éste punto, es necesario hacer notar que la función de activación (2.29) usada en la red neuronal (4.5) satisface la condición de Lipschitz, es decir, [31]:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_t &:= \Phi(V^{*T} s) - \Phi(\hat{V}_t^T s) = D_\sigma \tilde{V}_t^T s + \nu_\sigma, \\ D_\sigma &= \frac{\partial \Phi^T(Z)}{\partial Z} \Big|_{Z=\hat{V}_t^T s}, \quad \|\nu_\sigma\|_\Lambda^2 \leq l \left\| \tilde{V}_t^T s \right\|_\Lambda^2, \quad l > 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde Λ es una matriz definida positiva y

$$\tilde{W} = W^* - \hat{W}, \quad \tilde{V} = V^* - \hat{V} \quad (4.7)$$

La prueba de la condición anterior se muestra en el *apéndice A*, al final de esta tesis.

Observación 4.2 *Esta condición es parecida a [28] (el resultado de la serie de Taylor). Y la cota superior establecida para ν_σ será de gran importancia para probar la estabilidad del control PD con el compensador neuronal.*

Para el buen desarrollo de éste capítulo, es necesario hacer la siguiente suposición:

Suposición 1.

$$\tilde{P}^T \Lambda_1 \tilde{P} \leq \bar{\eta}, \quad \bar{\eta} > 0 \quad (4.8)$$

4.2 Estructura del control PD y de la compensación neuronal.

El control PD compensado neuronalmente, que esta tesis propone, es el siguiente:

$$u = -K_p(x_1 - x_1^d) - K_d(x_2 - x_2^d) + \widehat{W}\Phi(\widehat{V}s) \quad (4.9)$$

donde $s^T = (1, x_1^T, x_2^T)^T$, $x_1^d \in \mathfrak{R}^n$ es la posición deseada, x_2^d es la velocidad deseada, ambos acotados por:

$$\|x_2^d\| \leq \bar{x}_2, \quad \left\| \dot{x}_2^d \right\| \leq \dot{\bar{x}}_2$$

K_p y K_d son matrices constantes diagonales definidas positivas que corresponden a las ganancias proporcional y derivativa del control.

El error de seguimiento se define como:

$$\bar{x}_1 := x_1 - x_1^d, \quad \bar{x}_2 := x_2 - x_2^d$$

De las ecuaciones (4.1) y (4.9) la dinámica del error de seguimiento está descrita por:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= \bar{x}_2 \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{x}_2^d = H(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_1^d, x_2^d) - \dot{x}_2^d \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde

$$\begin{aligned} H(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_1^d, x_2^d) &= M(\bar{x}_1 + x_1^d)^{-1} [-K_p \bar{x}_1 - K_d \bar{x}_2 + \widehat{W}\Phi(\widehat{V}s) \\ &\quad - W^* \Phi(V^*s) - \tilde{P} - C(\bar{x}_2 + x_2^d)] \end{aligned} \quad (4.11)$$

con punto de equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0)$.

El siguiente teorema muestra las propiedades de estabilidad de (4.10).

Teorema 4.1 *Empleando las siguientes leyes de aprendizaje para la red neuronal en (4.9):*

$$\begin{aligned}\dot{\widehat{W}}_t &= -2d_t K_w \sigma(\widehat{V}_t^T s) \bar{x}_2^T - 2d_t K_w D_\sigma \widehat{V}_t^T s \bar{x}_2^T \\ \dot{\widehat{V}}_t &= -2d_t K_v s \bar{x}_2^T \widehat{W}_t^T D_\sigma + 2d_t l K_v s s^T \widehat{V}_t \Lambda_3\end{aligned}\quad (4.12)$$

donde $0 < \Lambda_1 = \Lambda_1^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$,

$$\begin{aligned}P_0 &= \begin{bmatrix} M(x_1) & 0 \\ 0 & K_p \end{bmatrix} \\ d_t &:= \left[\frac{1}{2} - \mu \left\| P_0^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{x}_1 \end{bmatrix} \right\|^{-1} \right]_+ \\ \mu &= \frac{\chi^2}{4\lambda_{\min}(\Gamma)} \lambda_{\min} \left(P_0^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P_0^{-\frac{1}{2}} \right)\end{aligned}\quad (4.13)$$

$$[z]_+ = \begin{cases} z & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

y habiendo definido:

$$\begin{aligned}\Gamma &:= K_d - \frac{1}{4}\Lambda_1^{-1} - k_c \|\bar{x}_2^d\| I - R, \quad R = R^T > 0 \\ \chi &:= \bar{\eta} + k_c \|\bar{x}_2^d\|^2 + \lambda_{\max}(M) \|\bar{x}_2^d\|\end{aligned}$$

Entonces, el punto de equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0)$ de (4.10) es estable y además:

(I) Los pesos de la red neuronal $\widehat{W}_t, \widehat{V}_t$ están acotados.

(II) Para cualquier $T \in (0, \infty)$ el error de seguimiento \bar{x}_2 satisface el siguiente índice de desempeño:

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T d_t \bar{x}_2^T R \bar{x}_2 dt \leq \frac{\chi^2}{8\lambda_{\min}(\Gamma)} \quad (4.14)$$

Prueba. El sistema (4.10) puede expresarse como:

$$M(x_1) \dot{x}_2 + C(x_1, \dot{x}_1) x_2 + K_p \bar{x}_1 + K_d \bar{x}_2 - \widehat{W}_t \Phi(\widehat{V}_t s) + W^* \Phi(V^* s) + \tilde{P} = 0 \quad (4.15)$$

Considere la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V_1 = \left[\frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} M(x_1) & 0 \\ 0 & K_p \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{x}_1 \end{bmatrix} \right\| - \mu \right]_+^2 + \frac{1}{2} \text{tr} \left(\widetilde{W}_t^T K_w^{-1} \widetilde{W}_t \right) + \frac{1}{2} \text{tr} \left(\widetilde{V}_t^T K_v^{-1} \widetilde{V}_t \right) \quad (4.16)$$

donde K_w y K_v son matrices definidas positivas invertibles. Haciendo uso del lema del apéndice C, la derivada (4.16) con respecto al tiempo es:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & 2 \left[\frac{1}{2} - \mu \left\| \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & K_p \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{x}_1 \end{bmatrix} \right\|^{-1} \right]_+ \left[\bar{x}_2^T M(x_1) \dot{\bar{x}}_2 + \frac{1}{2} \bar{x}_2^T \dot{M}(x) \bar{x}_2 + \bar{x}_2^T K_p \bar{x}_1 \right] \\ & + \text{tr} \left(\widetilde{W}_t^T K_w^{-1} \dot{\widetilde{W}}_t \right) + \text{tr} \left(\widetilde{V}_t^T K_v^{-1} \dot{\widetilde{V}}_t \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Es posible obtener del segundo paréntesis del primer término de (4.17) el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \bar{x}_2^T M \dot{\bar{x}}_2 &= -\bar{x}_2^T M \dot{x}_2^d - \bar{x}_2^T \left[Cx_2 + K_p \bar{x}_1 + K_d \bar{x}_2 - \widehat{W}_t \Phi(\widehat{V}_t s) + W^* \Phi(V^* s) + \widetilde{P} \right] \\ &= -\bar{x}_2^T M \dot{x}_2^d - \bar{x}_2^T C \bar{x}_2 - \bar{x}_2^T C x_2^d - \bar{x}_2^T K_p \bar{x}_1 - \bar{x}_2^T K_d \bar{x}_2 - \bar{x}_2^T \left[-\widehat{W}_t \Phi(\widehat{V}_t s) + W^* \Phi(V^* s) + \widetilde{P} \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

Usando las propiedades de la matriz de inercia, de la matriz de coriolis y (4.18), (4.17) se transforma en:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & 2d_t \left[-\bar{x}_2^T M \dot{x}_2^d - \bar{x}_2^T C x_2^d - \bar{x}_2^T K_d \bar{x}_2 \right] \\ & - 2d_t \bar{x}_2^T \left[-\widehat{W}_t \Phi(\widehat{V}_t s) + W^* \Phi(V^* s) + \widetilde{P} \right] + \text{tr} \left(\widetilde{W}_t^T K_w^{-1} \dot{\widetilde{W}}_t \right) + \text{tr} \left(\widetilde{V}_t^T K_v^{-1} \dot{\widetilde{V}}_t \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde el término $-\widehat{W}_t \Phi(\widehat{V}_t x) + W^* \Phi(V^* x)$ puede expresarse como:

$$\begin{aligned} & W^* \Phi(V^* s) - W^* \Phi(\widehat{V}_t s) + W^* \Phi(\widehat{V}_t s) - \widehat{W}_t \Phi(\widehat{V}_t s) \\ &= \widetilde{W}_t^T \Phi(\widehat{V}_t^T s) + W^{*T} D_\sigma \widetilde{V}_t^T s + W^{*T} \nu_\sigma = \widetilde{W}_t^T \Phi(\widehat{V}_t^T s) + \widehat{W}_t^T D_\sigma \widetilde{V}_t^T s + \widetilde{W}_t^T D_\sigma \widetilde{V}_t^T s + W^{*T} \nu_\sigma \end{aligned} \quad (4.20)$$

Aplicando la desigualdad matricial:

$$X^T Y + (X^T Y)^T \leq X^T \Lambda^{-1} X + Y^T \Lambda Y \quad (4.21)$$

que es válida para cualquier $X, Y \in \mathfrak{R}^{n \times k}$ con la matriz definida positiva $0 < \Lambda = \Lambda^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $-\bar{x}_2^T [\tilde{P} + W^{*T} \nu_\sigma]$ se puede acotar por:

$$\begin{aligned} -\bar{x}_2^T [\tilde{P} + W^{*T} \nu_\sigma] &\leq \|\bar{x}_2\| \left\| \tilde{P} \right\| + \frac{1}{4} \bar{x}_2^T \Lambda_1^{-1} \bar{x}_2 + [W^{*T} \nu_\sigma]^T \Lambda_1 [W^{*T} \nu_\sigma] \\ &\leq \|\bar{x}_2\| \bar{\eta} + \frac{1}{4} \bar{x}_2^T \Lambda_1^{-1} \bar{x}_2 + l \left\| \tilde{V}_t^T s \right\|_{\Lambda_3}^2 \end{aligned} \quad (4.22)$$

donde $\Lambda_3 := W^* \Lambda_1 W^{*T}$. Usando, nuevamente, las propiedades de la matriz de coriolis,

$$\begin{aligned} -\bar{x}_2^T C(x_1, x_2) x_2^d &\leq \|\bar{x}_2\| \|C(x_1, x_2)\| \|x_2^d\| \leq \|\bar{x}_2^d\| \bar{x}_2^T k_c I \bar{x}_2 + k_c \|\bar{x}_2^d\|^2 \|\bar{x}_2\| \\ -\bar{x}_2^T M(x_1) \dot{x}_2^d &\leq \lambda_{\max}(M) \left\| \dot{x}_2^d \right\| \|\bar{x}_2\| \end{aligned} \quad (4.23)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq -2d_t \bar{x}_2^T \Gamma \bar{x}_2 + 2d_t \chi \|\bar{x}_2\| + L_w + L_v - 2d_t \bar{x}_2^T R \bar{x}_2 \\ &\leq -2d_t \lambda_{\min}(\Gamma) \left(\|\bar{x}_2\| - \frac{\chi}{2\lambda_{\min}(\Gamma)} \right)^2 + \frac{2d_t \chi^2}{4\lambda_{\min}(\Gamma)} - 2d_t \bar{x}_2^T R \bar{x}_2 + L_w + L_v \\ &\leq \frac{2d_t \chi^2}{4\lambda_{\min}(\Gamma)} - 2d_t \bar{x}_2^T R \bar{x}_2 + L_w + L_v \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde:

$$\begin{aligned} L_w &:= \text{tr} \left[\left(K_w^{-1} \dot{\tilde{W}}_t - 2d_t \sigma (\hat{V}_t^T s) \bar{x}_2^T - 2d_t D_\sigma \tilde{V}_t^T s \bar{x}_2^T \right) \tilde{W}_t^T \right] \\ L_v &:= \text{tr} \left[\left(K_v^{-1} \dot{\tilde{V}}_t - 2d_t s \bar{x}_2^T \hat{W}_t^T D_\sigma + 2d_t l s s^T \tilde{V}_t \Lambda_3 \right) \tilde{V}_t^T \right] \end{aligned}$$

La leyes de aprendizaje (4.12) hacen de (4.24):

$$\dot{V}_1 \leq -2d_t \left[\bar{x}_2^T R \bar{x}_2 - \frac{\chi^2}{4\lambda_{\min}(\Gamma)} \right] \quad (4.25)$$

la cual puede acotarse por:

$$\dot{V}_1 \leq -4d_t \lambda_{\min} \left(P_0^{-\frac{1}{2}} R P_0^{-\frac{1}{2}} \right) \left[\frac{1}{2} \left\| P_0^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{x}_1 \end{bmatrix} \right\|^2 - \mu \right] \leq 0$$

donde P_0 y μ están definidas en (4.13).

Integrando (4.25) de 0 a $T > 0$, se obtiene:

$$V_{1,T} - V_{1,0} \leq -2 \int_0^T dt \left[\bar{x}_2^T R \bar{x}_2 - \frac{\chi^2}{4\lambda_{\min}(\Gamma)} \right] dt$$

de donde es posible decir que:

$$2 \int_0^T dt \bar{x}_2^T R \bar{x}_2 dt \leq V_{1,0} - V_{1,T} + \left[\frac{\chi^2}{4\lambda_{\min}(\Gamma)} \right] T \leq V_{1,0} + \left[\frac{\chi^2}{4\lambda_{\min}(\Gamma)} \right] T$$

Dado que $V_{1,0}$ es acotada porque $\widetilde{W}_t = W^*$ y $\widetilde{V}_t = V^*$, (4.14) es probada. ■

Observación 4.3 Es importante hacer notar que : $\dot{\widetilde{W}}_t = -\widehat{W}_t$ y $\dot{\widetilde{V}}_t = -\widehat{V}_t$, porque W^* y V^* son matrices constantes.

Observación 4.4 La compensación neuronal (4.9) no puede estimar en forma exacta el término no lineal $P(x_1, x_2)$ en (4.4), presenta irremediablemente un error de estimación \widetilde{P} (aún cuando éste sea muy pequeño). Y por eso, sólo es posible garantizar que el punto de equilibrio de (4.10) es estable en lugar de asintóticamente estable.

4.3 Simulaciones.

El robot manipulador que se considerará es el mismo que fue explicado en el capítulo de *Preliminares, valores numéricos de un robot manipulador*.

En éste capítulo sólo se añaden los valores numéricos que corresponden a los parámetros del control PD y de la red neuronal. Así como los valores de las trayectorias deseadas.

4.3.1 Valores de las ganancias del control y de los parámetros de la red neuronal.

Se seleccionaron las siguientes ganancias para el PD:

$$K_p = \begin{bmatrix} 24950 & 0 \\ 0 & 40050 \end{bmatrix}, \quad K_d = \begin{bmatrix} 9630 & 0 \\ 0 & 9630 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$W^* \equiv V^* \equiv 0$$

Aunque la red neuronal necesita de pesos iniciales, estos pueden tomar cualquier valor. No es necesario investigar las características del manipulador antes de aplicar el control ni de entrenar previamente a la red neuronal. Aunque si es necesario seleccionar el valor de las ganancias proporcional y derivativas antes de accionar la red neuronal.

4.3.2 Resultados de las simulaciones para el seguimiento de las trayectorias.

La figura 4-1 y la figura 4-2 comparan el desempeño de un control PD sin compensación con un control PD con compensación exacta del término $P(q, \dot{q})$ (ver (4.3)) y con el control PD con la compensación neuronal que éste capítulo propone. El suponer una compensación exacta es para efecto de comparar los tres controles PD porque es imposible obtener dicha compensación en un robot real.

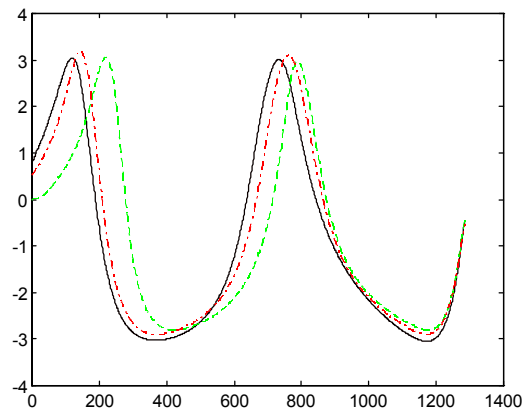


Figura 4-1: Posiciones para el primer eslabón.

En todas las gráficas, la línea continua es para el control PD con compensación exacta, la línea discontinua para el control PD con la compensación neuronal y la línea discontinua con puntos es para el control PD sin compensación.

Hasta el momento es posible ver que los tres controles tienen un error de seguimiento. Las gráficas siguientes (figura 4-3 y figura 4-4) muestran dicho error de seguimiento con el propósito de observar mejor el desempeño de cada control.

Es claro que el mejor desempeño lo tiene el control compensado exactamente y que el peor desempeño el control sin compensación. El control con compensación neuronal, aunque

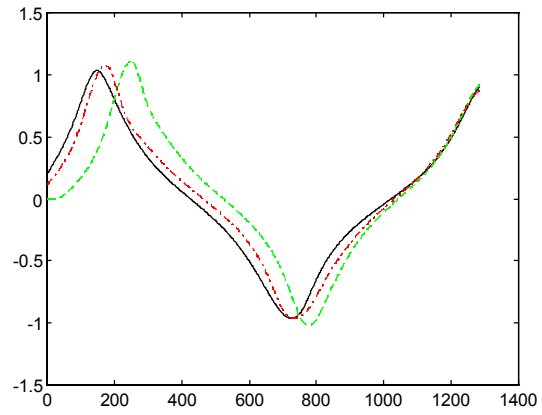


Figura 4-2: Posiciones para el segundo eslabón.

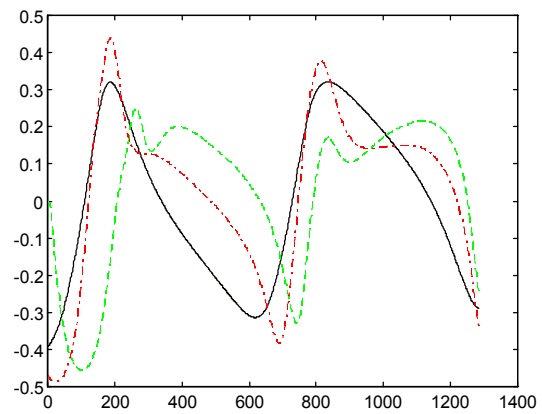


Figura 4-3: Error de seguimiento del primer eslabón.

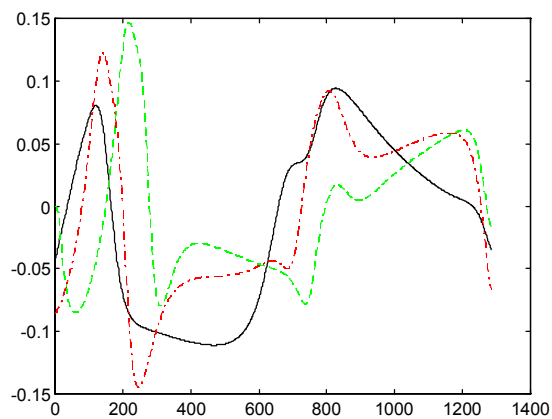


Figura 4-4: Error de seguimiento del segundo eslabón.

no es mejor que el control compensado exactamente, se aproxima bastante a él. El tiempo de aprendizaje de la red neuronal se refleja en el segundo eslabón, donde el desempeño del control compensado es mayor para posteriormente ir disminuyendo.

Los tres controles PD, usados en todas las simulaciones, fueron sintonizados con las mismas ganancias, proporcional y derivativa, mostradas en (4.26).

4.4 Comentario final.

En éste capítulo se usa una red neuronal de funciones radiales básicas para estimar los términos no lineales de la dinámica del manipulador, necesarios para el buen desempeño del control PD. Para implementar la red neuronal no es necesario usar una muy complicada, porque al ser una red neuronal dinámica y de funciones radiales básicas, requiere de pocas neuronas en la capa interna (la capa de entrada tiene dos neuronas y la capa de salida una neurona). Además, no es necesario calcular el error de seguimiento filtrado (filtering tracking error) como se propone en [28].

Las leyes de aprendizaje (4.12) se componen de dos términos. El primero es la versión continua del algoritmo de propagación hacia atrás (backpropagation) y el segundo es un término específico de esta tesis.

Es importante notar que la red neuronal que se propone no requiere de entrenamiento previo ni de pesos iniciales especiales, lo cual facilita su implementación.

Los valores de los pesos iniciales, W^* y V^* , van a determinar el valor inicial del error de estimación \tilde{P} . Esto va a afectar el tiempo de convergencia de la red neuronal a su punto óptimo. Si los pesos iniciales son muy diferentes a los pesos óptimos, el aprendizaje de la red va a ser mayor que si los pesos iniciales son cercanos a los óptimos.

Al igual que en [28], si la red neuronal fuese cero el control PD haría el trabajo de controlar al sistema en forma adecuada. Y mientras mejor se desempeñe la red neuronal menor va a ser el error de seguimiento.

Por último, para tener una estimación exacta por parte de la red neuronal, hace falta que la entrada de la misma sea de excitación persistente, lo cual para el caso del manipulador, no siempre se pueda garantizar.

Capítulo 5

Control PD con compensación neuronal y observador de alta ganancia.

En éste capítulo se unen los resultados obtenidos en los dos capítulos anteriores: el observador de alta ganancia propuesto en [17], la red neuronal de funciones radiales básicas (4.5) y el robot manipulador (5.1); para obtener un control independiente de la dinámica del robot, de fácil implementación y que enriquezca la gama de controles propuestos que resuelven las dos desventajas del control PD que se mencionaron al inicio de esta tesis.

El capítulo inicia con el cálculo del sistema en lazo cerrado de las tres ecuaciones anteriores, obteniendo como punto de equilibrio el error de observación y el error de seguimiento.

Posteriormente, se analiza la estabilidad del sistema completo usando la teoría de sistemas singularmente perturbados, donde el sistema lento y rápido corresponde al estudio de los capítulos 3 y 4 respectivamente. Resta únicamente estudiar ambos sistemas de manera conjunta, tal como se analizan los sistemas singularmente perturbados, empleando una función candidata de Lyapunov resultado de la combinación convexa de las funciones de Lyapunov de cada sub-sistema (lento y rápido).

Se obtienen las leyes de aprendizaje para la red neuronal, que como consecuencia de introducir el observador a la red neuronal, se hace necesario el conocer una cota superior de la matriz de inercia de la dinámica del manipulador. Éste nuevo requerimiento reduce la independencia del control sobre la dinámica del robot, sin embargo es mucho más sencillo calcular una cota que la estructura exacta de dicha matriz. Como lo muestra el trabajo de

[23], parece ser necesario el conocimiento de alguna propiedad de la matriz de inercia cuando se usa un control neuronal junto con un observador.

También se calcula una cota superior para el parámetro de alta ganancia del observador y aunque también corresponde a una ecuación cuadrática, sus coeficientes son diferentes de (3.25). Sin embargo, su papel de condición necesaria para poder aplicar el observador al manipulador y al control PD (ya que la red neuronal no interviene) sigue siendo la misma. También representa la velocidad de convergencia mínima del observador.

Al igual que en los capítulos anteriores, se termina mostrando el resultado de las simulaciones. En éste caso, tampoco se garantiza un seguimiento de trayectorias exacto, sin embargo, se obtiene un desempeño del control propuesto bastante adecuado.

5.1 El control PD con compensación neuronal y el observador de alta ganancia.

Tal como se describió en los dos capítulos anteriores, la estructura de un robot manipulador de n -eslabones se puede escribir de la manera siguiente [17]:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x_1, x_2) + g(x_1)u \\ y &= x_1\end{aligned}\tag{5.1}$$

donde $x_1 = q \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de posiciones, $x_2 = \dot{q} \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de velocidades (en ambos casos se trata de posiciones y velocidades de los eslabones que componen al manipulador), $y \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de salida, el cual es medible y

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2) &= M(x_1)^{-1}[-C(x_1, x_2)x_2 - G(x_1) - Fx_2] \\ g(x_1) &= M(x_1)^{-1}u\end{aligned}$$

La estructura del observador de alta ganancia es [17]:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + \frac{1}{\varepsilon}H_p(y - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \frac{1}{\varepsilon^2}H_v(y - \hat{x}_1)\end{aligned}\tag{5.2}$$

donde $\hat{x}_1 \in \mathfrak{R}^n$, $\hat{x}_2 \in \mathfrak{R}^n$ denotan los valores observados, o estimados, de los estados x_1, x_2

respectivamente; ε es una constante positiva pequeña (el parámetro de alta ganancia); y H_p , H_v son matrices constantes definidas positivas tales que:

$$\begin{bmatrix} -H_p & I \\ -H_v & 0 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

es una matriz estable en el sentido de Hurwitz.

Definiendo el error de observación como:

$$\tilde{x}_1 := x_1 - \hat{x}_1, \quad \tilde{x}_2 := x_2 - \hat{x}_2$$

la dinámica del error de observación queda dada por:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2 - \frac{1}{\varepsilon} H_p \tilde{x}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= -\frac{1}{\varepsilon^2} H_v \tilde{x}_1 + f(x_1, x_2) + g(x_1)u \end{aligned}$$

La cual se puede escribir definiendo las nuevas variables:

$$\begin{aligned} \tilde{z}_1 &: = \tilde{x}_1 \\ \tilde{z}_2 &: = \varepsilon \tilde{x}_2 \end{aligned}$$

de la forma:

$$\varepsilon \dot{\tilde{z}} = A\tilde{z} + \varepsilon^2 B [f(x_1, x_2) + g(x_1)u]$$

donde

$$\tilde{z} := [\tilde{z}_1^T, \tilde{z}_2^T]^T, \quad A := \begin{bmatrix} -H_p & I \\ -H_v & 0 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

El control que se propone es el siguiente:

$$u = -K_p(x_1 - x_1^d) - K_d(\hat{x}_2 - x_2^d) + \widehat{W}\Phi(\widehat{V}s) \quad (5.4)$$

donde $s^T = (1, x_1^T, \hat{x}_2^T)^T$, $x_1^d \in \mathfrak{R}^n$ es la posición deseada, x_2^d es la velocidad deseada, ambos

acotados por:

$$\|x_2^d\| \leq \bar{x}_2^d, \quad \left\| \frac{\cdot}{x_2} \right\| \leq \frac{\cdot}{\bar{x}_2}$$

K_p y K_d son matrices constantes diagonales definidas positivas que corresponden a las ganancias proporcional y derivativa del control.

Observación 5.1 *Nótese que la entrada de la red neuronal depende de \hat{x}_2 en lugar de x_2 a diferencia del capítulo 3.*

Los términos de fricción, de gravedad y de las dinámicas no modeladas del sistema (5.1) se pueden aproximar con la siguiente red neuronal de funciones radiales básicas (2.28):

$$P(q, \dot{q}) = W^* \Phi(V^* s) + \tilde{P} \quad (5.5)$$

donde $P(q, \dot{q}) := G(q) + F \dot{q} + \tau_d$, W^* , V^* son valores constantes finitos para los pesos, \tilde{P} es el error de aproximación cuya magnitud depende de los valores de W^* y de V^* y τ_d es un término cuya estructura desconocemos que representa las dinámicas no modeladas del robot. Dado que esta tesis asume que la fricción es viscosa, al compensarla sólo se está inyectando más amortiguamiento al robot por parte del control.

La estimación de $P(q, \dot{q})$ se puede definir como $\hat{P}(q, \dot{q})$:

$$\hat{P}(q, \dot{q}) = \widehat{W} \Phi(\widehat{V} s) \quad (5.6)$$

Al igual que en el capítulo anterior, la función de activación (2.29) para la red neuronal (5.6) satisface la condición de Lipschitz, es decir [31]:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_t &:= \Phi(V^{*T} s) - \Phi(\widehat{V}_t^T s) = D_\sigma \tilde{V}_t^T s + \nu_\sigma, \\ D_\sigma &= \frac{\partial \Phi^T(Z)}{\partial Z} \Big|_{Z=\widehat{V}_t^T s}, \quad \|\nu_\sigma\|_\Lambda^2 \leq l \left\| \tilde{V}_t^T s \right\|_\Lambda^2, \quad l > 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

donde Λ es una matriz definida positiva y

$$\tilde{W} = W^* - \widehat{W}, \quad \tilde{V} = V^* - \widehat{V} \quad (5.8)$$

Cuya prueba se muestra en el *apéndice A*, al final de esta tesis.

Observación 5.2 *Esta condición es parecida a [28] (el resultado de la serie de Taylor). Y la cota superior establecida para ν_σ será de gran importancia para probar la estabilidad del control PD con el compensador neuronal.*

En el mismo sentido, es necesario plantear nuevamente la suposición 1 del capítulo anterior:

Suposición 1.

$$\tilde{P}^T \Lambda_1 \tilde{P} \leq \bar{\eta}, \quad \bar{\eta} > 0 \quad (5.9)$$

Para continuar, defina el error de seguimiento como:

$$\bar{x}_1 := x_1 - x_1^d, \quad \bar{x}_2 := x_2 - x_2^d$$

El sistema en lazo cerrado del manipulador (5.1), el control PD compensado (5.4) y el observador (5.2) es:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= \bar{x}_2 \\ \dot{\bar{x}}_2 &= H(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_1^d, x_2^d, \tilde{x}_2) - \dot{x}_2^d \\ \varepsilon \dot{\tilde{z}}_1 &= \tilde{z}_2 - H_p \tilde{z}_1 \\ \varepsilon \dot{\tilde{z}}_2 &= -H_v \tilde{z}_1 + \varepsilon^2 H(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_1^d, x_2^d, \tilde{x}_2) \end{aligned} \quad (5.10)$$

donde

$$\begin{aligned} H(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_1^d, x_2^d, \tilde{x}_2) &= M(\bar{x}_1 + x_1^d)^{-1} [-K_p \bar{x}_1 + K_d \tilde{x}_2 - K_d \bar{x}_2 + \widehat{W} \Phi(\widehat{V} s) \\ &\quad - W^* \Phi(V^* s) - \tilde{P} - C(\bar{x}_2 + x_2^d)] \end{aligned} \quad (5.11)$$

con punto de equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = (0, 0, 0, 0)$.

5.2 Análisis del sistema mediante perturbaciones singulares.

Claramente, (5.10) tiene la forma de un sistema singularmente perturbado estándar (2.30). El resto de análisis consta de separar al sistema (5.10) en su parte lenta y rápida. Realizar el análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov de cada uno de ellos en forma independiente.

Y finalmente, hacer el análisis de estabilidad del sistema original tomando como función candidata de Lyapunov la combinación convexa de la funciones de Lyapunov del sub-sistema lento y del rápido, aprovechando los resultados obtenidos de ellos.

5.2.1 Análisis de estabilidad del sub-sistema lento y del sub-sistema rápido.

La separación de ambos sistemas comienza con $\varepsilon = 0$,

$$0 = \tilde{z}_2 - K_1 \tilde{z}_1, \quad 0 = -K_2 \tilde{z}_1$$

lo cual implica que:

$$\tilde{z}_1 = x_1 - \hat{x}_1 = 0, \quad \tilde{z}_2 = \varepsilon (x_2 - \hat{x}_2) = 0$$

con punto de equilibrio $(x_1, x_2) = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$.

Observación 5.3 Aunque para efectos de éste análisis se hace $\varepsilon = 0$, en realidad $0 < \varepsilon < 1$ siendo $(x_1, x_2) = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ el único punto de equilibrio posible.

Al substituir el punto de equilibrio $(x_1, x_2) = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ en (5.10) se obtiene el sistema quasi-estacionario o sub-sistema lento:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= \bar{x}_2 \\ \dot{\bar{x}}_2 &= H(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_1^d, x_2^d, 0) - \dot{x}_2^d \\ &= M(\bar{x}_1 + x_1^d)^{-1} [-K_p \bar{x}_1 - K_d \bar{x}_2 - C(\bar{x}_2 + x_2^d) \\ &\quad + \widehat{W}\Phi(\widehat{V}s) - W^*\Phi(V^*s) - \tilde{P}] - \dot{x}_2^d \end{aligned} \quad (5.12)$$

De igual forma, el sub-sistema rápido o sistema de capa frontera es:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{z}}_1(\tau) &= \tilde{z}_2 - K_1 \tilde{z}_1(\tau) \\ \dot{\tilde{z}}_2(\tau) &= -K_2 \tilde{z}_1(\tau) \end{aligned} \quad (5.13)$$

donde $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$. (5.13) se puede escribir en la siguiente forma matricial:

$$\dot{\tilde{z}}(\tau) = A\tilde{z}(\tau) \quad (5.14)$$

En éste punto, es posible notar que (5.14) y (5.12) corresponden a las ecuaciones (3.21) y (4.10) de los capítulos 3 y 4 de esta tesis. Cuyas propiedades de estabilidad fueron demostradas ya y se resumen en los siguientes dos teoremas:

- Para el sub-sistema lento.

Teorema 5.1 *Empleando las siguientes leyes de aprendizaje:*

$$\begin{aligned}\dot{\widehat{W}}_t &= -2d_t K_w \sigma(\widehat{V}_t^T s) \bar{x}_2^T - 2d_t K_w D_\sigma \widehat{V}_t^T s \bar{x}_2^T \\ \dot{\widehat{V}}_t &= -2d_t K_v s \bar{x}_2^T \widehat{W}_t^T D_\sigma + 2d_t l K_v s s^T \widehat{V}_t \Lambda_3\end{aligned}$$

para la red neuronal en el control:

$$u = -K_p(x_1 - x_1^d) - K_d(x_2 - x_2^d) + \widehat{W} \Phi(\widehat{V} s) \quad (5.15)$$

donde $s^T = (1, x_1^T, x_2^T)^T$, $0 < \Lambda_1 = \Lambda_1^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$,

$$\begin{aligned}P_0 &= \begin{bmatrix} M(x_1) & 0 \\ 0 & K_p \end{bmatrix} \\ d_t &:= \left[\frac{1}{2} - \mu \left\| P_0^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{x}_1 \end{bmatrix} \right\|^{-1} \right]_+ \\ \mu &= \frac{\chi^2}{4\lambda_{\min}(\Gamma)} \lambda_{\min} \left(P_0^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P_0^{-\frac{1}{2}} \right)\end{aligned}$$

$$[z]_+ = \begin{cases} z & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{cases} \quad (5.16)$$

y habiendo definido:

$$\begin{aligned}\Gamma &:= K_d - \frac{1}{4} \Lambda_1^{-1} - k_c \|\bar{x}_2^d\| I - R, \quad R = R^T > 0 \\ \chi &:= \bar{\eta} + k_c \|\bar{x}_2^d\|^2 + \lambda_{\max}(M) \left\| \bar{x}_2^d \right\|\end{aligned}$$

Entonces, el punto de equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0)$ de (5.12) es estable y además:

- (I) Los pesos de la red neuronal $\widehat{W}_t, \widehat{V}_t$ están acotados.

(II) Para cualquier $T \in (0, \infty)$ el error de seguimiento \bar{x}_2 satisface el siguiente índice de desempeño:

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T d_t \bar{x}_2^T R \bar{x}_2 dt \leq \frac{\chi^2}{8\lambda_{\min}(\Gamma)}$$

Observación 5.4 Se debe recordar que para el sistema lento (5.12), el estado x_2 si está disponible. Por lo tanto el control (5.4) se transforma en (5.15).

- Para el sub-sistema rápido.

Teorema 5.2 El punto de equilibrio $(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = (0, 0)$ de (5.13) es asintóticamente estable.

Observación 5.5 En la prueba de estabilidad de (5.13), se hace uso de la siguiente relación:

$$A^T P + P A = -Q \quad (5.17)$$

donde Q y $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$ son matrices constantes definidas positivas. $A = \begin{bmatrix} -H_p & I \\ -H_v & 0 \end{bmatrix}$ definida como en (3.9) y (5.3). Es claro que $P_{22} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ puede seleccionarse libremente mientras satisface que P sea una matriz constante definida positiva y (5.17).

5.2.2 Análisis de estabilidad del sistema completo.

Resta entonces, probar la estabilidad del sistema completo (5.10) empleando como función candidata de Lyapunov la combinación convexa de la funciones de Lyapunov de los dos teoremas anteriores.

Observación 5.6 Una de las contribuciones de éste trabajo es proponer una nueva ley de aprendizaje para una red neuronal de funciones radiales básicas, que no requiera de entrenamiento previo.

Dicha ley es:

$$\begin{aligned} \dot{\widehat{W}}_t &= -\frac{2}{(1-d)} d_t K_w \sigma(\widehat{V}_t^T s) \Psi^T - \frac{2}{(1-d)} d_t K_w D_\sigma \widehat{V}_t^T s \Psi^T \\ \dot{\widehat{V}}_t &= -\frac{2}{(1-d)} d_t K_v s \Psi^T \widehat{W}_t^T D_\sigma + \frac{2}{(1-d)} d_t l K_v s s^T \widehat{V}_t \Lambda_3 \end{aligned} \quad (5.18)$$

donde

$$\Psi = 2d\varepsilon\eta_M (x_1 - \widehat{x}_1)^T P_{12} - 2d\varepsilon^2\eta_M \widehat{x}_2^T P_{22} - (1-d)x_2^{dT} \quad (5.19)$$

$$P_1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-d)K_p & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-d)M & 0 \\ 0 & 0 & dP \end{bmatrix}$$

$$d_t := \left[1 - \mu \left\| P_1^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \tilde{z} \end{bmatrix} \right\|^{-1} \right]_+$$

$$\mu = \frac{(a-(1-d)2d_t\|\bar{x}_2\|(\lambda_{\min}(K_d)\|\bar{x}_2\|-b))}{\lambda_{\min}\left(P_1^{-\frac{1}{2}}R_1P_1^{-\frac{1}{2}}\right)}, \quad R_1 = R_1^T > 0$$

$$y := \begin{bmatrix} \|\bar{x}\| \\ \|\tilde{z}\| \end{bmatrix}, \quad a := \bar{\Psi}\bar{\eta} + \frac{\lambda_{\max}(\Lambda_1^{-1})}{4}\bar{\Psi}^2, \quad b := k_c^2\bar{x}_2^{d2} + \lambda_{\max}(M)\bar{x}_2^{\overline{d}}$$

$$\bar{\Psi} \geq 2d\varepsilon\eta_M \|\tilde{x}_1\| \|P_{12}\| + 2d\varepsilon^2\eta_M \|\widehat{x}_2\| \|P_{22}\| + (1-d)\bar{x}_2^{\overline{d}}$$

$$\eta_M = \sup \|M^{-1}(x_1)\|, \quad 0 < d < 1$$

El operador $[z]_+$ definido como en (5.16).

El siguiente teorema establece las propiedades de estabilidad del equilibrio $(\bar{x}, \tilde{z}) = (0, 0)$ de (5.10) usando el control (5.4) y la ley de aprendizaje (5.18).

Teorema 5.3 *Si existe una matriz constante P_{22} tal que satisfaga (5.17) y al mismo tiempo*

$$P_{22} = -\frac{2(1-d)}{4d\varepsilon^2\eta_M}I \quad (5.21)$$

y además exista un intervalo continuo $\Gamma = (0, \bar{\varepsilon})$ tal que para toda $\varepsilon \in \Gamma$ se satisfaga:

$$\left(\frac{d^2K_2^2}{2}\right)\varepsilon^4 + ((1-d)d\beta_1K_2)\varepsilon^2 + ((1-d)\alpha_1K_1)\varepsilon + \frac{(1-d)^2\beta_1^2}{2} - (1-d)d\alpha_1\alpha_2 < 0 \quad (5.22)$$

Entonces, la ley de aprendizaje (5.18) para la red neuronal en (5.4) hará que el punto de equilibrio $(\bar{x}, \tilde{z}) = (0, 0)$ de (5.10) sea estable y además:

(I) *Los pesos $\widehat{W}_t, \widehat{V}_t$ están acotados.*

(II) Para cualquier $T \in (0, \infty)$ el error de identificación y converge al conjunto

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y^T R_1 y dt \leq a - (1-d)2d_t \|\bar{x}_2\| (\lambda_{\min}(K_d) \|\bar{x}_2\| - b) \quad (5.23)$$

Prueba. Considere la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$\begin{aligned} V_3 &= (1-d)V_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + dV_2(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) \\ &= (1-d) \left[\frac{1}{2} \bar{x}_2^T M(x_1) \bar{x}_2 + \frac{1}{2} \bar{x}_1^T K_p \bar{x}_1 + \frac{1}{2} \text{tr} \left(\tilde{W}_t^T K_w^{-1} \tilde{W}_t \right) + \frac{1}{2} \text{tr} \left(\tilde{V}_t^T K_v^{-1} \tilde{V}_t \right) \right] \\ &\quad + d \tilde{z}^T P \tilde{z} \end{aligned} \quad (5.24)$$

donde $0 < d < 1$ y V_1, V_2 definidas en (4.16), (3.24). En éste punto es posible ver como V_3 es la combinación convexa de V_1 y de V_2 .

La ecuación (5.24) puede escribirse de la forma:

$$\begin{aligned} V_3 &= \left[\left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-d)K_p & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-d)M & 0 \\ 0 & 0 & dP \end{bmatrix} \right\|^{\frac{1}{2}} \left\| \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \tilde{z} \end{bmatrix} \right\| - \mu \right]^2 \\ &\quad + (1-d) \left[\frac{1}{2} \text{tr} \left(\tilde{W}_t^T K_w^{-1} \tilde{W}_t \right) + \frac{1}{2} \text{tr} \left(\tilde{V}_t^T K_v^{-1} \tilde{V}_t \right) \right] \end{aligned} \quad (5.25)$$

La derivada de V_3 con respecto al tiempo es:

$$\begin{aligned} &2 \left[\left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-d)K_p & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-d)M & 0 \\ 0 & 0 & dP \end{bmatrix} \right\|^{\frac{1}{2}} \left\| \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \tilde{z} \end{bmatrix} \right\| - \mu \right]^2 \\ &\quad \left[(1-d) \left(\bar{x}_2^T M \dot{\bar{x}}_2 + \frac{1}{2} \bar{x}_2^T \dot{M} \bar{x}_2 + \bar{x}_2^T K_p \dot{\bar{x}}_1 \right) + 2d \tilde{z}^T P \dot{\tilde{z}} \right] \\ &\quad + (1-d) \left[\text{tr} \left(\tilde{W}_t^T K_w^{-1} \dot{\tilde{W}}_t \right) + \text{tr} \left(\tilde{V}_t^T K_v^{-1} \dot{\tilde{V}}_t \right) \right] \end{aligned} \quad (5.26)$$

habiendo usado el lema del apéndice C.

En lo que sigue de la prueba, es necesario escribir las últimas dos líneas de (5.10) con la siguiente forma matricial:

$$\dot{\tilde{z}} = \frac{1}{\varepsilon} A \tilde{z} + \varepsilon B H(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_1^d, x_2^d, \tilde{x}_2)$$

donde $H(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_1^d, x_2^d, \tilde{x}_2)$ está definida en (5.11).

De (5.10) es posible hacer:

$$\dot{\bar{x}}_2 = \left[H(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_1^d, x_2^d, 0) - \dot{x}_2^d \right] + \left[H(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_1^d, x_2^d, \tilde{x}_2) - H(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_1^d, x_2^d, 0) \right]$$

y

$$H(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_1^d, x_2^d, \tilde{x}_2) - H(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_1^d, x_2^d, 0) = \frac{1}{\varepsilon} M^{-1} K_d \tilde{z}_2 \quad (5.27)$$

Así que (5.26), evaluada a lo largo de las trayectorias de (5.10), es:

$$\begin{aligned} & (1-d)2d_t \left[\bar{x}_2^T M H(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_1^d, x_2^d, 0) + \bar{x}_2^T \dot{M} \bar{x}_2 + \bar{x}_2^T K_p \bar{x}_1^T \right] \\ & + (1-d) \left[tr \left(\tilde{W}_t^T K_w^{-1} \dot{\tilde{W}}_t \right) + tr \left(\tilde{V}_t^T K_v^{-1} \dot{\tilde{V}}_t \right) \right] \\ & + (1-d) 2d_t \frac{1}{\varepsilon} \bar{x}_2^T M^{-1} K_d \tilde{z}_2 \\ & + 2d_t \left(\frac{d}{\varepsilon} [\tilde{z}^T (PA + A^T P) \tilde{z}] + [2d\varepsilon \tilde{z}^T P B H(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_1^d, x_2^d, \tilde{x}_2)] \right) \end{aligned}$$

donde d_t está definida en (5.20).

Se puede ver que los dos primeros renglones, del lado derecho de la igualdad anterior, son similares a (4.19), la cual corresponde al sistema (5.12). Por lo tanto, es posible usar los resultados obtenidos en el capítulo 4, es decir:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 = & (1-d)2d_t \left[-\bar{x}_2^T M \dot{x}_2^d - \bar{x}_2^T C x_2^d - \bar{x}_2^T K_d \bar{x}_2 \right] \\ & - (1-d)2d_t \bar{x}_2^T \left[-\widehat{W}_t \Phi(\widehat{V}_t s) + W^* \Phi(V^* s) + \tilde{P} \right] \\ & + (1-d) \left[tr \left(\tilde{W}_t^T K_w^{-1} \dot{\tilde{W}}_t \right) + tr \left(\tilde{V}_t^T K_v^{-1} \dot{\tilde{V}}_t \right) \right] \\ & + (1-d) 2d_t \frac{1}{\varepsilon} \bar{x}_2^T M^{-1} K_d \tilde{z}_2 \\ & + 2d_t \left(-\frac{d}{\varepsilon} [\tilde{z}^T Q \tilde{z}] + [2d\varepsilon \tilde{z}^T P B H(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_1^d, x_2^d, \tilde{x}_2)] \right) \end{aligned}$$

De (5.11) es posible obtener que:

$$\begin{aligned} 2d\varepsilon \tilde{z}^T P B H = & -2d\varepsilon \tilde{z}^T P B M^{-1} (C x_2 + K_p \bar{x}_1 + K_d \bar{x}_2 - K_d \tilde{x}_2) \\ & - 2d\varepsilon \tilde{z}^T P B M^{-1} \left(-\widehat{W} \Phi(\widehat{V} s) + W^* \Phi(V^* s) + \tilde{P} \right) \end{aligned} \quad (5.28)$$

El último término de (5.28) tiene la misma estructura que el último término de (4.18), por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_3 = & \left[(1-d)2d_t\bar{x}_2^T + 4d_t d\varepsilon \tilde{z}^T P B M^{-1} \right] \left[\widehat{W} \Phi(\widehat{V}s) - W^* \Phi(V^*s) - \tilde{P} \right] \\
& + (1-d) \left[\text{tr} \left(\widetilde{W}_t^T K_w^{-1} \dot{\widetilde{W}}_t \right) + \text{tr} \left(\widetilde{V}_t^T K_v^{-1} \dot{\widetilde{V}}_t \right) \right] \\
& + (1-d)2d_t \left[-\bar{x}_2^T M \overset{d}{x}_2 - \bar{x}_2^T C x_2^d - \bar{x}_2^T K_d \bar{x}_2 \right] + (1-d)\frac{1}{\varepsilon} 2d_t \bar{x}_2^T M^{-1} K_d \tilde{z}_2 \\
& - 2d_t d \frac{1}{\varepsilon} \tilde{z}^T Q \tilde{z} + 4d_t d \varepsilon \tilde{z}^T P B M^{-1} (-C x_2 - K_p \bar{x}_1 - K_d \bar{x}_2 + K_d \tilde{x}_2)
\end{aligned} \tag{5.29}$$

También es posible hacer:

$$\begin{aligned}
& (1-d)2d_t\bar{x}_2^T + 4d_t d\varepsilon \tilde{z}^T P B M^{-1} \\
& = (1-d)2d_t(x_2 - x_2^d)^T + 4d_t d\varepsilon \eta_M (x_1 - \widehat{x}_1)^T P_{12} + 4d_t d\varepsilon^2 \eta_M (x_2 - \widehat{x}_2)^T P_{22} \\
& = d_t x_2^T [2(1-d)I + 4d\varepsilon^2 \eta_M P_{22}] + 4d_t d\varepsilon \eta_M (x_1 - \widehat{x}_1)^T P_{12} \\
& - 4d_t d\varepsilon^2 \eta_M \widehat{x}_2^T P_{22} - (1-d)2d_t x_2^{dT}
\end{aligned}$$

donde $\eta_M = \sup \|M^{-1}(x_1)\|$. Usando (5.21), $2(1-d)I + 4d\varepsilon^2 \eta_M P_{22}$ es idénticamente cero.

De la ecuación (4.20):

$$-\widehat{W} \Phi(\widehat{V}s) + W^* \Phi(V^*s) + \tilde{P} = \widetilde{W}_t^T \Phi(\widehat{V}_t^T s) + \widehat{W}^T D_\sigma \widetilde{V}_t^T s + \widetilde{W}^T D_\sigma \widetilde{V}_t^T s + W^* \nu_\sigma + \tilde{P}$$

Los dos primeros renglones de (5.29) pueden escribirse de la forma:

$$L_{w1} + L_{v1} - 2d_t \Psi^T (W^* \nu_\sigma + \tilde{P}) \tag{5.30}$$

donde Ψ está definido en (5.19) y:

$$\begin{aligned}
L_{w1} & := \text{tr} \left[\left(K_w^{-1} \dot{\widetilde{W}}_t - \frac{2}{(1-d)} d_t \sigma (\widehat{V}_t^T s) \Psi^T - \frac{2}{(1-d)} d_t D_\sigma \widetilde{V}_t^T s \Psi^T \right) \widetilde{W}^T \right] \\
L_{v1} & := \text{tr} \left[\left(K_v^{-1} \dot{\widetilde{V}}_t - \frac{2}{(1-d)} d_t s \Psi^T \widehat{W}_t^T D_\sigma \right) \widetilde{V}^T \right]
\end{aligned}$$

De manera similar a (4.22), $-\Psi^T (W^* \nu_\sigma + \tilde{P})$ se puede acotar por:

$$-\Psi^T (W^* \nu_\sigma + \tilde{P}) \leq \|\Psi\| \bar{\eta} + \frac{1}{4} \Psi^T \Lambda_1^{-1} \Psi + l \left\| \widetilde{V}_t^T x \right\|_{\Lambda_3}^2 \tag{5.31}$$

donde $0 < \Lambda = \Lambda^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $\Lambda_3 := W^* \Lambda_1 W^{*T}$, $\bar{\eta}$ definida en (5.9) y Λ_1 elegida para que satisfaga (4.21).

El último término de (5.31) se puede unir a (5.30). Con la ley de aprendizaje (5.18), (5.30) y el último término de (5.31), (5.29) se transforma en:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 \leq & \|\Psi\| \bar{\eta} + \frac{1}{4} \Psi^T \Lambda_1^{-1} \Psi - 4d_t d \varepsilon \tilde{z}^T P B M^{-1} (C(x_1, x_2) x_2 + K_p \bar{x}_1 + K_d \bar{x}_2 - K_d \tilde{x}_2) \\ & + (1-d) 2d_t \left[-\bar{x}_2^T M \dot{x}_2^d - \bar{x}_2^T C x_2^d \right] + (1-d) \frac{1}{\varepsilon} 2d_t \bar{x}_2^T \eta_M K_d \tilde{z}_2 - (1-d) 2d_t \bar{x}_2^T K_d \bar{x}_2 - 2d_t d \frac{1}{\varepsilon} \tilde{z}^T Q \tilde{z} \end{aligned} \quad (5.32)$$

Por otro lado, $\left[-\bar{x}_2^T M \dot{x}_2^d - \bar{x}_2^T C x_2^d \right]$ se puede acotar como se hizo en (4.23):

$$-\bar{x}_2^T M \dot{x}_2^d - \bar{x}_2^T C x_2^d \leq -\bar{x}_2^T Q_q \bar{x}_2 + k_c \|x_2^d\|^2 \|\bar{x}_2\| + \lambda_{\max}(M) \left\| \dot{x}_2^d \right\| \|\bar{x}_2\|$$

donde $Q_q \in R^1$ tal que $C(x_1, x_2^d) < Q_q I$, k_c satisface $\|C(x_1, x_2^d)\| \leq k_c \|x_2^d\|$ haciendo uso de las propiedades de la matriz de Coriolis. Del mismo modo, $d \varepsilon \tilde{z}^T P B M^{-1} (C x_2)$ se transforma en:

$$d \varepsilon \tilde{z}^T P B M^{-1} [C(x_1, x_2) x_2] \leq 2d \varepsilon \tilde{z}^T P B M^{-1} C_0(x_1) \bar{x}_2$$

donde $C_0 = C_0(x_1) < \infty$, empleando las propiedades de la matriz de Coriolis.

Acotando el siguiente término:

$$\begin{aligned} & 4d_t d \varepsilon \tilde{z}^T P B M^{-1} [2C_0(x_1) \bar{x}_2 + K_p \bar{x}_1 + K_d \bar{x}_2 - K_d \tilde{x}_2] \\ \leq & 4d_t d \varepsilon \eta_M \tilde{z}^T P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_p & K_d + 2C_0 \end{bmatrix} \bar{x} - 4d_t d \eta_M \tilde{z}^T P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_d \end{bmatrix} \tilde{z} \end{aligned}$$

(5.32) se convierte en:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 \leq & -y^T T y + a + (1-d) 2d_t (b \|\bar{x}_2\| - \lambda_{\min}(K_d) \|\bar{x}_2\|^2) \\ = & -2d_t y^T T_0 y + a - (1-d) 2d_t \|\bar{x}_2\| (\lambda_{\min}(K_d) \|\bar{x}_2\| - b) - y^T R_1 y \end{aligned} \quad (5.33)$$

donde

$$T = 2d_t T_0 - R_1 = 2d_t \begin{bmatrix} (1-d)\alpha_1 & -\frac{(1-d)\beta_1}{2\varepsilon} - \frac{\varepsilon d K_2}{2} \\ -\frac{(1-d)\beta_1}{2\varepsilon} - \frac{\varepsilon d K_2}{2} & d \left[\frac{\alpha_2}{\varepsilon} - K_1 \right] \end{bmatrix} - R_1$$

$$y = \begin{bmatrix} \|\bar{x}\| \\ \|\tilde{z}\| \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = \left\| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_q \end{bmatrix} \right\|, \alpha_2 = \|Q\|, \beta_1 = \left\| \eta_M \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_d \end{bmatrix} \right\|$$

$$K_1 = \left\| 2\eta_M P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_d \end{bmatrix} \right\|, K_2 = \left\| 2\eta_M P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_p & K_d + 2C_0 \end{bmatrix} \right\|$$

La matriz T_0 es definida positiva si existe un intervalo continuo $\Gamma = (0, \bar{\varepsilon})$ tal que para toda $\varepsilon \in \Gamma$ se satisface (5.22). Y $\bar{\varepsilon}$ será la cota superior del parámetro de alta ganancia ε .

Finalmente, (5.33) queda como:

$$\dot{V}_3 \leq (a - (1-d)2d_t \|\bar{x}_2\| (\lambda_{\min}(K_d) \|\bar{x}_2\| - b)) - y^T R_1 y \quad (5.34)$$

El lado derecho de (5.34) puede ser estimada de la siguiente forma:

$$\dot{V}_3 \leq -\lambda_{\min} \left(P_1^{-\frac{1}{2}} R_1 P_1^{-\frac{1}{2}} \right) \left[\left\| P_1^{\frac{1}{2}} y \right\| - \mu \right] \leq 0$$

donde μ está definida en (5.20). Es importante notar que $y = \begin{bmatrix} \|\bar{x}\| \\ \|\tilde{z}\| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\| \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \right\| \\ \|\tilde{z}\| \end{bmatrix}$.

Integrando (5.34) de 0 a $T > 0$, se obtiene:

$$V_{3,T} - V_{3,0} \leq - \int_0^T [y^T R_1 y - \zeta] dt$$

donde $\zeta = a - (1-d)2d_t \|\bar{x}_2\| (\lambda_{\min}(K_d) \|\bar{x}_2\| - b)$. De donde es posible decir:

$$\int_0^T y^T R_1 y dt \leq V_{3,0} - V_{3,T} + \zeta T \leq V_{3,0} + \zeta T$$

Dado que $V_{3,0}$ es acotada porque $\widetilde{W}_t = W^*$ y $\widetilde{V}_t = V^*$, (5.23) es probada. ■

Observación 5.7 Como consecuencia de no poder medir $\begin{bmatrix} \bar{x}_1^T & \bar{x}_2^T & \tilde{z}^T \end{bmatrix}^T$ (porque existe una dependencia del estado x_2), la zona muerta (dead zone) d_t en (5.20) no se puede implementar. Para resolver esto, se hace uso de las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \|\bar{x}_i\| &\leq \|\hat{x}_i - x_i^d\| + 2\epsilon^2 C_T \\ \|\tilde{x}_i\| &\leq 2\|\hat{x}_i - x_i^d\| + 2\epsilon^2 C_T \end{aligned}$$

donde $i = 1, 2$, C_T está definida en (3.14) y siendo los estados \hat{x}_i y x_i^d medibles. De esta forma, la nueva zona muerta queda definida por:

$$d_t := \left[\begin{array}{c} \left\| \left[\begin{array}{c} \bar{x}_1 \\ \hat{x}_2 - x_2^d + 2\epsilon^2 C_T \\ \tilde{z}_1 \\ 2\epsilon(\hat{x}_2 - x_2^d) + 2\epsilon^3 C_T \end{array} \right] \right\|^{-1} \\ 1 - \mu \left\| P_1^{\frac{1}{2}} \right\| \end{array} \right]_+$$

Debe recordarse que, a diferencia de x_2 , el estado x_1 es medible.

5.3 Simulaciones.

El robot manipulador que se considerará es el mismo que fue explicado en el capítulo de *Preliminares, valores numéricos de un robot manipulador*.

En éste capítulo sólo se añaden los valores numéricos que corresponden a los parámetros del control PD, la red neuronal y el observador de alta ganancia. Así como los valores de las trayectorias deseadas.

5.3.1 Valores de las ganancias del control y parámetros de la red neuronal.

Se seleccionaron las siguientes ganancias para el PD:

$$\begin{aligned} K_p &= \begin{bmatrix} 24950 & 0 \\ 0 & 40050 \end{bmatrix}, \quad K_d = \begin{bmatrix} 9630 & 0 \\ 0 & 9630 \end{bmatrix} \\ H_p = H_v &= \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$W^* \equiv V^* \equiv 0$$

Aunque la red neuronal necesita de pesos iniciales, estos pueden tomar cualquier valor. No es necesario investigar las características del manipulador antes de aplicar el control, ni de entrenar previamente a la red neuronal. Aunque si es necesario seleccionar el valor de las ganancias proporcional y derivativas antes de accionar a la red neuronal.

Seleccionando $d = 0.5$ y considerando un valor de $0.001 < \epsilon < 1$, la elección:

$$P_{22} = \begin{bmatrix} -1.1 & 0 \\ 0 & -1.1 \end{bmatrix}$$

hace que (5.21) se satisfaga.

Los valores de las matrices P y Q son:

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1.5 \\ -5 & 0 & -1.1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -1.1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 65 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 65 & 0 & 0 \\ -66 & 0 & 3.5 & 0 \\ 0 & -66 & 0 & 3.5 \end{bmatrix}$$

5.3.2 Cálculo de la cota superior del parámetro ϵ del observador de alta ganancia.

Dada la información anterior, el cálculo de las constantes de (5.22) dió por resultado:

$$\alpha_1 = \left\| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_q \end{bmatrix} \right\| = 5003780298, \alpha_2 = \|Q\| = 92.6673$$

$$K_1 = \left\| 2\eta_M P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_d \end{bmatrix} \right\| = 3582600$$

$$K_2 = \left\| 2\eta_M P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_p & K_d + 2C_0 \end{bmatrix} \right\| = 15324000$$

$$\beta_1 = \left\| \eta_M \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_d \end{bmatrix} \right\| = 963000, C_0 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\eta_M = 100, k_c = 4$$

donde $\|A\| = [\lambda_{\max}(A^T A)]^{\frac{1}{2}}$ denota la norma 2 inducida.

El polinomio (5.22) está dado por:

$$f(\epsilon) = 1.174 \times 10^{14} d^2 \epsilon^4 + 1.4757 \times 10^{13} (1-d) d \epsilon^2 + 14330400 (1-d) \epsilon + 463684500000 (1-d)^2 - 463686810000 (1-d) d \quad (5.35)$$

Con un valor de $d = 0.5$, el polinomio (5.35) se muestra en la figura 5-1.

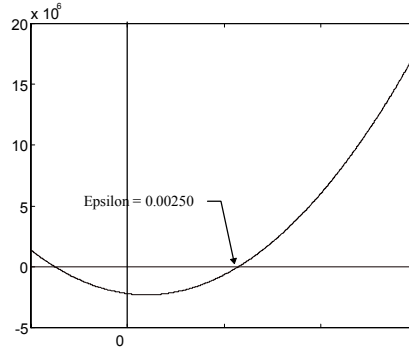


Figura 5-1: Polinomio de épsilon.

Por lo tanto, con los valores de $0 < \epsilon < 0.00250$ el polinomio (5.35) es negativo. Siendo $\bar{\epsilon} = 0.00250$, i. e., $\Gamma = (0, 0.00250)$.

La incorporación de la compensación neuronal reduce la cota sobre ϵ porque se requiere que el observador sea más rápido para que la red neuronal pueda aprender de manera correcta, i. e. el aprendizaje de la red neuronal debe considerar que los datos de entrada son correctos, de lo contrario estaría aprendiendo sobre un conjunto de entrada erróneo.

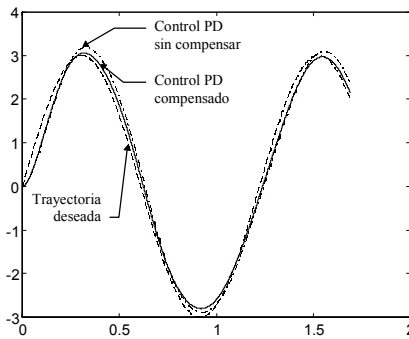


Figura 5-2: Seguimiento del primer eslabón.

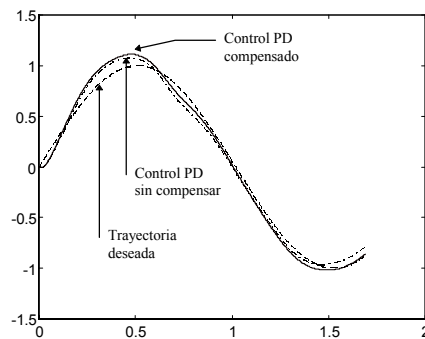


Figura 5-3: Seguimiento del segundo eslabón.

5.3.3 Resultados de las simulaciones para el seguimiento de trayectorias.

Se usó el valor de $\epsilon = 0.0023$ para el observador de alta ganancia (5.2). Cada eslabón del robot debe seguir una trayectoria senoidal, de frecuencia y amplitud diferentes.

El desempeño del control aquí propuesto (5.4) se compara con un control PD sin ningún tipo de compensación. Ambos controles hacen uso del observador de alta ganancia (5.2) para la medición de la velocidad del robot.

La figura 5-2 y la figura 5-3 muestran el seguimiento de trayectoria del eslabón 1 y 2 del manipulador respectivamente.

En las gráficas siguientes, la línea segmentada representa la trayectoria deseada, la línea continua al control PD con compensación neuronal y la línea segmentada con puntos al control PD sin compensar.

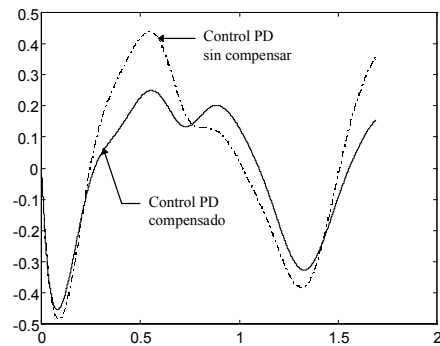


Figura 5-4: Error de seguimiento del primer eslabón.

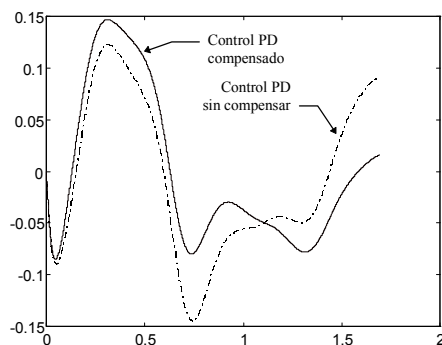


Figura 5-5: Error de seguimiento del segundo eslabón.

Hasta el momento es posible ver que existe un error de seguimiento para ambos controles. Las gráficas siguientes (figuras 5-4 y 5-5) muestran el comportamiento de dicho error de seguimiento, para el primer y segundo eslabón, con el propósito de observar mejor el desempeño del control (5.4).

Para una mejor visualización del error de seguimiento, las figuras 5-6 y 5-7 muestran el valor cuadrático del error de seguimiento.

Tomando como referencia el error de seguimiento, es posible ver que el desempeño del control PD compensado es mejor. El tiempo de aprendizaje de la red neuronal se refleja en el segundo eslabón, donde el desempeño del control compensado es mayor para posteriormente ir disminuyendo.

Por último, las figuras 5-8 y 5-9 muestran el comportamiento de los pesos, de dos nodos en la capa oculta, de la red neuronal (5.6). En ellas se aprecia que los pesos son acotados.

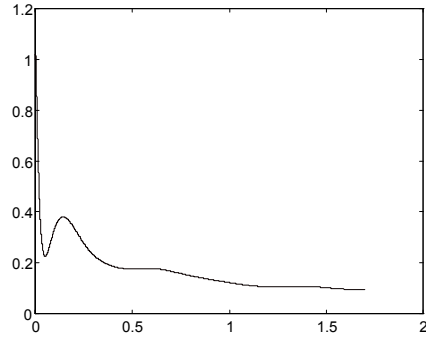


Figura 5-6: Índice de desempeño del primer eslabón.

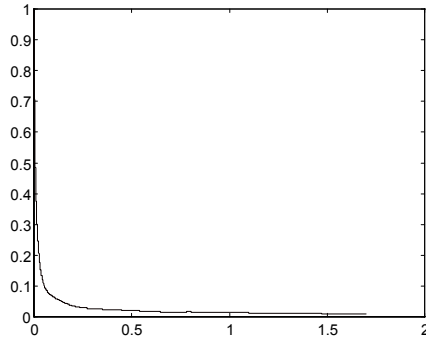


Figura 5-7: Índice de desempeño del segundo eslabón.

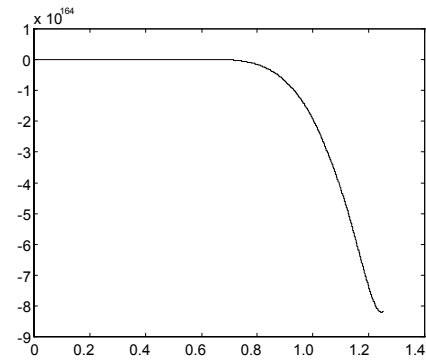


Figura 5-8: Comportamiento del peso de un nodo en la capa oculta de la red neuronal.

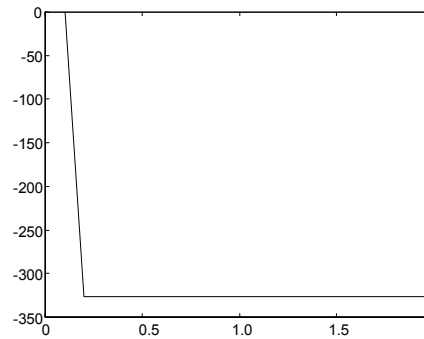


Figura 5-9: Comportamiento del peso de un nodo en la capa oculta de la red neuronal.

5.4 Comentario final.

En éste capítulo se examinó el comportamiento en lazo cerrado del robot manipulador (5.1), el observador de alta ganancia (5.2) y el control (5.4) para el seguimiento de trayectorias. Éste último, tomando como referencias a [28] y [32]. Se mostró que el sistema en lazo cerrado es localmente estable bajo ciertas suposiciones y sin necesidad de medir la velocidad de los eslabones del robot.

Dado que no es posible hacer que el observador (5.2) tomé como valor $\varepsilon = 0$, es necesario encontrar una cota superior, $\bar{\varepsilon}$, tal que la estabilidad de todo el sistema se siga manteniendo. Para ello, se propuso una versión de [20].

Los resultados mostrados en éste capítulo presentan las siguientes ventajas: (1) un control PD compensado neuronalmente de fácil implementación; (2) un observador independiente de la dinámica no-lineal del robot manipulador; (3) nuevas leyes de aprendizaje para una red neuronal de funciones radiales básicas.

Las leyes de aprendizaje (5.18) se componen de dos términos. El primero es la versión continua del algoritmo de propagación hacia atrás (backpropagation) y el segundo es un término específico de éste capítulo.

Es importante mencionar que la red neuronal, aquí propuesta, no requiere de entrenamiento previo ni de pesos iniciales especiales, lo cual facilita su implementación. Los valores de los pesos iniciales, W^* y V^* , van a determinar el valor inicial del error de estimación \tilde{P} . Y esto va afectar el tiempo de convergencia de la red neuronal a su punto óptimo. Si los pesos iniciales son muy diferentes a los pesos óptimos, el aprendizaje de la red va a ser mayor que si los pesos iniciales son próximos a los óptimos.

A diferencia de las leyes de aprendizaje (4.12), las leyes de aprendizaje (5.18) requieren del conocimiento de una cota superior de la matriz de inercia de la dinámica del manipulador. Se incluyeron unas simulaciones para ilustrar el desempeño del controlador (5.4).

Capítulo 6

Conclusiones.

Éste trabajo analiza las propiedades de estabilidad de un control PD con compensación neuronal y un observador de alta ganancia para resolver el problema de seguimiento de trayectorias de un robot manipulador. Y contribuir con una solución más a las dos desventajas del control PD:

1. Se requiere la medición de la velocidad de cada eslabón del robot.
2. Es necesario compensar la gravedad y las dinámicas no modeladas para que el robot pueda seguir una trayectoria.

Como se enfatizó al inicio de la tesis, el observador de alta ganancia propuesto en [17] fue una elección adecuada para estimar la derivada de los estados del manipulador, es decir, estimar la velocidad del robot. Posteriormente, la prueba de estabilidad mostró que el observador estima los estados del robot en forma exacta. La cota sobre el parámetro de alta ganancia proporciona una herramienta más para poder implementar éste observador en un robot real porque proporciona un rango de valores específicos en lugar de pedir un valor pequeño, cuya interpretación queda incierta. Y para hacer un mayor énfasis en el desempeño que éste observador de alta ganancia tiene, se mostraron los resultados de comparar ese observador con un observador de Luenberger y con un tacómetro. La comparación anterior puso en relieve las características del observador de alta ganancia:

1. Su fácil implementación porque es independiente de la dinámica del sistema a observar.
2. Su sensibilidad a perturbaciones como consecuencia de hacer ϵ muy pequeña.

En cuanto a la red neuronal, la prueba de estabilidad muestra que el sistema es estable; pero las simulaciones reflejan un buen desempeño del control, claro que éste buen desempeño depende de las ganancias proporcional y derivativa del control PD y de los parámetros específicos de cada robot. Por lo que no se puede esperar que el control tenga siempre un excelente desempeño.

Las leyes de aprendizaje que se proponen, para la red neuronal, basan su funcionamiento en el algoritmo de propagación hacia atrás (backpropagation) porque son la versión continua de éste, siendo los términos extras pequeños en comparación con los primeros.

Es importante mencionar que la red neuronal, aquí propuesta, no requiere de entrenamiento previo antes de incluirse en el control PD ni de pesos iniciales especiales, lo cual facilita su implementación. Los valores de los pesos iniciales, W^* y V^* , van a determinar el valor inicial del error de estimación \tilde{P} y esto afectará el tiempo de convergencia de la red neuronal a su punto óptimo.

Al igual que en [28], si la red neuronal fuese cero el control PD haría el trabajo de controlar al sistema en forma adecuada. Y mientras mejor se desempeñe la red neuronal menor va a ser el error de seguimiento. Es decir, la parte fuerte de control la realiza el control PD.

La teoría de sistemas singularmente perturbados permitió ir construyendo y probando cada parte del control en forma independiente, es decir, primero el control PD compensado, luego el observador de alta ganancia y por último la red neuronal de funciones radiales básicas. Éste enfoque facilita el análisis teórico y proporciona una forma de obtener la función candidata de Lyapunov que probará la estabilidad del sistema completo (como una combinación convexa de las funciones de Lyapunov de los sub-sistemas). En el momento de derivar la función de Lyapunov completa y evaluarla a lo largo de las trayectorias del sistema, se pueden emplear los resultados obtenidos en el estudio de cada sub-sistema independiente y quedarse únicamente con los términos de interconexión, tal como lo muestra [20].

Las contribuciones de ésta tesis son:

1. Proporcionar la prueba formal de estabilidad que falta en el trabajo de [18]
2. Adecuar el trabajo de [20] a un robot manipulador con un control PD compensado y un observador de alta ganancia.
3. Contribuir con una solución más a las dos desventajas del control PD, planteadas al

inicio de esta tesis, independientes de la dinámica del robot.

4. Encontrar una cota del parámetro de alta ganancia del observador, para no pedir un valor pequeño cuya interpretación queda incierta.
5. Una nueva ley de aprendizaje para una red neuronal de funciones radiales básicas, que no requiere de entrenamiento previo.
6. Condiciones necesarias para aplicar el control PD propuesto (5.4) a un robot manipulador con el observador de alta ganancia (5.2).

Capítulo 7

Apéndices.

7.1 Apéndice A. Prueba de la condición de Lipschitz, [31].

Las funciones de activación sigmoideas, para las redes neuronales, pueden tener la estructura siguiente:

$$\sigma(z) = e^{-\frac{(z-m)^2}{s}} \quad (7.1)$$

donde m y s son constantes positivas.

La función anterior fue usada en esta tesis. Dicha función satisface lo siguiente:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_t &:= \sigma(V^{*T}x) - \sigma(\widehat{V}_t^T x) = D_\sigma \widetilde{V}_t^T x + \nu_\sigma, \\ D_\sigma &= \frac{\partial \sigma^T(Z)}{\partial Z} \Big|_{Z=\widehat{V}_t^T x}, \quad \|\nu_\sigma\|_\Lambda^2 \leq l \left\| \widetilde{V}_t^T x \right\|_\Lambda^2, \quad l > 0 \end{aligned}$$

donde W^* , V^* son matrices constantes; \widehat{W}_t , \widetilde{V}_t son matrices variantes en el tiempo; $\widetilde{W}_t \equiv W^* - \widehat{W}_t$, $\widetilde{V}_t \equiv V^* - \widehat{V}_t$; Λ es una matriz definida positiva; y $\sigma(\cdot)$ es la función de activación sigmoideal (7.1) que satisface la condición de Lipschitz. Esta suposición es válida y se da la prueba a continuación.

Lema 7.1 *Para cualquier función vectorial diferenciable $g(x) \in \mathfrak{R}^m$, ($x \in \mathfrak{R}^n$) que además satisfaga la condición de Lipschitz globalmente, i.e. exista una constante positiva L_g tal que*

$$\|g(x_1) - g(x_2)\| \leq L_g \|x_1 - x_2\|, \forall x_1, x_2 \in \mathfrak{R}^n \quad (7.2)$$

para toda $x_1, x_2 \in \mathfrak{R}^n$, entonces la siguiente propiedad es válida para toda $x, \Delta x \in \mathfrak{R}^n$:

$$g(x + \Delta x) = g(x) + \nabla^T g(x) \Delta x + v_g \quad (7.3)$$

donde el vector v_g satisface: $\|v_g\| \leq 2L_g \|\Delta x\|$.

Prueba. Basados en la identidad:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \nabla^T g(x + \theta \Delta x) \Delta x d\theta &= g(x + \theta \Delta x) \Big|_{\theta=0}^{\theta=1} \\ &= g(x + \Delta x) - g(x) \end{aligned}$$

la cual es válida para todo vector $x, \Delta x \in \mathfrak{R}^n$. Es posible derivar lo siguiente:

$$\begin{aligned} &g(x + \Delta x) - g(x) \\ &= \int_0^1 [\nabla^T g(x + \theta \Delta x) - \nabla^T g(x) + \nabla^T g(x)] \Delta x d\theta \\ &= \int_0^1 [\nabla^T g(x + \theta \Delta x) - \nabla^T g(x)] \Delta x d\theta + \nabla^T g(x) \Delta x \end{aligned}$$

y por consiguiente:

$$\begin{aligned} &\|g(x + \Delta x) - g(x) - \nabla^T g(x) \Delta x\| \\ &\leq \int_0^1 \|\nabla^T g(x + \theta \Delta x) - \nabla^T g(x)\| \|\Delta x\| d\theta \\ &\leq \int_0^1 \|\nabla g(x + \theta \Delta x) - \nabla g(x)\| \|\Delta x\| d\theta. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Haciendo uso de (7.2), se puede decir que para toda $x \in \mathfrak{R}^n$:

$$\|\nabla g(x)\| \leq L_g$$

la que después se aplica a (7.4) para obtener:

$$\begin{aligned} &\|g(x + \Delta x) - g(x) - \nabla^T g(x) \Delta x\| \\ &\leq \int_0^1 (\|\nabla g(x + \theta \Delta x)\| + \|\nabla g(x)\|) \|\Delta x\| d\theta \\ &\leq \int_0^1 2L_g \|\Delta x\| d\theta = 2L_g \|\Delta x\|. \end{aligned}$$

Finalmente, al definir $v_g := g(x + \Delta x) - g(x) - \nabla^T g(x) \Delta x$, se obtiene (7.3). ■

7.2 Apéndice B. Sobre el control PD compensado, [3].

Teorema 7.1 *La ley de control:*

$$\tau = M(q) \ddot{q}^d + C(q, \dot{q}) \dot{q}^d + P(q, \dot{q}) - K_p \tilde{q} - K_d \dot{\tilde{q}}$$

aplicada al sistema:

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + P(q, \dot{q}) = \tau$$

resulta en un error de seguimiento, \tilde{q} , cero. Donde K_p y K_d son matrices constantes definidas positivas, (q, \dot{q}) son los ángulos de rotación de las articulaciones del robot (posición y velocidad), $\tilde{q} = q - q^d$, $\dot{\tilde{q}} = \dot{q} - \dot{q}^d$ y q^d la trayectoria deseada.

Prueba. El sistema en lazo cerrado es:

$$M(q) \ddot{\tilde{q}} + C(q, \dot{q}) \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} + K_d \dot{\tilde{q}} = 0 \quad (7.5)$$

Considere la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T M(q) \dot{\tilde{q}} + \frac{1}{2} \tilde{q}^T K_p \tilde{q} \quad (7.6)$$

Al evaluar \dot{V} a lo largo de las trayectorias de (7.5):

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{\tilde{q}}^T M \ddot{\tilde{q}} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T \dot{M} \dot{\tilde{q}} + \dot{\tilde{q}}^T K_p \tilde{q} \\ &= -\dot{\tilde{q}}^T K_d \dot{\tilde{q}} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T \left(\dot{M} - 2C(q, \dot{q}) \right) \dot{\tilde{q}} \\ &= -\dot{\tilde{q}}^T K_d \dot{\tilde{q}} \leq 0 \end{aligned} \quad (7.7)$$

donde el punto representa la derivada con respecto al tiempo.

Las únicas soluciones de (7.5) que se desenvuelven en el conjunto:

$$\Omega = \left\{ (q, \dot{q}) \text{ tal que } \dot{q} = 0 \right\}$$

son $(q, \dot{q}) = (0, 0)$.

Por lo tanto, empleando el teorema de La Salle, el punto de equilibrio $(q, \dot{q}) = (0, 0)$ del sistema (7.5) es asintóticamente estable. ■

7.3 Apéndice C.

Lema 7.2 *Si se define una función positiva $V(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ como*

$$V(x) := [\|x - x^*\| - \mu]_+^2$$

donde $[\cdot]_+^2 := ([\cdot]_+)^2$, $[\cdot]_+$ es definido como:

$$[z]_+ = \begin{cases} z & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

entonces, la función $V(x)$ es diferenciable y su gradiente es:

$$\nabla V(x) = 2 [\|x - x^*\| - \mu]_+ \frac{x - x^*}{\|x - x^*\|}$$

con la constante de Lipschitz igual a 1.

Bibliografía

- [1] John J. Craig, "Introduction to Robotics: Mechanics and Control", Addison-Wesley Publishing Company, Second Edition, 1989.
- [2] F. L. Lewis, C. T. Abdallah, D. M. Dawson, "Control of Robot Manipulators", Macmillan Publishing Company, 1993.
- [3] Richard M. Murray, Zexiang Li, S. Shankar Sastry, "A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation", CRC Press, 1993.
- [4] R. M. Rosenberg, "Analytical Dynamics of Discrete Systems", Plenum Press, 1977.
- [5] J. Y. S. Luh, M. W. Walker, R. P. Paul, "On-Line Computation Scheme for Mechanical Manipulators", Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control, 1980.
- [6] R. J. Schilling, Englewood Cliffs, "Fundamentals of Robotics", NJ: Prentice Hall, 1990.
- [7] John J. Craig, "Adaptive Control of Mechanical Manipulators", Addison-Wesley Publishing Company, 1955.
- [8] D. Koditschek, "Adaptive Strategies for the Control of Natural Motion", Proceedings of the 24th Conference on Decision and Control, Fort Lauderdale, 1985.
- [9] T. Khanna, "Foundations of Neural Networks", Addison-Wesley Publishing Company, 1990.
- [10] R. C. Eberhart, R. W. Dobbins, "Neural Networks PC Tools: A Practical Guide", Academic Press Inc., 1990.
- [11] R. J. Paul, "Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control", MIT Press, 1981.

- [12] Petar V, Kokotovic, Hassan K. Khalil, John o'Reilly, "Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design", Academic Press, 1986.
- [13] R.Kelly, "A Tuning Procedure for Stable PID Control of Robot Manipulators", *Robotica*, Vol.13, 1995.
- [14] C.Canudas de Wit and J.J.E.Slotine, "Sliding Observers for Robot Manipulator", *Automatica*, Vol.27, No.5, 1991.
- [15] C.Canudas de Wit and N.Fixot, "Adaptive Control of Robot Manipulators via Velocity Estimated Feedback", *IEEE Tran. on Automatic Control*, Vol. 37, 1992.
- [16] H.Berghuis and H.Nijmeijer, "A Passivity Approach to Controller-Observer Design for Robots", *IEEE Tran. on Robot. Automat.*, Vol. 9, 1993.
- [17] S. Nicosia, A. Tornambe, P. Valigi, "Experimental Results in State Estimation of Industrial Robots", *Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control*, 1990.
- [18] S.Nicosia and A.Tornambe, "High-Gain Observers in the State and Parameter Estimation of Robots Having Elastic Joints", *System & Control Letter*, Vol.13, 331-337, 1989.
- [19] S. Nicosia, P. Tomei, "Robot control by using only joint position measurements", *IEEE Tran. on Automatic Control*, Vol. 35, No. 9, 1990.
- [20] Ali Saberi, Hassan Khalil, "Quadratic-Type Lyapunov Functions for Singularly Perturbed Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-29, No. 6, 1984.
- [21] M. Spong, M. Vidyasagar, "Robot Dynamics and Control", New York, Wiley, 1989.
- [22] R.Ortega and M.W.Spong, "Adaptive Motion Control of Rigid Robot: A Tutorial", *Automatica*, Vol.25, no.6, 1989.
- [23] Y.H.Kim and F.L.Lewis, "Neural Network Output Feedback Control of Robot Manipulator", *IEEE Trans. Neural Networks*, Vol.15, 1999.
- [24] R.Kelly, "Global Positioning on Robot Manipulators via PD control plus a Classs of Nonlinear Integral Actions", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol.43, No.7, 1998.

- [25] M.Takegaki and S.Arimoto, "A New Feedback Method for Dynamic control of Manipulator", ASME J. Dynamic Syst. Measurement, and Contr., Vol.103, 1981.
- [26] P.Tomei, "Adaptive PD Controller for Robot Manipulator", IEEE Tran. on Automatic Control, Vol. 36, 1992.
- [27] V.Santibanez and R.Kelly, "Global Asymptotic Stability of the PD Control with Computed Feedforward in Closed Loop with Robot Manipulators", Proc.14th IFAC World Congress, 1999.
- [28] Frank L. Lewis, Aydin Yesildirek, Kai Liu, "Multilayer Neural-Net Robot Controller with Guaranteed Tracking Performance", IEEE Transactions on Neural Networks, Vol. 7, No. 2, March 1996.
- [29] S. Arimoto, F. Miyazaki, "Stability and robustness of PID feedback control for robot manipulators of sensory capability", Robotics Research, M. Brady and R. P. Paul, Eds. Cambridge, MA: M.I.T. Press, 1984.
- [30] Chi-Tsong Chen, "Linear System Theory and Design", CBS College Publishing, 1984.
- [31] Wen Yu, Alexander S.Poznyak, "Indirect Adaptive Control via Parallel Dynamic Neural Networks", IEE Proceedings - Control Theory and Applications, Vol.37, No.1, 1998.
- [32] Antonio Heredia Huerta, Wen Yu, "A Modified PD Control of Robot Manipulator Using Neural Network Compensator.", International Joint Conference on Neural Networks, 1999.
- [33] M.J.D.Powell, "Radial basis functions for multivariable interpolation: a review", IMA Conference on Algorithms for the Approximation of Functions and Data, Shrivenham, U.K., 1985.
- [34] D.S.Broomhead, and D.Lowe, "Multivariable functional approximation and adaptive networks", Complex Systems, vol.2, 1988.
- [35] J.E.Moody and C.J.Darken, "Fast learning in networks of locally tuned processing units", Neural Computations, vol. 1, 1989.
- [36] S. Renals, "Radial basis function network for speech pattern classification", Electronics Letters, vol. 25, 1989.

- [37] T.Poggio and F.Girosi, "Networks for approximation and learning", Proceedings of the IEEE, vol. 78, 989.
- [38] M.M.Gupta and D.N.Rao, "Neuro-Control Systems, Theory and Applications", IEEE Press, USA, 1994.
- [39] K.J.Hunt, D.Sbarbaro, R.Zbikowski and P.J.Gawthrop, "Neural Networks for Control Systems- A Survey", Automatica, vol. 28, 1992.
- [40] S.Haykin, "Neural Networks- A comprehensive Foundation", Macmillan College Publ. Co., New York, 1994.
- [41] F.Rosenblatt, "The perceptron: a probabilistic model for information storage and organization in the brain", Psychological Review, vol. 65, 1958.
- [42] F.Rosenblatt, "Principles of Neurodynamics", Spartan Books, Washington D.C., 1962.
- [43] W.S.McCulloch and W. Pitts, "A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity", Bulletin of Mathematical Biophysics, vol. 5, 115-133.
- [44] G.Cybenko, "Approximation by Superposition of a Sigmoidal Function", Mathematics of Control, Signals, and Systems, vol. 2, 1989.
- [45] G.A.Rovithakis and M.A.Christodoulou, "Adaptive Control of Unknown Plants Using Dynamical Neural Networks", IEEE Trans. on Syst., Man and Cybern., Vol. 24, 1994.