



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS  
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO  
NACIONAL**

Unidad Zacatenco

Departamento de Control Automático

**Robot Teleoperado mediante  
Control de Impedancia**

Tesis que presenta

**Ing. Gustavo Enrique Alemán Hernández**

Para obtener el Grado de

**Maestro en Ciencias**

En la Especialidad de

**Control Automático**

Director de Tesis

**Dr. Wen Yu Liu**

Ciudad de México

Abril, 2024



# Resumen

Actualmente, en nuestro día a día interactuamos con sistemas de teleoperación para una infinidad de tareas, desde manipular un televisor hasta realizar ciertas acciones en un vehículo. Actividades potencialmente riesgosas como la manipulación de grúas, la desactivación de explosivos o incluso la búsqueda y rescate de personas en siniestros como terremotos son actualmente realizadas por robots teleoperados. La teleoperación ha llegado también a las áreas de la salud; con el robot Da Vinci como precursor en el año 2000, y llegando hasta nuestros días de la mano del robot Axisis, que se desempeña en cirugías oculares. En el presente trabajo se presenta el *Control de Impedancia* como Ley de Control para realizar la Teleoperación.

Como primer paso se obtuvieron los Modelos Cinemáticos Directo e Inverso de los Robots Maestro y Esclavo; la Cinemática Directa de ambos Robots se calculó usando la representación de *Denavit-Hartenberg*; el Modelo Cinemático Inverso de ambos Robots se calculó usando el método descrito en el Capítulo de Modelado de Robot Maestro y Esclavo, sin embargo en el caso del Robot Esclavo se desarrolló un algoritmo híbrido, de manera que se obtuvo una solución analítica aproximada (la descrita anteriormente), y posteriormente se hizo una corrección numérica mediante el algoritmo de *Levenberg-Marquardt* (Mínimos Cuadrados Amortiguados). Los resultados de cinemática inversa de ambos robots se reportan con la ayuda de un simulador que se realizó en un programa llamado VRML, el cual se usa para modelar mundos virtuales. Se realizaron experimentos para alcanzar un punto, y una trayectoria hecha mediante *Splines*, para asegurar la *suavidad* de la trayectoria en posición, velocidad y aceleración.

En el presente trabajo se usó la formulación de *Euler-Lagrange* para obtener el Modelo Dinámico en el Espacio Articular, esto debido a que la obtención de la Matriz de Masa, el Vector de Aceleración de Coriolis y el Vector de Gravedad, es la forma más adecuada para trabajar con Leyes de Control; sin embargo, debido a que el Vector de Aceleración de Coriolis requiere la obtención de los Símbolos de Christoffel cuya obtención es muy costosa computacionalmente, se optó por realizar una factorización alterna del Vector de Aceleración de Coriolis, que no requiere el cálculo de estos. Para propósitos de corroborar los valores de Masa y los Tensores de Inercia de cada Eslabón, se hizo un modelo dinámico en SimMechanics de MATLAB, mediante el cual se graficaron

los Elipsoides de Inercia de ambos Robots.

El Control de Impedancia es una Ley de Control que se plantea en el espacio de Tarea, por lo que para trabajar con esta, se tuvieron que desarrollar los Modelos de los Robots Maestro y Esclavo en el Espacio de Tarea. Como el Robot Maestro es un Robot no redundante (a lo más tiene 6 grados de libertad), la obtención del Modelo Dinámico en el Espacio de Tarea solo depende de la Matriz Jacobiana, sin embargo, en el caso del Robot Esclavo que es un Robot Redundante (posee más de 6 grados de libertad), la obtención de su Modelo Dinámico en el Espacio de Tarea no solo depende de la Matriz Jacobiana, sino también del complemento ortogonal de esta.

Posteriormente se desarrollaron diversas Leyes de Control para realizar la Teleoperación, como un Controlador PD con Compensación Gravitacional, o un Controlador PD con Compensador mediante Redes Neuronales y se finaliza con la Teleoperación mediante el *Control por Impedancia*. Finalmente se reportan los resultados de simulaciones de los modelos cinemáticos, dinámicos y las distintas leyes de control, así como las conclusiones de todo el trabajo realizado.

# Abstract

In our everyday life we interact with teleoperation systems for a huge number of tasks, from TV manipulation to perform certain activities in a vehicle. Potentially risky tasks like hoists manipulation, explosives deactivation or even search and rescue of people in natural sinisters like earthquakes are performed by teleoperated robots. Teleoperation has arrived to the health area too, starting with the Da Vinci Robot as a precursor in 2000, and getting to our days with the Axis Robot, an ocular surgery robot. In the current work *Impedance Control* is presented as a Control Law in order to perform the Teleoperation.

As a first step Direct and Inverse Kinematic Models of Master and Slave Robots were computed; Direct Kinematic Model of both Robots are calculated using the *Denavit-Hartenberg Representation*; Inverse Kinematic Model of both Robots was calculated using the method described in the Master and Slave Robot Modeling Chapter, nevertheless a hybrid algorithm was developed for the Slave Robot, so an approximated analytical solution was calculated (the one previously described), and then a numerical refinement is performed using the Levenberg-Marquardt algorithm (Damped Least Squares Method). Inverse Kinematics results from both Robots are reported using a Simulator developed in VRML, a program that is used to develop Virtual Worlds. Experiments for reaching a point, and trajectory generation using *Splines* were performed, in the case of the Trajectory Generation, it was decided to use Splines in order to generate *soft* curves for position, velocity and acceleration.

In this Thesis the *Euler-Lagrange* Formulation was used in order to get the Dynamical Model in Joint Space, this is because the Mass Matrix, the Coriolis Acceleration Vector and the Gravity Vector is the most properly form in order to work with Control Laws, however, because the Coriolis Acceleration Vector requires to compute Christoffel Symbols, which requires a lot of computational resources to compute, it was decided to perform an alternate factorization of the Coriolis Acceleration Vector, which doesn't require the computation of these terms. In order to corroborate the Mass and Inertia Tensors values for each link, a Dynamical Model and Simulation was performed using SimMechanics from MATLAB, with this tool the Inertia Ellipsoids of both robots could be plotted.

Impedance Control is a Control Law that is settled in the Task Space, so in order to work with this, Master and Slave Robot Dynamical Models in Task Space had to be developed. Given the fact that Master Robot is a non-Redundant Robot (it has 6 degrees of freedom at most), the Dynamical Model in the Task Space depends only on the Jacobian Matrix, nevertheless in the case of the Slave Robot which is a Redundant Robot (it has more than 6 degrees of freedom), it's Dynamical Model in Task Space not only depends on the Jacobian Matrix, but also on it's orthogonal complement.

As a next step different Control Laws were developed in order to perform the Teleoperation, Control Laws like a PD controller with Gravity Compensation, or a PD Controller with Neural Networks Compensation and finally the Teleoperation using *Impedance Control*.

Finally, simulation results of kinematic models, dynamical models, the different Control Laws and the Conclusions of the whole Thesis are reported.

# Agradecimientos

- A CONAHCYT por haberme apoyado con la beca que me permitió sostenerme durante el tiempo que duró el programa de Maestría.
- A CINVESTAV por haber formado en mí las bases necesarias para desarrollarme como investigador en un futuro.
- A la Universidad La Salle, mi Alma Mater, donde me formé como Ingeniero, y donde conocí a personas que marcarían el rumbo de mi vida.
- A mi madre, María Enriqueta Hernández Ortiz, que me ayudó en mis estudios desde la educación elemental, y más aún, me dio una educación llena de valores, humanidad y amor. Gracias por poner los cimientos del ser humano que soy y futuro investigador que espero ser.
- A mi padre Fernando Alfonso Alemán Vázquez, por haberme dado el regalo de la vida.
- A mi abuelita, María Elena Ortiz Cerón, que me guio durante mi infancia y adolescencia, y me dio el ejemplo de nunca rendirme ante las situaciones que experimentamos en la vida.
- A mi tía Guadalupe Hidalgo Sánchez, que estuvo conmigo durante una gran parte de mi vida, y me enseñó a ver la sencillez, humildad y honestidad en las personas.
- A mi tío Ricardo Hernández Ortiz, que me enseñó lo que es ser alegre en la vida, disfrutar los pequeños momentos y las pequeñas cosas que nos suceden.
- A mi tío Sabi Sampson Menache, por haberme apoyado en momentos realmente difíciles, y mostrarme que aún queda gente buena en el mundo.
- A mi familia, que de alguna manera siempre ha estado ahí para apoyarme.
- A Elizabeth Morales Gómez, una niña que me ayudó en esta etapa de mi vida, que me dio la fortaleza y las ganas para levantarme cada mañana para dar lo mejor de mí, y más aún, me enseñó que yo soy más de lo que pensaba.

- A Andrés Enríquez Cobo, mi gran amigo de la Universidad, con quien además de tener pláticas realmente interesantes y honestas, aprendí lo que es el trabajo en equipo.
- A Víctor Christian Jaime Tamayo, un muy buen amigo que conocí al ingresar a la vida laboral, que no solo me brindó su ayuda sincera en todo momento, sino que también me mostró que hay gente honesta y trabajadora en el mundo.
- Al Dr. Rafael Cisneros Limón, quien inculcó en mi la curiosidad y el amor por la investigación, y me dio un ejemplo del tipo de Profesionista que quiero ser.
- A mis amigos de la Maestría, Lorenzo Javier Granillo Carrión, Eduardo Yudho Montes de Oca y Eynar Tavera Rojas, con quienes compartí dudas, lágrimas y risas durante esta etapa.
- A mi Asesor, el Dr. Wen Yu Liu, quien no solo me brindó su apoyo como profesor y persona, sino que también me brindó su amistad y consejo.
- A mis sinodales, el Dr. Alexander Poznyak Gorbach, el Dr. Moisés Bonilla Estrada y la Dra. Martha Belem Saldívar Márquez, por haberse tomado el tiempo para revisar este Trabajo de Tesis.
- Al Dr. Rubén Alejandro Garrido Moctezuma por haberme brindado su consejo y apoyo desde el primer momento en el programa de Maestría.
- A todos mis profesores, de quienes además de recibir una guía, aprendí la capacidad de resolver problemas mediante diferentes enfoques y el hábito del autoaprendizaje.

# Índice general

<b>Índice de Figuras</b>	<b>XI</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Estado del Arte . . . . .	1
1.2. Planteamiento del Problema . . . . .	2
1.3. Objetivo . . . . .	4
1.4. Estructura del Trabajo de Tesis . . . . .	4
<b>2. Teleoperación con Robots</b>	<b>5</b>
2.1. Breve Historia de la Robótica . . . . .	5
2.1.1. La era de la Robótica Imaginaria y la Pre-Robótica . . . . .	5
2.1.2. Tele-Manipulación y Tele-Operación para resolver necesidades reales . . . . .	6
2.1.3. De los manipuladores industriales a los robots móviles . . . . .	7
2.1.4. Robótica Humanoide . . . . .	8
2.2. Teleoperación . . . . .	10
2.2.1. Aplicaciones . . . . .	13
2.2.2. Control de Impedancia . . . . .	16
2.2.3. Reflexión de Fuerza . . . . .	19
<b>3. Modelado de Robot Maestro y Robot Esclavo</b>	<b>21</b>
3.1. Cinemática de Cuerpo Rígido . . . . .	21
3.1.1. Cinemática del Robot Manipulador PHANTOM Omni . . . . .	22
3.1.2. Cinemática del Robot Manipulador Robai Cyton Gamma 1500 . . . . .	27
3.1.3. Simulador Cinemático . . . . .	37
3.1.4. Resultados de Simulaciones . . . . .	42
3.2. Dinámica de Cuerpo Rígido . . . . .	47
3.3. Dinámica PHANTOM Omni . . . . .	47

3.3.1.	Espacio Articular . . . . .	47
3.3.2.	Espacio de Trabajo . . . . .	48
3.4.	Dinámica Robai Cyton Gamma 1500 . . . . .	51
3.4.1.	Espacio Articular . . . . .	52
3.4.2.	Espacio de Trabajo . . . . .	52
<b>4.</b>	<b>Control PD con Compensación para Teleoperación</b>	<b>55</b>
4.1.	Control PD con compensación de Gravedad . . . . .	55
4.1.1.	Controlador PD en el Dominio del Tiempo . . . . .	57
4.1.2.	Controlador PD en el Dominio de la Frecuencia . . . . .	60
4.1.3.	Compensación de Gravedad . . . . .	61
4.1.4.	Espacio Articular . . . . .	62
4.1.5.	Espacio de Trabajo . . . . .	64
4.2.	Control PD con Compensador mediante Redes Neuronales . . . . .	66
4.3.	Simulaciones . . . . .	68
4.3.1.	Controlador PD con Compensación Gravitacional en el Espacio Articular . . . . .	68
4.3.2.	Controlador PD con Compensación Gravitacional en el Espacio de Tarea . . . . .	73
4.3.3.	Controlador con Compensación por Redes Neuronales . . . . .	77
<b>5.</b>	<b>Control de Impedancia para Teleoperación</b>	<b>87</b>
5.1.	Control por Dinámica Inversa . . . . .	87
5.2.	Control PD . . . . .	89
5.3.	Prueba de Estabilidad de Lyapunov . . . . .	90
5.4.	Simulación . . . . .	90
<b>6.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>97</b>
6.1.	Trabajo a Futuro . . . . .	100
<b>A.</b>	<b>Marco Teórico de Cinemática de Cuerpo Rígido</b>	<b>101</b>
A.1.	Cadenas Cinemáticas . . . . .	101
A.2.	Representación Denavit-Hartenberg . . . . .	102
A.3.	Solución de la Cinemática Inversa en Forma Cerrada . . . . .	103
A.4.	Mínimos Cuadrados Amortiguados (Levenberg-Marquardt) . . . . .	104
<b>B.</b>	<b>Marco Teórico de Dinámica de Cuerpo Rígido</b>	<b>107</b>
B.1.	Euler-Lagrange . . . . .	107

B.2. Una Nueva Factorización de la Matriz de Coriolis . . . . .	110
B.2.1. Modelado por Newton-Euler . . . . .	111
B.2.2. Trabajo Virtual . . . . .	112
B.2.3. La Derivación de la Factorización de la Matriz de Coriolis . . . . .	113
B.3. Jacobiano Analítico . . . . .	113
B.4. Elipsoides de Inercia . . . . .	113
B.5. Modelo Dinámico en el Espacio de Trabajo . . . . .	115
B.5.1. Modelo Dinámico de Robots Redundantes . . . . .	117
<b>C. Redes Neuronales</b>	<b>121</b>
C.1. Modelos de una Neurona . . . . .	123
C.2. Tipos de Funciones de Activación . . . . .	124
C.3. Redes Neuronales Estáticas . . . . .	126
C.4. Redes Neuronales Dinámicas . . . . .	126



# Índice de figuras

2.1. Hacia la Teleoperación . . . . .	12
2.2. Flujo de Información en un Sistema de Tele-Operación . . . . .	13
2.3. Diagrama de Bloques de un Sistema de Tele-Operación Bilateral . . . . .	14
2.4. Teleoperador en JEM . . . . .	14
2.5. Vehículo submarino Jason . . . . .	15
2.6. Control de Fuerza Pura . . . . .	16
2.7. Control de Impedancia . . . . .	17
2.8. Controlador PBIC aplicado a manipulador . . . . .	18
3.1. Diagrama Cinemático Robot Phantom OMNI . . . . .	22
3.2. Diagrama Cinemático Manipulador Robai Cyton Gamma 1500 . . . . .	27
3.3. Comparativa Diagramas Cinemáticos . . . . .	29
3.4. Posición Home Robot Maestro . . . . .	37
3.5. Simulador Robot Maestro . . . . .	38
3.6. Coordenada Deseada y Coordenada Alcanzada Robot Maestro . . . . .	39
3.7. Posición Home Robot Esclavo . . . . .	40
3.8. Simulador Robot Esclavo . . . . .	41
3.9. Coordenada Deseada y Coordenada Alcanzada Robot Esclavo . . . . .	42
3.10. Trayectoria de Referencia . . . . .	44
3.11. Trayectoria Seguida por el Robot Maestro . . . . .	45
3.12. Ángulos de Euler Robot Maestro . . . . .	45
3.13. Trayectoria Seguida por el Robot Esclavo . . . . .	46
3.14. Ángulos de Euler Robot Esclavo . . . . .	46
3.15. Elipsoides de Inercia Robot Maestro . . . . .	48
3.16. Dinámica Robot Maestro Espacio Articular . . . . .	49
3.17. Dinámica Robot Maestro Espacio de Tarea . . . . .	50
3.18. Elipsoides de Inercia Robot Esclavo . . . . .	51

3.19. Dinámica Robot Esclavo Espacio Articular . . . . .	53
3.20. Dinámica Robot Esclavo Espacio de Tarea . . . . .	54
4.1. Sistema de Control con Controlador PD . . . . .	56
4.2. Respuesta Controlador PD en el Dominio del Tiempo . . . . .	58
4.3. Controlador PD Diagrama de Bode . . . . .	61
4.4. Referencia Controlador PD Robot Maestro . . . . .	68
4.6. Referencia Controlador PD Robot Esclavo . . . . .	69
4.5. Respuesta Control PD con Compensación Gravitacional Espacio Articular Robot Maestro . . . . .	70
4.7. Respuesta Control PD con Compensación Gravitacional Espacio Articular Robot Esclavo . . . . .	72
4.8. Referencia Controlador PD Espacio de Trabajo Robot Maestro . . . . .	73
4.9. Respuesta Control PD con Compensación Gravitacional Espacio de Tarea Robot Maestro . . . . .	74
4.10. Referencia Controlador PD Espacio de Trabajo Robot Esclavo . . . . .	75
4.11. Respuesta Control PD con Compensación Gravitacional Espacio de Tarea Robot Esclavo . . . . .	76
4.12. Red Neuronal propuesta para Compensación Robot Maestro . . . . .	77
4.13. Referencia Controlador PD con Compensación por Redes Neuronales Robot Maestro	78
4.14. Respuesta Controlador PD con Compensación por Redes Neuronales Robot Maestro Espacio Articular . . . . .	79
4.15. Resultados Red Neuronal Robot Maestro . . . . .	80
4.16. Red Neuronal propuesta para Compensación Robot Esclavo . . . . .	81
4.17. Referencia Controlador PD con Compensación por Redes Neuronales Robot Esclavo	82
4.18. Respuesta Controlador PD con Compensación por Redes Neuronales Robot Esclavo Espacio Articular . . . . .	83
4.19. Resultados Red Neuronal Robot Esclavo . . . . .	84
5.1. Diagrama de Bloques Control de Impedancia . . . . .	89
5.2. Referencia Controlador PD con Compensación Gravitacional Robot Maestro Espa- cio de Trabajo . . . . .	91
5.3. Respuesta Controlador PD con Compensación Gravitacional Robot Maestro Espacio de Trabajo . . . . .	92
5.4. Referencia Controlador de Impedancia Robot Esclavo Espacio de Trabajo . . . . .	93

5.5. Respuesta Controlador de Impedancia Robot Esclavo Espacio de Trabajo . . . . . 95

B.1. Superficie formada por los puntos Q, tomado de [5] . . . . . 114

C.1. Modelo No Lineal de una Neurona . . . . . 124



# Índice de Tablas

1.1. Ventajas y Desventajas de los Cuaterniones . . . . .	3
1.2. Ventajas y Desventajas de las Matrices de Transformación Homogénea . . . . .	3
3.1. Parámetros Denavit-Hartenberg del Robot Maestro . . . . .	23
3.2. Parámetros Denavit-Hartenberg Diagrama Real Robot Esclavo . . . . .	28
3.3. Parámetros Denavit-Hartenberg Diagrama Modificado Robot Esclavo . . . . .	30



# Capítulo 1

## Introducción

En el día a día estamos interactuando continuamente con máquinas y entidades *inteligentes* hechas por el hombre. Podemos admitir que nuestra era está basada en interacciones *hombre máquina* y la facilidad que uno tiene para manipular esas máquinas es vital. Los robots, como un *subconjunto* de estas máquinas, son también sujetos a las mismas restricciones y preocupaciones. Las interacciones con o a través de los robots son más críticas y específicas: las interacciones con los robots son críticas porque estos son diseñados para realizar tareas complejas en ambientes cambiantes, versátiles y peligrosos. Son específicas porque los robots son usados en vez de humanos llevando a confusiones entre los conceptos *robot-máquina* y *robot-viviente*.

El *robot objetivo* (máquina ejecutando el programa) y *robot subjetivo* (el robot antropomórfico y su imagen en la mente de las personas) son entidades muy complejas para ser vistas como simples cajas negras con entradas y salidas.

### 1.1. Estado del Arte

Con el rápido crecimiento de Internet, más y más dispositivos inteligentes han sido embebidos en él por servicio, seguridad, y entretenimiento, incluyendo sistemas de cómputo distribuido, cámaras de vigilancia, telescopios, manipuladores y robots móviles. Aunque la noción de robótica de Internet es relativamente nueva, ha capturado un gran interés por investigadores de todo el mundo. La robótica de Internet ha abierto un sin fin de nuevas aplicaciones, como la *tele-manufactura*, *tele-entrenamiento*, *tele-cirugía*, guías de museos, control de tráfico, exploración espacial, rescate en siniestros, limpieza de la casa, cuidado de la salud, etc.[30] A pesar de esto, se tienen dos problemas principales al usar internet como medio de comunicación entre las aplicaciones a distancia, el primero es el limitado ancho de banda, lo cual en el caso de la tele-robótica puede ser un problema,

debido a la gran cantidad de información manejada. El segundo problema son los retrasos que se tienen en el envío de la información.

En cuanto a los retrasos, estos no se pueden evitar en la tele-operación, sin embargo, en [46] se usa un algoritmo adaptable para aminorar los percances que se pueden tener debido a este problema. Otro problema sumamente importante son las incertidumbres, en [10] se trata de atacar el problema mediante redes neuronales. El entrenamiento de esta se hace en línea, y una de las características principales es que no se modela matemáticamente al robot ni a su entorno. Se usan los errores de los sistemas dinámicos, tanto del robot como del ambiente para tener una respuesta. Se usan algoritmos evolutivos para el aprendizaje y una topología de propagación hacia adelante.

Por otro lado, en [52] se usan modos deslizantes para tratar este mismo problema. Cabe destacar que en ambos casos se usa control de impedancia.

En [23] se implementaron observadores basados en modos deslizantes gracias a su propiedad de convergencia en tiempo finito, y de esta manera ahorrarse el ruido que surge de los sensores para medir velocidad y aceleración.

En [33] se usa un controlador neuro difuso para permitirle al control de impedancia seguir la fuerza deseada en presencia de una dinámica de ambiente desconocida. En [18] se implementan dos lazos de control. El lazo interno es un control de posición, lo cual asegura la operación de precisión del manipulador. El lazo externo es el control de impedancia el cual alcanza la implementación del control de fuerza entre el manipulador y su entorno. Debido a que los sensores conllevan errores de medición, se usa un observador de torques para las articulaciones.

En [32] se usan redes neuronales para control de impedancia, lo cual muestra que el seguimiento de fuerza o posición es altamente robusto en presencia de grandes incertidumbres o ruido por parte del sensor de fuerza.

## 1.2. Planteamiento del Problema

La Teleoperación es un área de estudio con cada vez mayor investigación y aplicaciones. Desde finales del siglo pasado hasta nuestros días, el auge de la teleoperación ha crecido debido a su utilidad en nuestra vida diaria. Podemos ver su impacto en un gran número de tareas que a día de hoy se realizan remotamente. Si profundizamos en el Área de Robótica Médica, se puede ver su gran impacto sobre todo con los Robots dedicados a realizar cirugías. Para este propósito se requiere de una Ley de Control, donde no solo se pueda tener Control en Posición, sino también de fuerza.

Para establecer un control en posición, primero se debe de tener una manera de conocer la ubica-

ción del punto de interés del Robot Maestro, que, por lo general es el efector final. Por este motivo, se requiere de un algoritmo de cinemática inversa tanto para el Robot Maestro, como para el Robot Esclavo, que sean precisos y computacionalmente eficientes. Existen dos maneras en las cuales se puede representar el Movimiento de Cuerpo Rígido, una es mediante *Matrices de Transformación* y la otra es mediante *Cuaterniones*.

Cuaterniones	
Ventajas	Desventajas
Representación Compacta	Representación No Intuitiva
Interpolación Suave entre Dos Rotaciones	Múltiples Cuaterniones pueden representar la misma Rotación
Complejidad Computacional Reducida	Estabilidad Numérica Limitada especialmente en Rotaciones Pequeñas

Tabla 1.1: Ventajas y Desventajas de los Cuaterniones

Matrices de Transformación Homogénea	
Ventajas	Desventajas
Representación Intuitiva de la Orientación	Singularidades en la Representación de la Orientación
Fácil de Visualizar	Mayor Complejidad Computacional

Tabla 1.2: Ventajas y Desventajas de las Matrices de Transformación Homogénea

Dado que en lo posible se quiere evitar el problema de ambigüedad en la representación de Rotaciones, en este trabajo la solución del problema se dará en Términos de *Matrices de Transformación*.

Debido a que la Ley de Control necesaria para cumplir con el objetivo de Robótica Médica debe actuar sobre la Dinámica del Robot, se debe de desarrollar un Modelo Dinámico tanto en el Espacio Articular como en el Espacio de Tarea de los Robots Maestro y Esclavo que no sea muy costoso computacionalmente, y que al mismo tiempo sea preciso en el cálculo de los torques y las fuerzas para cada articulación.

Por otro lado, para tener un control de Fuerza, se debe de tener acceso a lectura de sensores de fuerza para el robot, así como un Modelo Dinámico preciso en el cálculo de fuerzas y torques de cada articulación para que, en combinación con la Ley de Control, se pueda tener el comportamiento deseado.

### 1.3. Objetivo

Desarrollar una Ley de Control que actúe en los subespacios de Posición y Fuerza mediante el uso de Modelos Cinemáticos, Dinámicos y las distintas herramientas y conocimientos adquiridos a lo largo del Programa de Maestría que sea capaz de replicar el movimiento del Robot Maestro al Robot Esclavo en la superficie a la que esté expuesto el Robot Esclavo.

Para el robot redundante se pretende desarrollar un algoritmo cinemático inverso que minimice el número de iteraciones realizadas de tal manera que se pueda correr con un bajo costo computacional.

### 1.4. Estructura del Trabajo de Tesis

- El Capítulo 1 sienta las bases de este Trabajo de Tesis, se desarrolla el Estado del Arte, el Planteamiento del Problema y el Objetivo.
- El Capítulo 2 da una breve Introducción a la Robótica y se exponen conceptos básicos para el entendimiento de esta Tesis. Así mismo, se da un panorama general del proyecto, y se presentan de manera muy breve diversas técnicas para atacar el problema planteado.
- El Capítulo 3 desarrolla los modelos Cinemáticos y Dinámicos para los Robots Maestro y Esclavo con los cuales se trabajaron, así como la simulación de los mismos; también se presenta el simulador cinemático desarrollado.
- El Capítulo 4 presenta los Controladores PD con distintos tipos de Compensación, tanto en el Espacio Articular como en el de Tarea. Esto se hace con el fin de comparar el desempeño de estos controladores con el desempeño del Controlador de Impedancia.
- El Capítulo 5 desarrolla el Controlador por Impedancia, se muestra la simulación y se presentan los resultados obtenidos mediante este.
- El Capítulo 6 presenta las Conclusiones acerca de este Trabajo de Tesis y el Trabajo a Futuro derivado.

# Capítulo 2

## Teleoperación con Robots

### 2.1. Breve Historia de la Robótica

A continuación, se discutirá brevemente la historia de la robótica. Esta tiene muchas versiones, algunos mitos, mentiras y verdades. Aquí no se propone establecer la historia exacta. La idea es enfocarse en la línea de tiempo de la robótica para entender cuáles fueron las principales motivaciones en el desarrollo de robots.

#### 2.1.1. La era de la Robótica Imaginaria y la Pre-Robótica

Los historiadores robóticos concuerdan que el primer uso público de la palabra *robot* fue alrededor de 1921, introducida por el escritor *Checo Čapek* en su obra *R.U.R* (Robots Universales de Rossum) para describir gente artificial. Esta referencia *factual* vino después de muchas historias oficiales y no oficiales de *robots* o lo que puede ser asimilado como robots. De hecho y tan lejos como existen rastros, la existencia de seres artificiales humanoides obedeciendo y ejecutando todos los deseos de los humanos o comportándose como ellos fue una parte esencial de las creencias humanas. Tales características míticas fueron historias presentadas y escritas en la era de los Griegos. Una idea más práctica y una entidad tangible fueron propuestos por *Ctesibus* (270 AC). El construyó un sistema basado en relojes de agua con figuras que se mueven. *Al Jaziri* en el siglo 12, propuso un conjunto más sofisticado para el emperador egipcio: El desarrolló un bote con músicos automáticos, incluyendo bateristas, un arpista y flautista para entretener a la corte y al séquito del emperador. En Japón durante este mismo periodo, los escritos de *Konjaku Monogatari Shu* reportaron una muñeca de irrigación mecánica. Estos desarrollos fueron transmitidos a Europa por medio de *Frederic II* quién recibió un reloj sofisticado del *Emperador Egipcio* en 1232. Las técnicas de *horología* recibidas fueron desarrolladas, y nuevas realizaciones importantes fueron alcanzadas:

*Leonardo Da Vinci* propuso un pato animado en el siglo *XVI* y Blaise Pascal construyó la primera calculadora, (*La Pascaline*) en 1645. *Jacques de VAUCANSON* desarrolló un *pato* que comía, digería y defecaba, el cual también podía mover las alas. Algunos otros ejemplos siguieron durante la época de la *Ilustración* como el músico *La Joyeuse de Tympanon* ofrecido a la reina Francesa *Marie Antoinette*. Estos esfuerzos fueron continuados y muchos jugadores de ajedrez autómatas, escritores, animales, etc. fueron creados en Europa gracias a la *corriente mecanicista*. Esto último no fue usado únicamente para diseñar y construir creaturas improbables, pero también y principalmente en aplicaciones industriales: Por ejemplo, *De VAUCANSON* estuvo muy involucrado en el desarrollo de la industria textil en el área de *Lyon* en *Francia*.

Otro paso fue alcanzado en el siglo *XIX*: La creatura de ficción *Frankenstein* fue presentado dentro de una película. Inversamente a lo que fue desarrollado anteriormente, la creación de *Frankenstein* corresponde a una nueva visión y a un nuevo reto y la película sugirió que los humanos pueden crear entidades vivientes (en el sentido biológico). Uno puede imaginarse que el propósito de esta película fue mostrar que los humanos tienen el suficiente conocimiento para replicarse biológicamente a sí mismos, al menos a través de su imaginación y las imágenes y la tendencia aún existe y las películas como *Terminator*, *Inteligencia Artificial*, etc. tuvieron un gran éxito la última década. En los años treinta, *Asimov* emitió sus famosas reglas. Incluso si los robots reales no existían, *Asimov* formalizó las reglas éticas que gobernarían las relaciones entre humanos y robots probables. Sus juicios fueron simplemente imaginarios y basados solamente en futuros robots supuestos. El concepto de robot tal vez existe desde hace mucho tiempo, seguramente sin tener el mismo significado que en la actualidad, pero como una entidad imaginaria capaz de comportarse como humanos y teniendo una forma externa biológicamente plausible [11]. Una vez conociendo estos hechos, se puede dar una definición contemporánea.

**Definición Robot:** Según la International Federation of Robotics (IFR) un robot, también llamado sistema robótico o manipulador, es una máquina de manipulación automática reprogramable y funcional capaz de posicionar y orientar materiales, piezas, herramientas o dispositivos especiales para la ejecución de trabajos diversos en las diferentes etapas de la producción industrial, ya sea en una posición fija o en movimiento [14].

### 2.1.2. Tele-Manipulación y Tele-Operación para resolver necesidades reales

Desde la prehistoria, los humanos desarrollaron herramientas para facilitar tareas fundamentales de la vida diaria como, por ejemplo, comer, cazar y pelear (*homo-habilis*). Para cazar una

presa o cocinarla, los humanos usaron herramientas muy básicas permitiendo alcanzar las tareas vitales previas. Cuando se considera cocinar, los humanos usan palillos para evitar quemarse. Este comportamiento puede ser visto como la primera transferencia de destreza a una distancia de algunos *cm* y puede ser considerada como la *tele-operación* ancestral. En los años cuarenta, la necesidad de manipular productos peligrosos, principalmente sustancias nucleares fue esencial para aplicaciones militares. Eso llevó a la construcción de los primeros *tele-manipuladores*. *R. Goertz* y su grupo desarrollaron en *ANL* un conjunto de prototipos (E1 a E4) de manipuladores remotos mecánicos. Estas investigaciones fueron realizadas en ese tiempo para dar soluciones operacionales a problemas inmediatos y sensitivos que la industria nuclear enfrentaba. Los primeros sistemas fueron pasivos, por ejemplo, tele-manipuladores basados en sistemas mecánicos permitiendo a las fuerzas humanas y esfuerzos ser transmitidos a un esclavo. Es obvio que para estos sistemas la energía y la toma de decisiones fueron completamente manipulados por el operador. Entonces, uno puede imaginar fácilmente la carga de trabajo mental y física tan pesada para el operador, lo cual lleva a un desempeño limitado. Un primer intento fue hecho al introducir energía al sistema. Actuadores eléctricos fueron usados para proveer las fuerzas de usuario. En tal sentido, las manipulaciones controladas remotamente fueron simplificadas al introducir energía al sistema y al descargar operadores de controles de bajo nivel. Los desarrollos posteriores de tele-operación fueron resueltos con la introducción de más *inteligencia* dentro del sistema. De hecho, gracias a los avances realizados en la tecnología de computadoras y a la teoría del control automático, algunos asistentes fueron introducidos para ayudar al tele-operador y evitarle tareas de bajo nivel. La era dorada de la tele-operación se suponía terminada a inicios de los años sesenta con el uso industrial de los primeros manipuladores autónomos.

### 2.1.3. De los manipuladores industriales a los robots móviles

En los años cincuenta, el crecimiento de la industria fue gigantesco y las necesidades en tecnologías terminadas permitiendo mayor productividad y menores costos fueron prioritarias. Dentro de este contexto, *G. Devol* y *J. Engelberger* decidieron crear *Unimation*, la primera manufacturera de robots. El propósito de los robots de *Unimation* fue desarrollar soldaduras punto a punto y cualquier otra tarea odiada por los trabajadores. Se puede notar que estos robots fueron derivados de los prototipos de *ANL*: tanto los componentes tecnológicos y morfológicos vienen de los prototipos *Goertz*. Una manera reducida de describir estos robots es considerarlos como un *tele-manipulador* donde el operador es removido. De alguna manera, *Unimation* mostró la manera para desarrollar autonomía para robots al integrar tecnología autómatas. Esta temprana introducción del robot *UNIMATE* dentro de las cadenas de General Motors y Ford no era sostenible económicamente,

su *regreso de inversión* fue muy bajo comparado con el obtenido usualmente por técnicas clásicas (fuerza humana). El impacto psicológico en los trabajadores de *EUA*, clientes de *EUA* y más generalmente en la población mundial, fue mayor de lo esperado.

El próximo paso importante para la robótica fue hecho en los años setenta. La aparición de las computadoras y el nacimiento de la ciencia de la computación como una importante área de investigación obligó a los investigadores a buscar aplicaciones visibles y tangibles. De hecho, la Inteligencia Artificial fue considerada como el último descubrimiento y las técnicas de *IA* fueron presentadas como herramientas capaces de competir con humanos en términos de resolución de problemas. Los manipuladores robóticos fueron usados como los primeros demostradores pero no fue suficiente: el manipulador es equivalente a la mano humana, no se podía probar movilidad ni requerimientos consecuentes. Para ir más lejos y probar las predicciones de *Herbert*, el *SRI* propuso el primer robot con llantas autónomo. Este último fue diseñado para lidiar con entornos desconocidos al navegar, evadir obstáculos y reconocer objetos de interés. Esta fuente fue totalmente soportada por la escuela de Inteligencia Artificial y sirvió como prueba de sus capacidades. Para la comunidad de robótica, estos desarrollos pueden ser interpretados como los primeros esfuerzos por incrementar la movilidad del robot, es decir, transformando los manipuladores en plataformas móviles para enfrentar un mundo abierto. Al hacer esto, es decir, desarrollar autonomía y locomoción fue posible para los robots aumentar su espacio de trabajo de una celda de ensamble a ambientes más complejos y grandes.

Desafortunadamente, treinta años más tarde, el problema de autonomía no fue resuelto. De cualquier manera, muchos avances significativos han sido alcanzados. La actuación y la movilidad fueron estudiados (principalmente por el control automático y tecnología de sensores) y actualmente existen soluciones muy eficientes. De hecho, se construyeron estructuras mecánicas eficientes, desde pequeños insectos hasta humanoides para dirigir movimiento. Se propusieron soluciones interesantes para permitir a los robots caminar, volar y nadar con alta precisión, gran movilidad y estabilidad. Desafortunadamente y a pesar de todos los esfuerzos y desarrollos tecnológicos, la toma de decisiones y la autonomía aún son cuellos de botella.

#### 2.1.4. Robótica Humanoide

En paralelo con el proyecto *SRI-SHAKEY*, la Universidad de Waseda lanzó el proyecto *Wabot 1* (1970). El objetivo del proyecto fue desarrollar al primer robot humanoide a escala completa. Fue presentado en 1973 como el primer robot antropomórfico. Este fue el mayor salto para la robótica: la idea detrás no era servir solamente como una cámara de pruebas para el desarrollo de la Inteligencia Artificial, sino también enfocarse en su principal propiedad: el antropomorfismo.

Esta última característica fue considerada como la condición necesaria para que los robots sean *aceptados* como acompañantes. De hecho, el *Wabot 1* se enfocaba en el campo de asistente humano o acompañante humano. Parecía que la condición necesaria para alcanzar tal meta era su forma humanoide: el robot necesitaba ser diseñado como un humano. Esta morfología se suponía como el camino lógico para permitir al robot evolucionar en los mismos ambientes internos y satisfacer todas las restricciones consecuentes. Otra motivación para modelar al robot de esta manera era facilitar la interacción humano-robot. La última motivación es una interpretación especulativa: al crear tal robot, los desarrolladores estaban apuntando a altos impactos emocionales, psicológicos y económicos.

La robótica humanoide estaba ahí y los investigadores enfrentaron problemas más complejos que para las plataformas con ruedas. En todos los sectores, los humanoides presentaron los problemas más desafiantes: para control de movimiento, para entendimiento del entorno y percepción, para interacciones con humanos, etc. los humanoides requerían soluciones más avanzadas. Uno de los primeros esfuerzos fue el lidiar con la locomoción. Este problema es específico para robots con piernas y al contrario de los robots con llantas, los robots con piernas necesitan una estabilización dinámica mientras caminan. Este problema inherente fue atacado y la formulación del *ZMP* (*Zero Moment Point*), fue propuesta y muchas soluciones basadas en control automático fueron propuestas e implementadas dentro de este sistema. Más recientemente, enfoques bio-inspirados (*CPG* (*Central Pattern Generators*) por ejemplo) fueron propuestos e implementados. La percepción fue también un gran problema y uno de los temas más desafiantes. Las primeras soluciones propuestas fueron directamente derivadas de enfoques clásicos. Técnicas de visión por computadora fueron aplicadas para navegación y reconocimiento de objetos. Desafortunadamente estos esfuerzos no fueron suficientes y se necesitó ayuda extra-robótica: el tema humanoide es considerado como un proyecto transversal donde la cooperación de diversas disciplinas y campos son necesarios.

Se puede advertir la existencia de dos corrientes principales apuntando a dos objetivos diferentes: el primero es desarrollar robots cooperativos, es decir, teniendo capacidades y habilidades para entender los deseos humanos, comportamiento, lenguaje, etc. teniendo emociones y comportamiento propio, etc. La segunda corriente usa a los humanoides como una cama de pruebas para entender mejor a los humanos: el humanoide es usado como un simulador para soportar valoraciones de modelos basados en humanos.

A continuación se dan un par de definiciones para entender mejor el contexto.

**Definición** *Zero Moment Point*: Punto proyectado en el suelo en el cual el *momentum* neto de las fuerzas que actúan sobre el Robot no tiene componente a lo largo del eje horizontal.

**Definición** *Central Pattern Generator*: Circuitos Neuronales que se encuentran en animales verte-

brados e invertebrados que producen patrones oscilatorios para comportamientos motrices rítmicos. En robótica se usan como tabiques para la construcción de controladores de caminado. Desde un punto de vista matemático, son sistemas dinámicos que exhiben comportamientos de ciclos límite, los cuales ofrecen ciertas ventajas cuando se aplican al caminado de robots.

## 2.2. Teleoperación

Los primeros objetivos de la tele-operación fueron permitir controlar a distancia sistemas mecánicos complejos, para (tele) manipular material peligroso. La primera necesidad en ese tiempo fue concerniente con la destreza: el sistema tiene que ser lo suficientemente diestro para soportar tareas simples como por ejemplo vaciar un líquido en un recipiente. Rápidamente después de la destreza, surgieron otras necesidades. Por razones de seguridad, la distancia entre el operador y el campo de operación debía ser incrementado. Esto llevó a nuevas necesidades, como por ejemplo, la implementación de una transmisión mecánica compleja. El primer sistema maestro-esclavo desarrollado por *Goertz* fue puramente mecánico y los operadores movían al esclavo a través de cables y cintas mientras tenían una vista directa del esclavo. Al hacer esto, los operadores manejaban inercia parásita y producían una carga de trabajo adicional que no estaba directamente dedicada a las manipulaciones. Esta distorsión fue corregida rápidamente. De hecho, los electro-servomecanismos y controladores reemplazaron los cables y cintas. Esto permitió una fuerza eléctrica reflejando posición, permitiendo a los operadores dedicar su energía a las manipulaciones.

Después de las mejoras en movilidad, destreza y reflexión de fuerza, se empezó a mejorar otras capacidades sensitivas. De hecho y para proteger a los usuarios, se impuso una distancia mínima entre el maestro y el esclavo. Se tuvieron dos problemas con esta separación mecánica: ya no era posible una visión directa del esclavo, y aparecieron retardos de tiempo. Para la realimentación visual, se mostraba video en vivo en una pantalla de televisión, y para los retrasos, la gente empezó por intentar entender sus efectos, por ejemplo, desarrollaron los primeros estudios de psicofísica para modelar el comportamiento humano cuando se realizan tareas de tele-operación. Sus conclusiones fueron que los operadores utilizan la estrategia *mueve y espera* en presencia de retraso; los humanos compensan internamente los retrasos en lazo cerrado. Esto llevó al desarrollo del llamado *control supervisado*; un enfoque heurístico donde el controlador permite al operador especificar tareas a un alto nivel. Estas tareas son descompuestas por el controlador en comandos atómicos y realizadas por el controlador remoto como un conjunto de tareas simples. La secuencia es ejecutada bajo la supervisión del operador (es decir, el operador puede interrumpir el proceso a cualquier hora; también puede modificar la descripción de tareas o nivel). Este enfoque simbólico (o basado

en Inteligencia Artificial) llevó a soluciones de software para proveer mayor *inteligencia y autonomía* al controlador remoto para compensar retrasos. Una variación de este enfoque fue propuesta después con la noción de muestreos predictivos.

Este enfoque fue seguido por un gran esfuerzo de la comunidad de control automático. Por último, la tele-operación ha sido establecida como un problema doble: *estabilidad y transparencia*. Para el primer aspecto, la meta es mantener la estabilidad del sistema a pesar del comportamiento del operador o del entorno. Para el segundo, la meta es permitir el sentimiento de tele-presencia, es decir, esconder la interfaz y permitir al operador realizar interacciones como si estuviera dentro del ambiente remoto [10]. Muchos avances, principalmente análisis basado en *Lyapunov* impedancia y representaciones híbridas, esquemas de control basadas en pasividad, etc, fueron hechas, permitiendo soluciones estables y muy eficientes para manejar retrasos inherentes como en el espacio, o aplicaciones bajo el agua. De manera similar, la transparencia fue tratada de las dos maneras, transmisión de fuerza y velocidad.

La reflexión de fuerza y la realimentación visual aparecieron muy temprano como insuficientes modalidades sensoriales para garantizar interacciones remotas eficientes: los operadores necesitan más que una visión en 2D y enlaces hápticos con el mundo remoto.

Se ha trabajado mucho en el canal visual. Sheridan [49] resumió la influencia de la realimentación de video en el rendimiento del operador. Los efectos de la tasa de cuadros, resolución, colores, oclusiones y posición del punto de vista del operador también fueron estudiados. Se mostró que el rendimiento era afectado. El canal háptico recibió también mucha atención.

Muchas soluciones técnicas similares fueron propuestas por otro canal, principalmente táctil, auditiva, kinestética e incluso olfatoria. Las guías para el diseño de tales herramientas fueron dirigidas hacia reproducir exactamente como posible información, flujos de acciones y reacciones para ambos lados (el maestro y el esclavo): por un lado, el maestro (el lado del operador humano) debe capturar todos sus deseos. Por otro lado, el esclavo debe capturar la *imagen* del mundo remoto y trasladarla en estímulos para el operador, para permitir que se sienta dentro de este. Este último concepto es conocido como *Tele-Presencia*.

Los sistemas de *Tele-Presencia* permiten al operador humano *Tele-Existir*, es decir, no solo sentir estar en algún lugar sino también hacerles sentir a las personas distantes la presencia de la persona tele-existente. Los sistemas de Tele-Presencia y Tele-Existencia no son implementables por completo debido a las limitaciones tecnológicas principalmente. En la Figura 2.1 se trata de ilustrar como en la época actual apenas se ha llegado a los Sistemas de Tele-presencia, sin embargo aún falta desarrollo para llegar a la Tele-existencia.

Algunos trabajos trataban de reconsiderar el problema de tele-operación desde un punto de vista

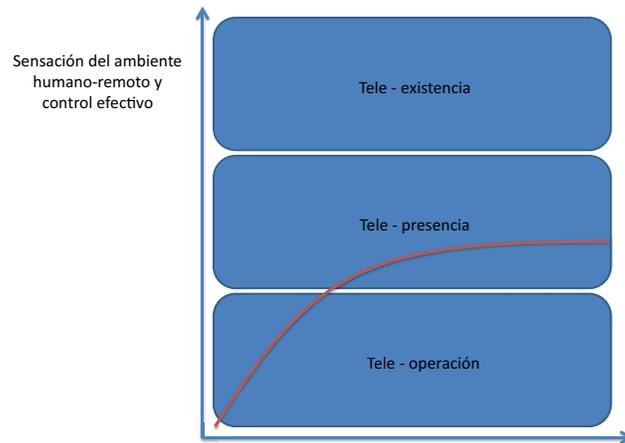


Figura 2.1: Hacia la Teleoperación

del sistema centrado en el humano. De hecho, el humano es una pieza central de los sistemas maestro-esclavo: La ergonomía y los factores humanos aparecieron dentro del campo de la teleoperación y diversos estudios surgieron. El problema fue establecido como la manipulación de sistemas complejos y la realimentación sensorial y los dispositivos de entrada fueron identificados como problemas clave. La formulación fue la siguiente: Para permitir que la gente interactuara a distancia, uno necesita recolectar el máximo de información sobre el mundo remoto y mostrar esta información tan rápida y precisa como sea posible al operador.

A continuación se darán algunas definiciones para tratar de esclarecer más el tema

**Definición** Tele-Operador: Máquina que permite a un operador humano moverse, sentir y manipular mecánicamente objetos a una cierta distancia. Más generalmente cualquier herramienta la cual extiende la acción mecánica de la persona más allá de su alcance [15].

**Definición** Tele-Robot: Es una subclase de un tele-operador. Es un robot que acepta instrucciones a distancia, generalmente de un operador humano y realiza acciones en vivo en un ambiente distante a través del uso de sensores u otros mecanismos de control. Usualmente tiene sensores y efectores para manipulación y/o movilidad, más un medio para que el operador humano se comunique con ambos [15].

**Definición** Tele-Operación: Es un medio para operar un robot usando inteligencia humana, el cual requiere la disponibilidad de una interfaz adecuada hombre-máquina. Un sistema de tele-operación usualmente consiste en dos robots manipuladores que están conectados de tal manera que permiten

al operador humano controlar uno de ellos, el cual es llamado el maestro, para generar comandos que se mapean al manipulador remoto, llamado esclavo [15].

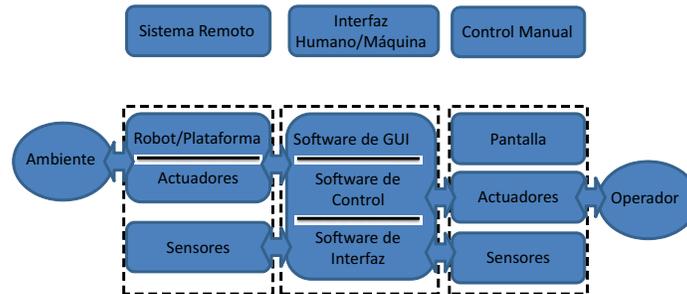


Figura 2.2: Flujo de Información en un Sistema de Tele-Operación

En la Figura 2.2 se ilustra el flujo de información en un sistema de Tele-Operación.

**Definición** Tele-Manipulación: Esquema en el cual un esclavo que usualmente está en un ambiente remoto o peligroso, rastrea el movimiento del maestro. En general, la telemanipulación se divide en dos procesos acoplados: la interacción entre el operador y el dispositivo maestro y la interacción entre el dispositivo esclavo remoto y su ambiente [15].

En la Figura 2.3 se muestra la estructura básica del sistema de comunicación en un sistema tele-operado. Se puede ver que los retardos son una parte fundamental de este y pueden influir en gran medida en su desempeño.

### 2.2.1. Aplicaciones

Las tareas de los sistemas de tele-operación se distinguen por la interacción continua entre el operador humano, el sistema tele-operador y el entorno.

#### Espacio

La tele-operación ha sido usada muy frecuentemente en aplicaciones espaciales. La mayoría de las sondas en el espacio han sido tele-robots, las cuales tenían controles relativamente simples,

## Canal de Comunicación

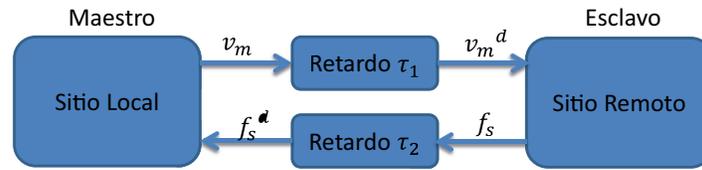


Figura 2.3: Diagrama de Bloques de un Sistema de Tele-Operación Bilateral

sencillos y confiables, teniendo una capacidad de bajo ancho de banda para recibir imágenes y otro tipo de información sensorial, y la habilidad de ser reprogramados en el espacio.

En 1993 la Agencia Espacial Alemana *DLR* demostró satisfactoriamente el primer tele-robot espacial, el experimento *Rotex* en el volante espacial de la *NASA*. Este experimento mostró la habilidad de una computadora para controlar un robot en el espacio y también que la tele-manipulación espacial puede ser controlada desde la tierra satisfactoriamente tomando en cuenta un retardo de tiempo.

Japón ha hecho un notable progreso en el desarrollo del tele-operador. El Módulo Experimental de Japón (JEM) es una parte integral de la Estación Espacial Libertad. JEM incluye un gran tele-operador operado desde un *pórtico*.

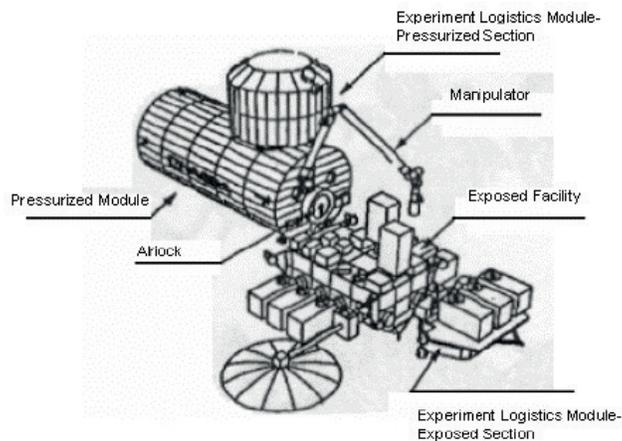


Figura 2.4: Teleoperador en JEM

## Bajo el Mar

En el área de aplicaciones bajo el mar, la teleoperación es usada en exploraciones de petróleo fuera de la costa, plataformas de petróleo y tuberías, estudio geológico y tareas marítimas clasificadas.

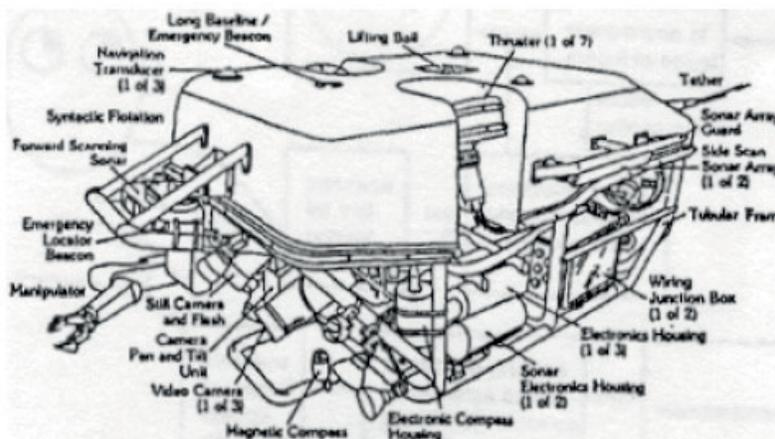


Figura 2.5: Vehículo submarino Jason

La Figura 2.5 muestra al vehículo submarino *Jason* que fue controlado remotamente para localizar al *Titanic*. Este sistema fue desarrollado como el proyecto *Argo-Jason* en el *Instituto Oceanográfico Woods Hole*.

## Limpieza de Desperdicios Tóxicos

La presencia de materiales radioactivos hacen al ambiente peligroso para humanos, y todas las tareas en este llevan a la tele-operación. Aunque el concepto principal del control remoto y la tele-operación es el mismo, el tamaño del sistema podría variar considerablemente dependiendo del tamaño de la tarea.

## Otras Aplicaciones

Los tele-operadores de hoy se involucran en más y diferentes aplicaciones; se vuelven aceptados como la manera normal de realizar tareas. En medicina, la tele-operación de CAT e imagen MRI está siendo usada para guiar dispositivos robóticos para maquinizar cabezas de fémur y otros huesos. Los tele-operadores modernos y avanzados y dispositivos tele-robóticos se aplican en ambientes peligrosos incluyendo aquellos que lo son para los humanos (reactores nucleares), aquellos donde los humanos afectan el ambiente (cuartos limpios).

### 2.2.2. Control de Impedancia

**Definición** Admitancia: Acepta entradas forzadas (por ejemplo, fuerza) y produce salidas fluidas (por ejemplo, movimiento) [27].

**Definición** Impedancia: Acepta entradas fluidas (por ejemplo, movimiento) y produce salidas forzadas (por ejemplo, fuerza) [27].

Cuando un manipulador está acoplado mecánicamente a su entorno, para asegurar compatibilidad física con la admitancia ambiental, el manipulador debe asumir el comportamiento de una impedancia. Debido a que la interacción mecánica con el ambiente cambiará con distintas tareas, o incluso mientras se ejecuta una tarea (el manipulador podría estar acoplado al entorno en una fase y desacoplado de él en otra) el comportamiento del manipulador debe ser adaptable. Entonces el controlador debe ser capaz de modular la impedancia del manipulador de manera apropiada para cada fase particular de la tarea.

Una estrategia general para controlar un manipulador es controlar su movimiento y adicionalmente darle una *respuesta perturbada* para cambios de ese movimiento el cual tiene la forma de una impedancia. La interacción dinámica entre el manipulador y su entorno pueden ser modulados, regulados y controlados al cambiar esa impedancia, a ese enfoque se le llama *Control de Impedancia*. Debido a que el manipulador corresponde a algún sistema físico equivalente podría ser representado por una red de elementos de sistemas físicos tales como en un gráfico conexo. Una red física equivalente representando fuerza *control de fuerza pura* a lo largo de un solo grado de libertad se muestra en la Figura 2.6.

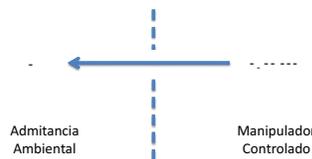


Figura 2.6: Control de Fuerza Pura

En esta gráfica los comandos de fuerza del supervisor de alto nivel al controlador de bajo nivel son representados por una fuente forzada, un elemento ideal podría imponer cualquier historial de

fuerza en el resto del sistema independientemente de su movimiento.

Si se asume que como mínimo el manipulador debe ser capaz de posicionar establemente una masa, se puede ver que esta red es una descripción incompleta de la acción de control necesaria: Posicionar establemente requiere como mínimo una relación estática entre fuerza y posición; algún elemento tipo resorte debe ser incluido en la red física equivalente. El controlador debe especificar una cantidad vectorial como la posición deseada, pero también debe especificar una cantidad fundamentalmente diferente: una relación, una impedancia, la cual tiene propiedades similares a aquellas de segundo rango, tensor dos veces covariante; opera en un vector contravariante de desviaciones de la posición deseada para producir un vector covariante de fuerzas. De hecho, los componentes linealizados de la impedancia tal como la rigidez y la viscosidad son tensores dos veces covariantes de segundo rango.

La red física equivalente más simple representando control de impedancia se muestra en la Figura 2.7.

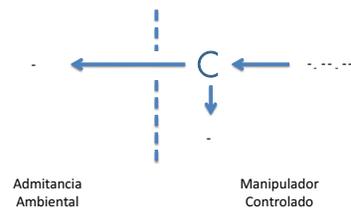


Figura 2.7: Control de Impedancia

La posición ordenada por el supervisor de alto nivel es representada por una fuente fluida, un elemento ideal el cual podría imponer cualquier historial de velocidad al resto del sistema. Para prevenir el conflicto causal entre este elemento y la admitancia del entorno (la cual podría experimentar un esfuerzo) se interpone una *unión cero* (todos los sistemas conectados a él experimentan el mismo esfuerzo mientras sus flujos suman cero) entre las dos. La impedancia acoplada a esta *unión cero* representa la relación entre fuerza y movimiento ordenada por el supervisor e incluye la relación estática fuerza/deslizamiento más los términos dinámicos posibles requeridos para asegurar el comportamiento dinámico controlado.

En este control no se controla ni la posición ni la fuerza, sino que se mantiene la relación dinámica deseada entre ellas. El objetivo del *control de impedancia* es mantener una relación dinámica

deseada entre la posición del efector final y la fuerza de contacto del efector final o el ambiente. La entrada de control la cual describe la relación de impedancia objetivo puede tener una forma funcional arbitraria pero generalmente se selecciona de la forma de una ecuación diferencial lineal de segundo orden describiendo el sistema mecánico desacoplado *masa-resorte-amortiguador*. Mas aún, en el control de impedancia, el manipulador del robot actúa como un sistema *masa-resorte-amortiguador*. Este control consiste en una sola ley de control que acomoda fuerzas externas. Como resultado, requiere pocas tareas off-line, provee robustez a incertidumbres y perturbaciones y suministra una transición estable entre movimientos restringidos y no restringidos. La mayoría de los algoritmos de control de impedancia usan el método de torque computado llamado control de impedancia basado en torque. Una desventaja importante de este enfoque es que es sensible a incertidumbres del modelo y variaciones de parámetros. Adicionalmente, esta técnica es altamente dependiente de las características dinámicas del manipulador que no están disponibles para la mayoría de los manipuladores industriales. Este problema lleva a la implementación de otro tipo de controlador de impedancia, el cual es llamado, el control de impedancia basado en posición.

### Control de Impedancia basado en Posición

En la Figura 2.8 se muestra el diagrama de bloques de un Controlador de Impedancia basado en Posición (PBIC) aplicado a un manipulador.

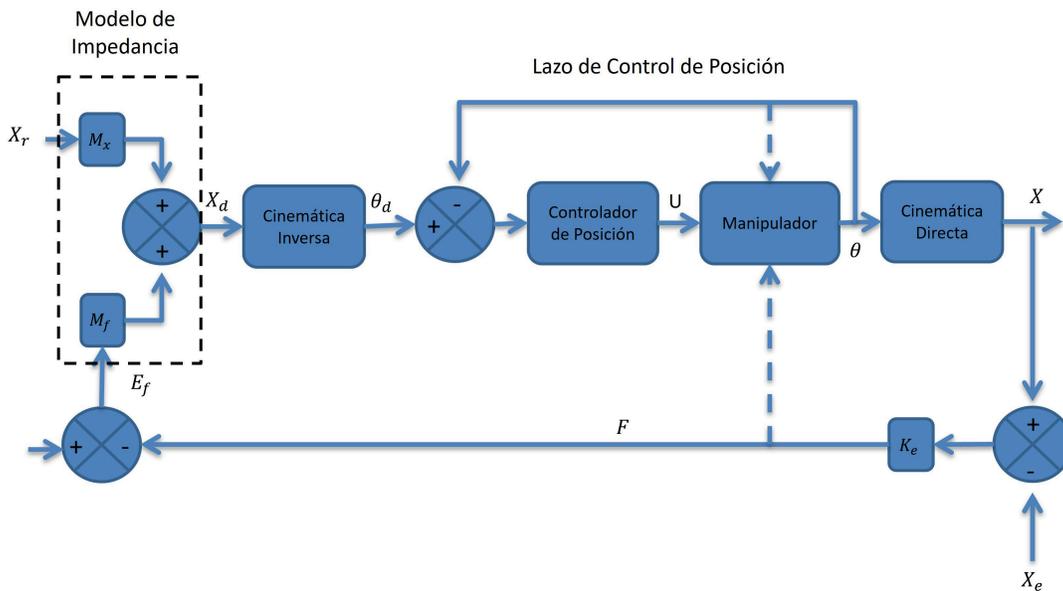


Figura 2.8: Controlador PBIC aplicado a manipulador

En este diagrama de bloques,  $x_r$  y  $F_r$  representan los puntos de ajuste de posición y fuerza

respectivamente. Sin pérdida de generalidad, para este ejemplo se asume que

$$M \in \mathbb{R}$$

$$C \in \mathbb{R}$$

$$K \in \mathbb{R}$$

$$f \in \mathbb{R}$$

La impedancia objetivo usada en este estudio es un sistema lineal de segundo orden (en este caso en particular se tomará en cuenta a la fuerza de contacto  $f$  como una función lineal)

$$M\ddot{x} + C(\dot{x} - \dot{x}_r) + K(x - x_r) = -f \quad (2.1)$$

donde  $M$ ,  $C$  y  $K$  son los parámetros de impedancia objetivo representando masa, amortiguamiento y rigidez respectivamente;  $f$  muestra la fuerza de contacto, así que  $M_x$  y  $M_F$  mostradas en la Figura 2.8 pueden ser definidas como

$$M_x = Cs + \frac{K}{Ms^2 + Cs + K} \quad (2.2)$$

$$M_F = \frac{1}{Ms^2 + Cs + K} \quad (2.3)$$

$M_x$  y  $M_F$  trabajan en la posición de referencia  $x_r$ , y el error de fuerza  $E_f$  respectivamente para formar el efector final  $x_d$  deseado, el cual está en el espacio cartesiano. El entorno se modela por un resorte lineal con la rigidez de  $k_e$  y la posición de  $x_e$ . El PBIC es altamente afectado por el desempeño del controlador de posición. Entonces se necesita un controlador de posición con alta precisión para usarse en el lazo de posición interno.

### 2.2.3. Reflexión de Fuerza

La tele-operación ha seguido la meta de la manipulación remota, prometiendo a los usuarios la habilidad de interactuar naturalmente con ambientes que están normalmente más allá del alcance humano. Los primeros de tales sistemas fueron desarrollados a finales de la década de los cuarenta, permitiéndole a un operador manejar materiales radioactivos detrás de una pared blindada. Estos robots maestro y esclavo fueron conectados mecánicamente y se comportaban como simples herramientas extendidas. El usuario podía sentir fácilmente las fuerzas de interacción del ambiente remoto mientras que eran transmitidas directamente a través del mecanismo. La aplicabilidad de tales sistemas fue incrementada al reemplazar su conexión mecánica por un sistema de control eléctrico. Actualmente los humanos usan la tele-robótica para explorar el océano profundo, ensamblar equipo en el espacio, y realizar cirugías mínimamente invasivas; desafortunadamente, estos

sistemas modernos tienen problemas al proveer al usuario con una realimentación de fuerza de sensación natural.

Un tele-operador ideal haría que las interacciones remotas se sintieran como manipulación directa, retratando la dinámica del ambiente distante sin distorsionar los movimientos del usuario o las percepciones hápticas. Los movimientos de una mano humana promedio contienen frecuencias de unos cuantos *Hertz*, lo cual muchos sistemas tele-robóticos pueden seguir fácilmente. Los tele-operadores encuentran una mayor dificultad en proveer una buena realimentación háptica; en contraste con el bajo ancho de banda de la actuación humana, los humanos pueden percibir frecuencias desde *ceró Hertz* hasta *KiloHertz*. Las señales transitorias de alta frecuencia causadas por el contacto entre la herramienta y un objeto rígido son particularmente importantes ya que son un fenómeno no lineal. Los humanos pueden procesar estas fuerzas de reacción de corta duración, las cuales a menudo parecen sinusoides decayendo, para determinar el material y geometría del objeto siendo tocado. La investigación ha mostrado que retratar tales señales incrementa la destreza y realismo de las interacciones hápticas, pero los sistemas de tele-robótica actuales raramente pueden transmitir tal realimentación de fuerza matizada.

Entre los muchos controladores usados en tele-robótica, la arquitectura posición-fuerza busca proveer una realimentación precisa al medir explícitamente la fuerza de contacto entre el esclavo y el entorno. Las fuerzas medidas en el *esclavo* son mostradas simultáneamente por medio de los motores del *maestro*, transmitidas a las manos del usuario vía la estructura del dispositivo. Un aspecto fascinante de esta arquitectura es como sigue: a lo largo de la interacción, el mecanismo maestro debe realizar tareas duales de medición de posición y demostración de fuerza. La dinámica del *maestro* junta estas dos funciones, permitiendo a la salida de fuerza del dispositivo afectar su entrada de posición. Los sistemas de tele-robótica permiten que la realimentación de fuerza de alta frecuencia induzca el movimiento del dispositivo maestro que después es tratado como un comando de posición. Durante el contacto con el entorno, este movimiento inducido puede llevar a todo el sistema a un estado inestable con vibraciones de alta frecuencia. La ganancia de realimentación de fuerza debe ser atenuada para alcanzar estabilidad, reduciendo señales hápticas al usuario y dejando las sensaciones de las interacciones suaves y mal definidas [34].

## Capítulo 3

# Modelado de Robot Maestro y Robot Esclavo

### 3.1. Cinemática de Cuerpo Rígido

Cinemática es el estudio de la geometría del movimiento. Relaciona el desplazamiento, velocidad, aceleración y tiempo sin tomar en cuenta la causa de este [5].

La cinemática de un robot manipulador describe la relación entre el movimiento de las articulaciones de este y el movimiento resultante de los cuerpos rígidos que lo forman.

Muchos manipuladores modernos consisten en un conjunto de eslabones rígidos conectados a través de articulaciones. Los motores se unen a las articulaciones para que el movimiento general del mecanismo pueda ser controlado para realizar una tarea en específico. Se añade una herramienta al final de robot para interactuar con el entorno.

Aunque cualquier tipo de mecanismo articulado puede ser usado para conectar los eslabones de un robot, tradicionalmente estos son elegidos de un conjunto de seis mecanismos llamados *pares bajos*. Ellos representan articulaciones rotacionales, prismáticas, helicoidales, cilíndricas, esféricas y planares.

**Definición** Cuerpo Rígido: Colección de partículas  $C \in \mathbb{R}^3$  en las que la distancia entre dos cualesquiera permanece constante a pesar del movimiento del cuerpo o de las fuerzas a las que se someta.

$$\forall p, q \in C \quad \forall t \quad \| p(t) - q(t) \| = \| p(0) - q(0) \| = cte$$

### 3.1.1. Cinemática del Robot Manipulador PHANTOM Omni

En esta sección se presenta la obtención de la cinemática del Robot PHANTOM Omni. Se resuelve tanto el problema cinemático Directo como el Inverso.

El problema cinemático Directo se resuelve mediante la metodología de Denavit Hartenberg, mientras que el problema cinemático Inverso se resolvió mediante el enfoque presentado en [3].

#### Cinemática Directa

Se realizó el siguiente diagrama cinemático en AutoCAD

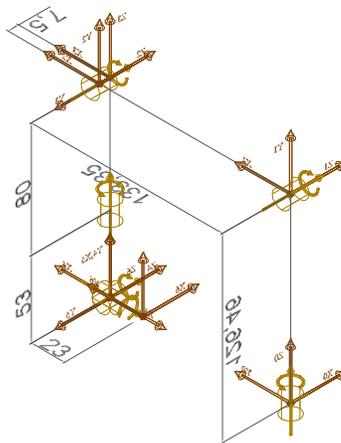


Figura 3.1: Diagrama Cinemático Robot Phantom OMNI

De acuerdo con el diagrama de la Figura 3.1 se obtuvo la siguiente tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg. Se puede observar que el Robot tiene 6 grados de libertad.

La transformación de 0 a 6 está dada por las matrices de paso

$$T_0^6 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$$

A continuación se muestran las matrices de paso

$i$	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$\theta_1 + 90^\circ$	$d_1$	0	$90^\circ$
2	$\theta_2$	0	$d_2$	$0^\circ$
3	$\theta_3$	$d_3$	0	$-90^\circ$
4	$\theta_4$	$-(d_4 + d_5)$	0	$90^\circ$
5	$\theta_5 + 90^\circ$	0	0	$-90^\circ$
6	$\theta_6 - 90^\circ$	$d_6$	0	$-90^\circ$

Tabla 3.1: Parámetros Denavit-Hartenberg del Robot Maestro

$$\begin{aligned}
A_1 &= \begin{bmatrix} -\sin(\theta_1) & 0 & \cos(\theta_1) & 0 \\ \cos(\theta_1) & 0 & \sin(\theta_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & A_2 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & d_2 \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & d_2 \sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
A_3 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & 0 & -\sin(\theta_3) & 0 \\ \sin(\theta_3) & 0 & \cos(\theta_3) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & A_4 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_4) & 0 & \sin(\theta_4) & 0 \\ \sin(\theta_4) & 0 & -\cos(\theta_4) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -d_4 - d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
A_5 &= \begin{bmatrix} -\sin(\theta_5) & 0 & -\cos(\theta_5) & 0 \\ \cos(\theta_5) & 0 & -\sin(\theta_5) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & A_6 &= \begin{bmatrix} \sin(\theta_6) & 0 & \cos(\theta_6) & 0 \\ -\cos(\theta_6) & 0 & \sin(\theta_6) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

### Cinemática Inversa

El problema cinemático inverso de este robot se resolvió mediante el enfoque presentado en [3].

A continuación y a modo de nomenclatura se denominará

$$T_d = \begin{bmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{n} & \mathbf{a} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La cinemática directa está dada por

$$T_0^1 T_1^2 T_2^3 T_3^4 T_4^5 T_5^6 = T_d$$

donde  $T_d$  es la posición y orientación deseadas.

A continuación se realizó el siguiente despeje

$$T_1^2 T_2^3 T_3^4 = T_1^0 T_d T_6^5 T_5^4$$

Al hacer esto, se llega al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \sin(\theta_2 + \theta_3)(d_4 + d_5) + d_2 \cos(\theta_2) &= \cos(\theta_1)(p_y + d_6 n_y) - \sin(\theta_1)(d_6 n_x + p_x) \\ -\cos(\theta_2 + \theta_3)(d_4 + d_5) + d_2 \sin(\theta_2) &= p_z - d_1 + d_6 n_z \\ d_3 &= \cos(\theta_1)(p_x + d_6 n_x) + \sin(\theta_1)(p_y + d_6 n_y) \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado y sumando las tres ecuaciones anteriores se obtiene la solución para el ángulo  $\theta_3$

$$\sin(\theta_3) = \frac{(p_y + d_6 n_y)^2 + (p_x + d_6 n_x)^2 + (p_z - d_1 + d_6 n_z)^2 - (d_4 + d_5)^2 - d_2^2 - d_3^2}{2d_2(d_4 + d_5)}$$

Se sabe que el coseno está dado por

$$\cos(\theta_3) = \pm \sqrt{1 - \sin^2(\theta_3)}$$

Por lo que la solución queda en la forma

$$\begin{aligned} \tan(\theta_3) &= \frac{\sin(\theta_3)}{\pm \sqrt{1 - \sin^2(\theta_3)}} \\ \theta_3 &= \arctan \left[ \frac{\sin(\theta_3)}{\pm \sqrt{1 - \sin^2(\theta_3)}} \right] \end{aligned}$$

A continuación se tiene la siguiente ecuación matricial

$$T_0^1 T_1^2 T_2^3 T_3^4 T_4^5 = T_d T_6^5$$

De donde se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones no lineales

$$d_3 \cos(\theta_1) - \sin(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_1)(d_4 + d_5) - d_2 \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) = p_x + d_6 n_x \quad (3.1)$$

$$d_3 \sin(\theta_1) + \sin(\theta_2 + \theta_3) \cos(\theta_1)(d_4 + d_5) + d_2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) = p_y + d_6 n_y \quad (3.2)$$

$$d_1 - \cos(\theta_2 + \theta_3)(d_4 + d_5) + d_2 \sin(\theta_2) = p_z + d_6 n_z \quad (3.3)$$

Elevando al cuadrado las ecuaciones (3.1) y (3.2) y sumándolas

$$(\sin(\theta_2) \cos(\theta_3) + \cos(\theta_2) \sin(\theta_3))(d_4 + d_5) + d_2 \cos(\theta_2) = \pm \sqrt[2]{(p_x + d_6 n_x)^2 + (p_y + d_6 n_y)^2 - d_3^2}$$

$$\sin(\theta_2) \cos(\theta_3)(d_4 + d_5) + \cos(\theta_2) [\sin(\theta_3)(d_4 + d_5) + d_2] = \pm \sqrt[2]{(p_x + d_6 n_x)^2 + (p_y + d_6 n_y)^2 - d_3^2} \quad (3.4)$$

Regresando a la ecuación (3.3) y haciendo algo de álgebra se llega a

$$\sin(\theta_2) [\sin(\theta_3)(d_4 + d_5) + d_2] - \cos(\theta_2) \cos(\theta_3)(d_4 + d_5) = p_z + d_6 n_z - d_1 \quad (3.5)$$

Se hace

$$\sin(\theta_3)(d_4 + d_5) + d_2 = r \sin(\psi) \quad (3.6)$$

$$\cos(\theta_3)(d_4 + d_5) = r \cos(\psi) \quad (3.7)$$

De lo cual se puede obtener el ángulo  $\psi$

$$\psi = \arctan\left(\frac{\sin(\theta_3)(d_4 + d_5) + d_2}{\cos(\theta_3)(d_4 + d_5)}\right)$$

Sustituyendo (3.6) y (3.7) en (3.4) y (3.5)

$$r \sin(\theta_2) \cos(\psi) + r \cos(\theta_2) \sin(\psi) = \pm \sqrt[2]{(p_x + d_6 n_x)^2 + (p_y + d_6 n_y)^2 - d_3^2}$$

$$r \sin(\theta_2) \sin(\psi) - r \cos(\theta_2) \cos(\psi) = p_z + d_6 n_z - d_1$$

Simplificando y despejando  $\theta_2$

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{\pm \sqrt[2]{(p_x + d_6 n_x)^2 + (p_y + d_6 n_y)^2 - d_3^2}}{-p_z - d_6 n_z + d_1}\right) - \psi$$

Se tiene la siguiente expresión

$$d_3 \cos(\theta_1) - \sin(\theta_1) \left(\frac{p_y + d_6 n_y - d_3 \sin(\theta_1)}{\cos(\theta_1)}\right) = p_x + d_6 n_x$$

Despejando  $\theta_1$

$$\tan \left( \theta_1 + \arctan \left( \frac{p_x + d_6 n_x}{p_y + d_6 n_y} \right) \right) = \frac{d_3}{\pm \sqrt[2]{(p_x + d_6 n_x)^2 + (p_y + d_6 n_y)^2 - d_3^2}}$$

$$\theta_1 = \arctan \left( \frac{d_3}{\pm \sqrt[2]{(p_x + d_6 n_x)^2 + (p_y + d_6 n_y)^2 - d_3^2}} \right) - \arctan \left( \frac{p_x + d_6 n_x}{p_y + d_6 n_y} \right)$$

Para las últimas tres variables articulares se eligió la siguiente convención de ángulos de Euler para la orientación del efector final

$$R(\psi, \phi, \theta) = R(y, \psi) R(x, \phi) R(z, \theta) = R_d$$

Se tiene la siguiente ecuación matricial

$$T_0^1 T_1^2 T_2^3 T_3^4 T_4^5 T_5^6 = T_d$$

Se despejan las últimas tres matrices de transformación

$$T_3^4 T_4^5 T_5^6 = T_3^2 T_2^1 T_1^0 T_d$$

De esta ecuación se obtienen las siguientes expresiones para las últimas tres variables articulares

$$\begin{aligned} \sin(\theta_5) &= n_z \cos(\theta_2 + \theta_3) + \sin(\theta_2 + \theta_3) \{n_x \sin(\theta_1) - n_y \cos(\theta_1)\} \\ \cos(\theta_5) &= \pm \sqrt[2]{1 - \sin^2(\theta_5)} \\ \theta_5 &= \arctan \left\{ \frac{\sin(\theta_5)}{\pm \sqrt[2]{1 - \sin^2(\theta_5)}} \right\} \end{aligned}$$

A continuación se obtiene la solución para  $\theta_4$

$$\tan(\theta_4) = \frac{-n_x \cos(\theta_1) - n_y \sin(\theta_1)}{n_z \sin(\theta_2 + \theta_3) + \cos(\theta_2 + \theta_3) (n_y \cos(\theta_1) - n_x \sin(\theta_1))}$$

Por último para  $\theta_6$

$$\tan(\theta_6) = \frac{\sin(\theta_2 + \theta_3) (s_x \sin(\theta_1) - s_y \cos(\theta_1)) + s_z \cos(\theta_2 + \theta_3)}{\sin(\theta_2 + \theta_3) (a_x \sin(\theta_1) - a_y \cos(\theta_1)) + a_z \cos(\theta_2 + \theta_3)}$$

### 3.1.2. Cinemática del Robot Manipulador Robai Cyton Gamma 1500

En la siguiente sección se resuelven los problemas cinemático directo e inverso del robot Manipulador Robai Cyton Gamma 1500. El problema cinemático directo se resolvió mediante la metodología de Denavit-Hartenberg. Por otro lado, el problema cinemático inverso se resolvió mediante la metodología descrita en [3].

#### Cinemática Directa

Se realizó el diagrama cinemático en AutoCAD

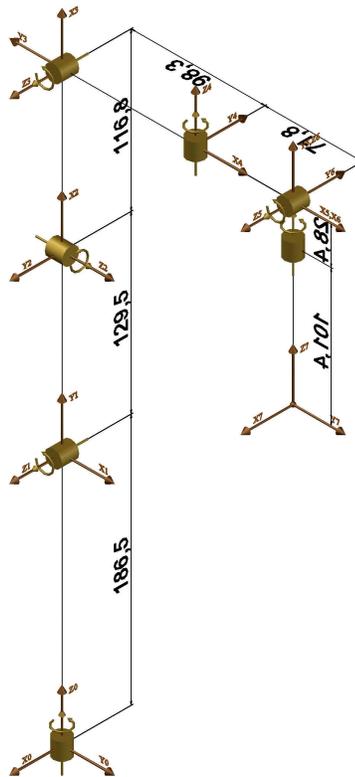


Figura 3.2: Diagrama Cinemático Manipulador Robai Cyton Gamma 1500

De este se obtuvo la siguiente tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg. Del diagrama cinemático se puede ver que este Robot tiene 7 grados de libertad.

$i$	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$\theta_1 + 90^\circ$	$d_1$	0	$90^\circ$
2	$\theta_2 + 90^\circ$	0	$d_2$	$90^\circ$
3	$\theta_3$	0	$d_3$	$-90^\circ$
4	$\theta_4 - 90^\circ$	0	$d_4$	$-90^\circ$
5	$\theta_5$	0	$d_5$	$90^\circ$
6	$\theta_6$	0	0	$-90^\circ$
7	$\theta_7 - 90^\circ$	$-(d_6 + d_7)$	0	$0^\circ$

Tabla 3.2: Parámetros Denavit-Hartenberg Diagrama Real Robot Esclavo

La Transformación de 0 a 7 está dada por las matrices de paso

$$T_0^7 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7$$

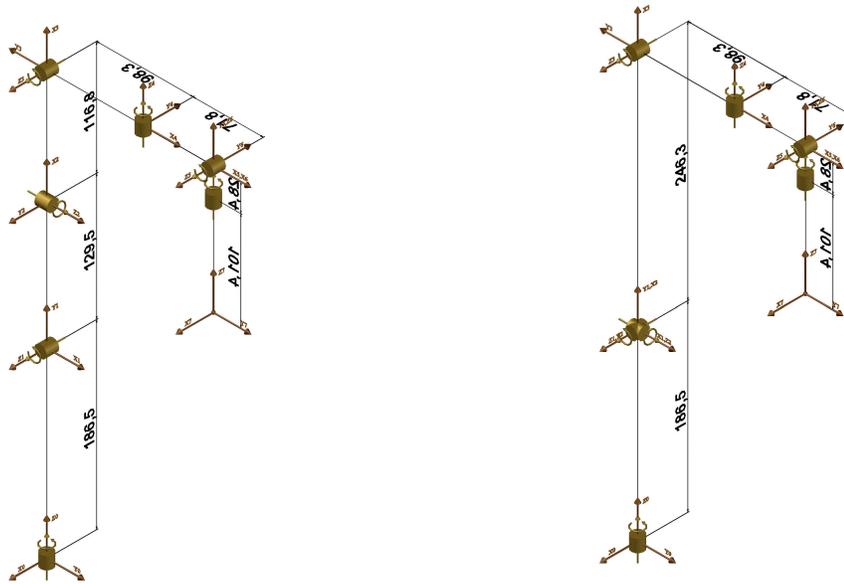
donde

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} -\sin(\theta_1) & 0 & \cos(\theta_1) & 0 \\ \cos(\theta_1) & 0 & \sin(\theta_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & A_2 &= \begin{bmatrix} -\sin(\theta_2) & 0 & \cos(\theta_2) & -d_2 \sin(\theta_2) \\ \cos(\theta_2) & 0 & \sin(\theta_2) & d_2 \cos(\theta_2) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & 0 & -\sin(\theta_3) & d_3 \cos(\theta_3) \\ \sin(\theta_3) & 0 & \cos(\theta_3) & d_3 \sin(\theta_3) \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & A_4 &= \begin{bmatrix} \sin(\theta_4) & 0 & \cos(\theta_4) & d_4 \sin(\theta_4) \\ -\cos(\theta_4) & 0 & \sin(\theta_4) & -d_4 \cos(\theta_4) \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 A_5 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_5) & 0 & \sin(\theta_5) & d_5 \cos(\theta_5) \\ \sin(\theta_5) & 0 & -\cos(\theta_5) & d_5 \sin(\theta_5) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & A_6 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_6) & 0 & -\sin(\theta_6) & 0 \\ \sin(\theta_6) & 0 & \cos(\theta_6) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 A_7 &= \begin{bmatrix} \sin(\theta_7) & \cos(\theta_7) & 0 & 0 \\ -\cos(\theta_7) & \sin(\theta_7) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -(d_6 + d_7) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

## Cinemática Inversa

Para la solución del problema cinemático inverso se utilizó un algoritmo híbrido. Con esto se hace referencia a que primeramente se busca una solución cerrada aproximada, y después la solución se refina mediante un algoritmo numérico. A continuación se describirá el proceso.

Debido a que se tiene un manipulador redundante, es decir, un robot de 7 grados de libertad y con una geometría compleja ya que los ejes de las últimas tres articulaciones no se intersecan en ningún punto se eliminó el offset de la base para que pudiera existir una muñeca esférica. A continuación se mostrará el diagrama cinemático original y el modificado con fines de comparación.



(a) Diagrama Cinemático Real

(b) Diagrama Cinemático Modificado

Figura 3.3: Comparativa Diagramas Cinemáticos

Se obtuvo la cinemática directa del manipulador modificado según la metodología Denavit-Hartenberg; a continuación se mostrarán la tabla de parámetros y las matrices de paso

$i$	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$\theta_1 + 90^\circ$	$d_1$	0	$90^\circ$
2	$\theta_2 + 90^\circ$	0	0	$90^\circ$
3	$\theta_3$	0	$d_2 + d_3$	$-90^\circ$
4	$\theta_4 - 90^\circ$	0	$d_4$	$-90^\circ$
5	$\theta_5$	0	$d_5$	$90^\circ$
6	$\theta_6$	0	0	$-90^\circ$
7	$\theta_7 - 90^\circ$	$-(d_6 + d_7)$	0	$0^\circ$

Tabla 3.3: Parámetros Denavit-Hartenberg Diagrama Modificado Robot Esclavo

$$\begin{aligned}
A_1 &= \begin{bmatrix} -\sin(\theta_1) & 0 & \cos(\theta_1) & 0 \\ \cos(\theta_1) & 0 & \sin(\theta_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & A_2 &= \begin{bmatrix} -\sin(\theta_2) & 0 & \cos(\theta_2) & 0 \\ \cos(\theta_2) & 0 & \sin(\theta_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
A_3 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & 0 & -\sin(\theta_3) & (d_2 + d_3) \cos(\theta_3) \\ \sin(\theta_3) & 0 & \cos(\theta_3) & (d_2 + d_3) \sin(\theta_3) \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & A_4 &= \begin{bmatrix} \sin(\theta_4) & 0 & \cos(\theta_4) & d_4 \sin(\theta_4) \\ -\cos(\theta_4) & 0 & \sin(\theta_4) & -d_4 \cos(\theta_4) \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
A_5 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_5) & 0 & \sin(\theta_5) & d_5 \cos(\theta_5) \\ \sin(\theta_5) & 0 & -\cos(\theta_5) & d_5 \sin(\theta_5) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & A_6 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_6) & 0 & -\sin(\theta_6) & 0 \\ \sin(\theta_6) & 0 & \cos(\theta_6) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
A_7 &= \begin{bmatrix} \sin(\theta_7) & \cos(\theta_7) & 0 & 0 \\ -\cos(\theta_7) & \sin(\theta_7) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -(d_6 + d_7) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

### Cinemática Inversa Analítica

De la cinemática directa se sabe que

$$T_0^1 T_1^2 T_2^3 T_3^4 T_4^5 T_5^6 T_6^7 = T_0^7 \quad (3.8)$$

La orientación del efector final de este robot está dada por la siguiente convención de ángulos de Euler

$$R(\theta, \phi, \psi) = R(x, \theta) R(y, \phi) R(z, \psi) = R_d$$

Se obtiene la inversa de ambos lados de la ecuación (3.8) para poder tener el referencial inercial en el efector final y poder tener los últimos tres ejes intersecados en un punto

$$T_7^6 T_6^5 T_5^4 T_4^3 T_3^2 T_2^1 T_1^0 = T_7^0 \quad (3.9)$$

En lo que sigue de este capítulo, se harán las siguientes distinciones

$$T_0^7 = \begin{bmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{n} & \mathbf{a} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_7^0 = (T_0^7)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}' & \mathbf{n}' & \mathbf{a}' & \mathbf{p}' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T'$$

Se supone  $\theta_5 = 0$  ya que se quiere restringir un grado de libertad para este desarrollo. Esto significa que la quinta articulación del manipulador no tendrá movimiento para la solución cerrada.

Despejando  $T_1^0$  del lado izquierdo de la ecuación (3.9)

$$T_7^6 T_6^5 T_5^4 T_4^3 T_3^2 T_2^1 = T_7^0 T_0^1 \quad (3.10)$$

Igualando los vectores  $\mathbf{p}'$  de ambos lados de la ecuación (3.10) se llega al siguiente sistema de ecuaciones no lineales

$$-\sin(\theta_7)[d_2 \sin(\theta_4 + \theta_6) + d_3 \sin(\theta_4 + \theta_6) + d_4 \cos(\theta_6) + d_5 \cos(\theta_6)] = p'_x + d_1 a'_x \quad (3.11)$$

$$-\cos(\theta_7)[d_2 \sin(\theta_4 + \theta_6) + d_3 \sin(\theta_4 + \theta_6) + d_4 \cos(\theta_6) + d_5 \cos(\theta_6)] = p'_y + d_1 a'_y \quad (3.12)$$

$$d_6 + d_7 - d_2 \cos(\theta_4 + \theta_6) - d_3 \cos(\theta_4 + \theta_6) + d_4 \sin(\theta_6) + d_5 \sin(\theta_6) = p'_z + d_1 a'_z \quad (3.13)$$

Se elevan al cuadrado y después se suman ambos lados de las tres ecuaciones anteriores

$$\begin{aligned} & (\sin(\theta_4 + \theta_6)(d_2 + d_3) + \cos(\theta_6)(d_4 + d_5))^2 + (\sin(\theta_6)(d_4 + d_5) - \cos(\theta_4 + \theta_6)(d_2 + d_3))^2 \\ & = (p'_x + d_1 a'_x)^2 + (p'_y + d_1 a'_y)^2 + (p'_z + d_1 a'_z - d_6 - d_7)^2 \end{aligned}$$

Desarrollando los cuadrados y simplificando

$$\begin{aligned}
d_2^2 + d_3^2 + 2d_2 + d_3 + d_4^2 + d_5^2 + 2d_4d_5 + 2(d_2 + d_3)(d_4 + d_5)(\sin(\theta_4 + \theta_6) \cos(\theta_6) - \cos(\theta_4 + \theta_6) \sin(\theta_6)) \\
= (p'_x + d_1a'_x)^2 + (p'_y + d_1a'_y)^2 + (p'_z + d_1a'_z - d_6 - d_7)^2
\end{aligned}$$

Simplificando

$$\begin{aligned}
& d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 + 2d_2d_3 + 2d_4d_5 + 2(d_2 + d_3)(d_4 + d_5) \sin(\theta_4) \\
= & (p'_x + d_1a'_x)^2 + (p'_y + d_1a'_y)^2 + (p'_z + d_1a'_z - d_6 - d_7)^2
\end{aligned}$$

Despejando  $\sin(\theta_4)$  de la ecuación anterior

$$\sin(\theta_4) = \frac{(p'_x + d_1a'_x)^2 + (p'_y + d_1a'_y)^2 + (p'_z + d_1a'_z - d_6 - d_7)^2 - d_2^2 - d_3^2 - d_4^2 - d_5^2 - 2d_2d_3 - 2d_4d_5}{2(d_2 + d_3)(d_4 + d_5)}$$

Se requiere encontrar una expresión con  $\arctan(\theta_4)$  ya que se quiere conservar el signo de los diferentes cuadrantes

$$\theta_4 = \arctan \left( \frac{\sin(\theta_4)}{\pm \sqrt{1 - \sin^2(\theta_4)}} \right)$$

Para encontrar  $\theta_7$  se divide (3.11) entre (3.12)

$$\theta_7 = \arctan \left( \frac{p'_x + a'_x d_1}{p'_y + a'_y d_1} \right)$$

Para obtener  $\theta_6$  se elevan al cuadrado y luego se obtiene la raíz cuadrada de las ecuaciones (3.11) y (3.12)

$$\sin(\theta_4 + \theta_6)(d_2 + d_3) + \cos(\theta_6)(d_4 + d_5) = \pm \sqrt{(p'_x + d_1a'_x)^2 + (p'_y + d_1a'_y)^2}$$

Desarrollando el lado izquierdo de la ecuación anterior

$$(\sin(\theta_4) \cos(\theta_6) + \cos(\theta_4) \sin(\theta_6))(d_2 + d_3) + \cos(\theta_6)(d_4 + d_5) = \pm \sqrt{(p'_x + d_1a'_x)^2 + (p'_y + d_1a'_y)^2}$$

Haciendo  $k_1 = \sin(\theta_4)$  y  $k_2 = \cos(\theta_4)$

$$\sin(\theta_6)(k_2d_2 + k_2d_3) + \cos(\theta_6)(k_1d_2 + k_1d_3 + d_4 + d_5) = \pm \sqrt{(p'_x + d_1a'_x)^2 + (p'_y + d_1a'_y)^2} \quad (3.14)$$

Retomando la ecuación (3.13) y haciendo la sustitución de  $k_1$  y  $k_2$

$$\sin(\theta_6)(k_1d_2 + k_1d_3 + d_4 + d_5) - \cos(\theta_6)(k_2d_2 + k_2d_3) = p'_z + d_1a'_z - d_6 - d_7 \quad (3.15)$$

A continuación se realizarán las siguientes sustituciones

$$k_1d_2 + k_1d_3 + d_4 + d_5 = r \sin(\psi) \quad (3.16)$$

$$k_2d_2 + k_2d_3 = r \cos(\psi) \quad (3.17)$$

De aquí se ve claramente que

$$\psi = \arctan\left(\frac{k_1d_2 + k_1d_3 + d_4 + d_5}{k_2d_2 + k_2d_3}\right)$$

Sustituyendo (3.16) y (3.17) en (3.14) y (3.15)

$$\begin{aligned} \sin(\theta_6)r \cos(\psi) + \cos(\theta_6)r \sin(\psi) &= \pm\sqrt{(p'_x + d_1a'_x)^2 + (p'_y + d_1a'_y)^2} \\ \sin(\theta_6)r \sin(\psi) - \cos(\theta_6)r \cos(\psi) &= p'_z + d_1a'_z - d_6 - d_7 \end{aligned}$$

Simplificando y despejando  $\theta_6$

$$\theta_6 = \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{(p'_x + d_1a'_x)^2 + (p'_y + d_1a'_y)^2}}{d_6 + d_7 - p'_z - d_1a'_z}\right) - \psi$$

Para obtener las primeras tres variables articulares se hace lo siguiente; se tiene la ecuación

$$T_0^1T_1^2T_2^3 = T_0^7T_7^6T_6^5T_5^4T_4^3 \quad (3.18)$$

Se iguala el término  $n_z$  de ambos lados de la ecuación (3.18)

$$\sin(\theta_2) = \cos(\theta_4 + \theta_6)(n_z \cos(\theta_7) + s_z \sin(\theta_7)) - a_z \sin(\theta_4 + \theta_6)$$

Al despejar  $\theta_2$  se tiene

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{\sin(\theta_2)}{\pm\sqrt{1 - \sin^2(\theta_2)}}\right)$$

Al dividir los términos  $a_z$  entre  $s_z$  en ambos lados de la ecuación (3.18) se obtiene  $\theta_3$

$$\theta_3 = \arctan\left(\frac{n_z \sin(\theta_7) - s_z \cos(\theta_7)}{a_z \cos(\theta_4 + \theta_6) + \sin(\theta_4 + \theta_6)(n_z \cos(\theta_7) + s_z \sin(\theta_7))}\right)$$

Por último al dividir los términos  $n_x$  entre  $n_y$  en ambos lados de la ecuación (3.18) se obtiene  $\theta_1$

$$\theta_1 = \arctan \left( \frac{a_x \sin(\theta_4 + \theta_6) - \cos(\theta_4 + \theta_6)(n_x \cos(\theta_7) + s_x \sin(\theta_7))}{\cos(\theta_4 + \theta_6)(n_y \cos(\theta_7) + s_y \sin(\theta_7)) - a_y \sin(\theta_4 + \theta_6)} \right)$$

### Cinemática Inversa Numérica

Primeramente, se obtiene el Jacobiano Geométrico del robot. Esto es

$$J = \begin{bmatrix} z_0 \times (o_7 - o_0) & z_1 \times (o_7 - o_1) & z_2 \times (o_7 - o_2) & z_3 \times (o_7 - o_3) & z_4 \times (o_7 - o_4) \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ & z_5 \times (o_7 - o_5) & z_6 \times (o_7 - o_6) & & \\ & z_5 & z_6 & & \end{bmatrix}$$

Por lo que los vectores  $z$  son (solo se mostrarán algunos, dado que las expresiones para los últimos son muy largas).

$$\begin{aligned} z_0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ z_1 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) \\ 0 \end{bmatrix} \\ z_2 &= \begin{bmatrix} -\sin(\theta_1) \cos(\theta_2) \\ \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) \end{bmatrix} \\ z_3 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) \cos(\theta_3) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(\theta_3) \\ \cos(\theta_3) \sin(\theta_1) + \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(\theta_3) \\ -\cos(\theta_2) \sin(\theta_3) \end{bmatrix} \\ z_4 &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_4)(\cos(\theta_1) \sin(\theta_3) + \cos(\theta_3) \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)) + \cos(\theta_2) \sin(\theta_1) \sin(\theta_4) \\ \cos(\theta_4)(\sin(\theta_1) \sin(\theta_3) - \cos(\theta_1) \cos(\theta_3) \sin(\theta_2)) - \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \sin(\theta_4) \\ \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) \cos(\theta_4) - \sin(\theta_2) \sin(\theta_4) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ahora se muestran los orígenes  $O$  (solo se mostrarán algunos, dado que las expresiones para los últimos son muy largas).

$$\begin{aligned}
o_0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
o_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 \end{bmatrix} \\
o_2 &= \begin{bmatrix} d_2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \\ -d_2 \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \\ d_1 + d_2 \cos(\theta_2) \end{bmatrix} \\
o_3 &= \begin{bmatrix} d_3 \cos(\theta_1) \sin(\theta_3) + d_2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) + d_3 \cos(\theta_3) \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \\ d_3 \sin(\theta_1) \sin(\theta_3) - d_2 \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) - d_3 \cos(\theta_1) \cos(\theta_3) \sin(\theta_2) \\ d_1 + d_2 \cos(\theta_2) + d_3 \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

En el presente trabajo no se mostrará la matriz Jacobiana debido a que es muy compleja. Esta se calculará numéricamente en cada iteración.

La *Matriz Jacobiana* relaciona las velocidades articulares con la velocidad lineal y angular del efector final, o bien, los diferenciales articulares con el diferencial de desplazamiento y de rotación del efector final.

**Definición** Diferencial de Desplazamiento: Vector en la dirección del desplazamiento instantáneo con magnitud diferencial [14].

**Definición** Diferencial de Rotación: Vector en la dirección del eje de rotación cuya magnitud es diferencial y se relaciona con el ángulo de rotación diferencial alrededor de dicho eje [14].

Se prosigue describiendo paso a paso el algoritmo desarrollado de Levenberg-Marquardt

1. Se da una pose inicial, es decir, se toman los valores de variables articulares obtenidos mediante la cinemática inversa analítica y se calcula con ellos la cinemática directa.
2. Se obtiene la orientación del efector final mediante Ángulos de Euler.
3. Se calcula el vector de error  $e_c$

$$e_c = \begin{bmatrix} x_d \\ y_d \\ z_d \\ \theta_d \\ \phi_d \\ \psi_d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \theta \\ \phi \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta \theta \\ \Delta \phi \\ \Delta \psi \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

4. Una vez obtenido el vector de error, se obtienen los vectores de incremento traslacional  $e_t \in \mathbb{R}^3$  y rotacional  $e_R \in \mathbb{R}^3$  agrupándolos en un vector  $e \in \mathbb{R}^6$ . Para hacer esto se aplica la siguiente transformación al error definido en la ecuación (3.19).

$$e = \begin{bmatrix} e_t \\ e_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & R_\Omega \end{bmatrix} e_c$$

La matriz  $R_\Omega$  representa la velocidad angular en función de la razón de cambio de los ángulos de Euler [14]. Para el presente robot la convención de ángulos de Euler utilizada es

$$R(x, \phi)R(y, \psi)R(z, \theta)$$

Por lo que para el presente manipulador se tiene

$$R_\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin(\psi) \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi)\cos(\psi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi)\cos(\psi) \end{bmatrix}$$

Para la deducción de esta matriz, revise la referencia [14].

5. Se calcula la Matriz Jacobiana con los valores de las variables articulares actuales
6. Se calcula el incremento a las variables articulares como

$$\Delta\theta = J^T (JJ^T + \lambda^2 I)^{-1} \mathbf{e}$$

*Nota: Se puede observar que si la constante de amortiguamiento es cero, el incremento  $\Delta\theta$  depende únicamente de la Pseudoinversa de Moore-Penrose  $J^\dagger = J^T (JJ^T)^{-1}$*

7. Se suma el incremento a las variables articulares

$$\theta = \theta + \Delta\theta$$

8. Se calcula la norma de  $\Delta\theta$ . Si  $\|\Delta\theta\| < \varepsilon$ , el algoritmo se detiene.

En el presente trabajo se usó un  $\varepsilon = 0,000000000000007$  y  $\lambda = 0,001$ , logrando tener convergencia con un máximo de tres iteraciones.

### 3.1.3. Simulador Cinemático

Se realizó un simulador cinemático con el fin de validar los algoritmos desarrollados. Para esto se programaron los algoritmos de cinemática en MATLAB; por otro lado, se realizó un modelo virtual en el lenguaje VRML; posteriormente se unieron ambos, de tal modo que el modelo virtual se mueva de acuerdo con la cinemática del manipulador. VRML (Virtual Reality Modelling Language) es un programa de modelado de realidad virtual que permite la creación de mundos virtuales en la web. Se eligió usar este debido a su conexión con MATLAB y su forma de armar los mecanismos.

#### Phantom OMNI

Se ensambló al robot de acuerdo con la cinemática directa planteada. A continuación se muestra en su posición de *home*.

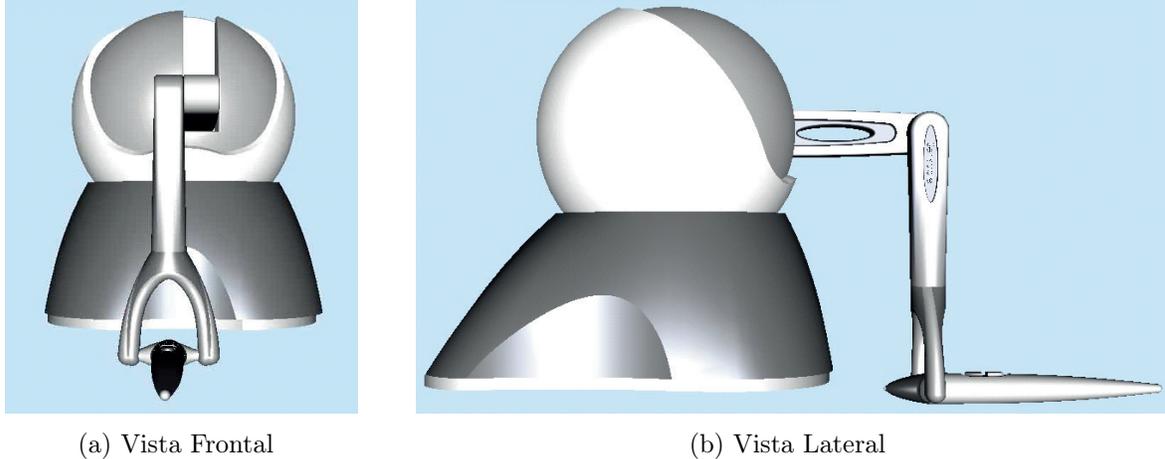


Figura 3.4: Posición Home Robot Maestro

Para mostrar el funcionamiento del simulador, se elige un punto que se quiere alcanzar mediante cinemática inversa. En este caso se define al punto  $p$  como

$$p = \begin{bmatrix} -120 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Recuérdese que el punto  $p$  esta referido con respecto al referencial inercial y las unidades de este son  $mm$ . Se desea que el efector final tenga una orientación definida mediante la convención de ángulos de Euler antes explicada

$$\theta = 0$$

$$\phi = 0$$

$$\psi = 0$$

A continuación se muestra el resultado obtenido

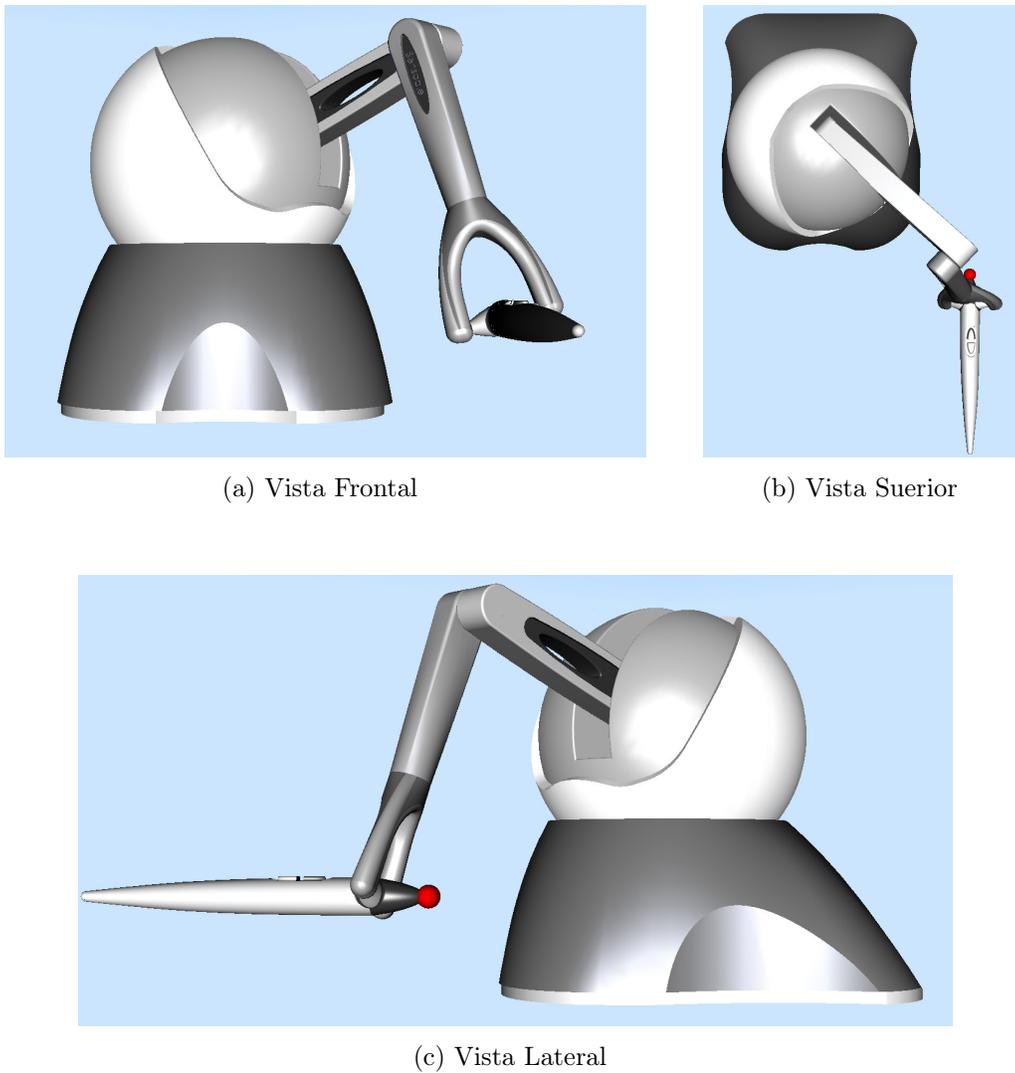


Figura 3.5: Simulador Robot Maestro

A continuación se muestran los resultados obtenidos en Matlab

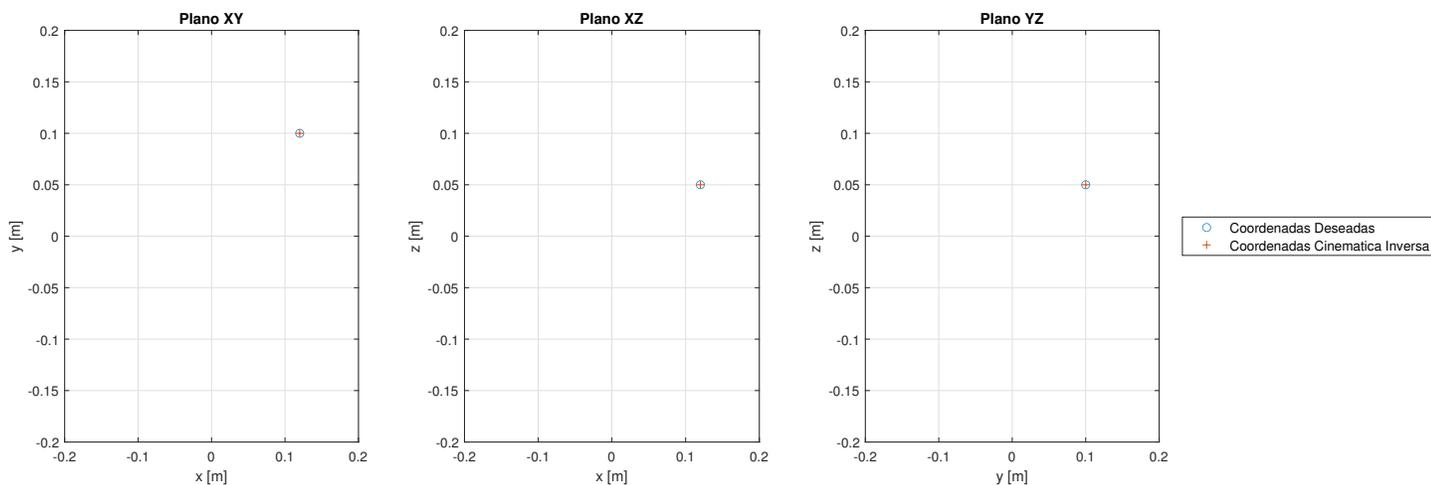


Figura 3.6: Coordenada Deseada y Coordenada Alcanzada Robot Maestro

con las matrices de transformación deseada

$$T_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0,12 \\ 0 & 1 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0 & 1 & 0,05 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y la obtenida con la solución de la cinemática inversa

$$T_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0,12 \\ 0 & 1 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0 & 1 & 0,05 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se puede observar que ambas matrices son iguales, por lo que corroboramos que el algoritmo de cinemática inversa y el simulador funcionan de manera correcta.

### Robai Cyton Gamma 1500

En la Figura 3.7 se muestra al manipulador en su posición de *home*.

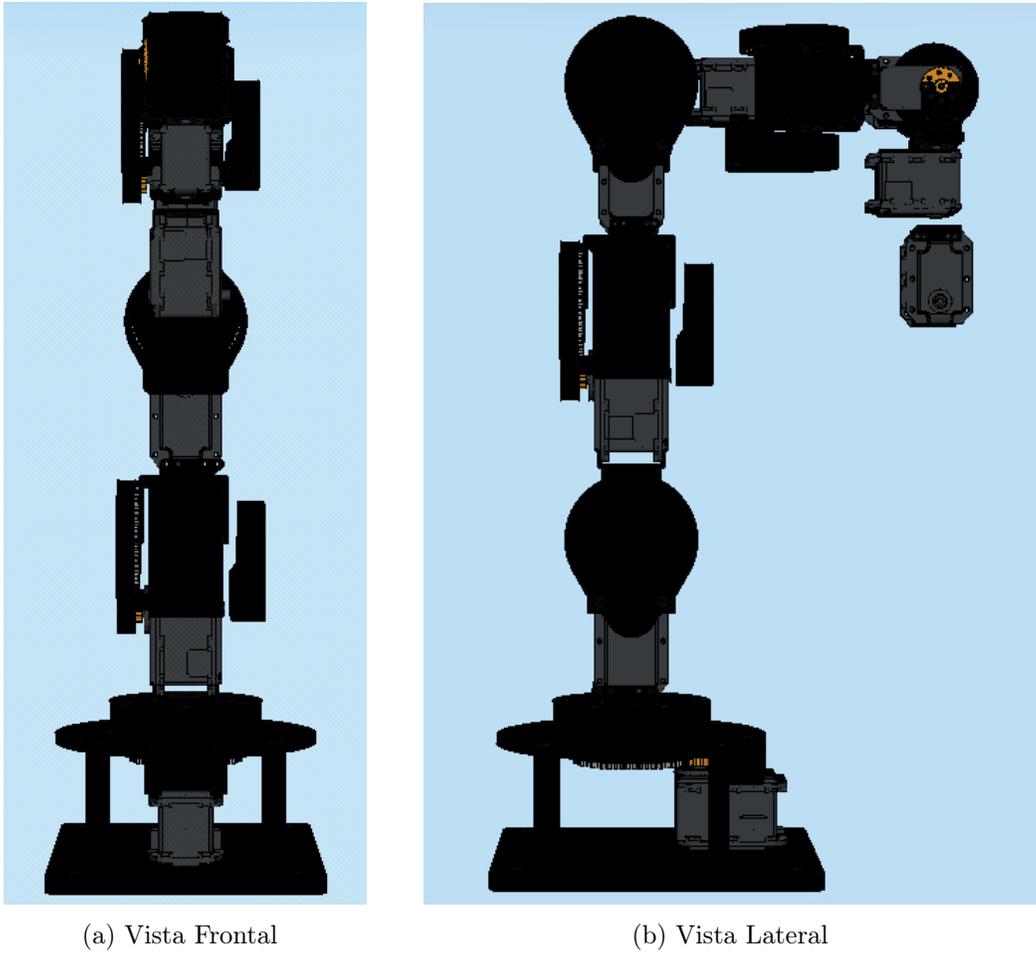


Figura 3.7: Posición Home Robot Esclavo

Se realizó el mismo experimento que con el manipulador anterior, es decir, se desea llegar al punto

$$p = \begin{bmatrix} -120 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix}$$

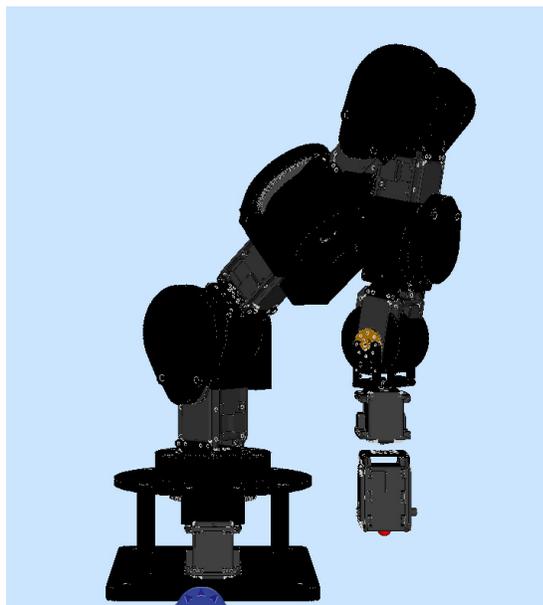
con Ángulos de Euler

$$\theta = 0$$

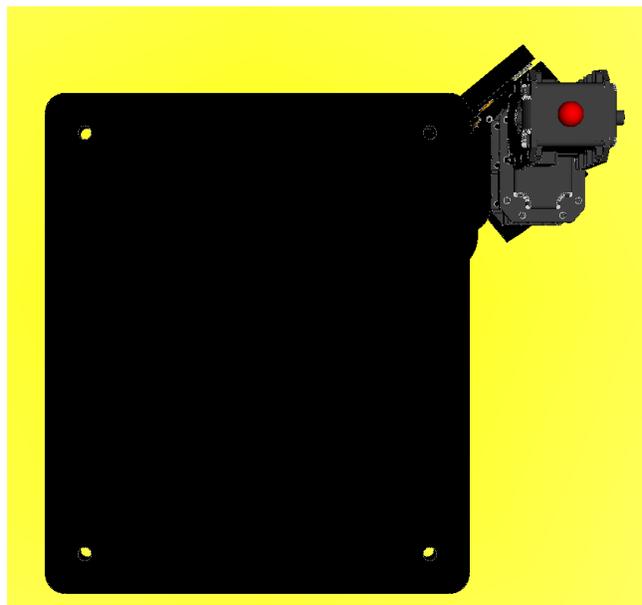
$$\phi = 0$$

$$\psi = 0$$

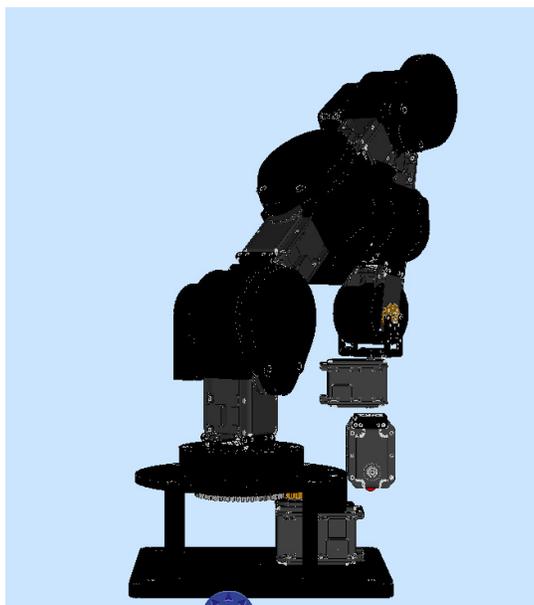
En la Figura 3.8 se muestra como el simulador alcanza la posición deseada.



(a) Vista Frontal



(b) Vista Inferior



(c) Vista Lateral

Figura 3.8: Simulador Robot Esclavo

A continuación se muestran los resultados obtenidos en Matlab con las matrices de transformación deseada

La Matriz (3.20) muestra la posición y orientación codificada de la coordenada deseada

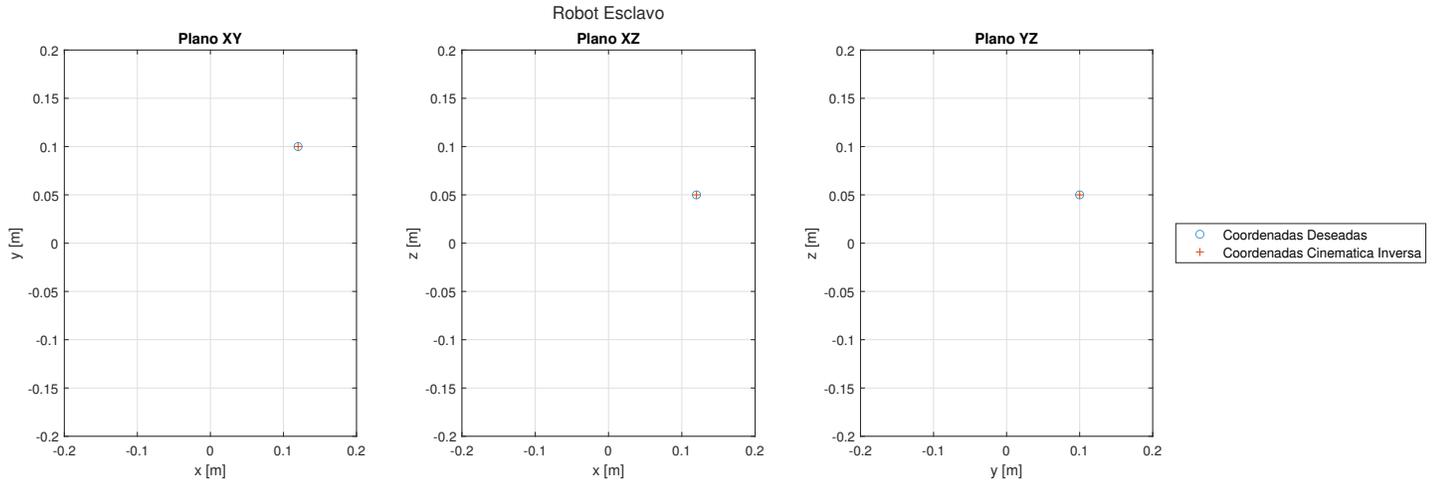


Figura 3.9: Coordenada Deseada y Coordenada Alcanzada Robot Esclavo

$$T_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0,12 \\ 0 & 1 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0 & 1 & 0,05 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

y la Matriz (3.21) es la posición y orientación codificada que se obtuvo con la solución de la cinemática inversa

$$T_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0,12 \\ 0 & 1 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0 & 1 & 0,05 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

por lo que, al igual que en el caso del robot maestro, se puede corroborar que se llega al punto deseado, por lo que se puede concluir que el algoritmo de cinemática inversa obtiene la solución correcta y, de igual manera, el simulador funciona correctamente.

### 3.1.4. Resultados de Simulaciones

Para corroborar los algoritmos de cinemática se dio una trayectoria a seguir para ambos robots. A continuación se plantea el problema.

## Generación de Trayectorias

Para el siguiente experimento se hizo una trayectoria basada en un spline de quinto orden, de tal forma que los robots maestro y esclavo la sigan. Se eligió de quinto orden para asegurar que tanto la velocidad como la aceleración sean continuas. A continuación se explica el procedimiento.

1. Se define el polinomio

$$p(t) = a + bt + ct^2 + et^3 + ft^4 + gt^5$$

2. A continuación se deriva con respecto a  $t$  para corroborar la continuidad del polinomio

$$\frac{d(p(t))}{dt} = b + 2ct + 3et^2 + 4ft^3 + 5gt^4$$

$$\frac{d(p'(t))}{dt} = 2c + 6et + 12ft^2 + 20gt^3$$

3. A continuación se encuentran las condiciones de frontera de la ecuación, para ello

$$\begin{aligned} p(0) &= a \\ p(T_i) &= a + bT_i + cT_i^2 + eT_i^3 + fT_i^4 + gT_i^5 \\ p'(0) &= b \\ p'(T_i) &= b + 2cT_i + 3eT_i^2 + 4fT_i^3 + 5gT_i^4 \\ p''(0) &= 2c \\ p''(T_i) &= 2c + 6eT_i + 12fT_i^2 + 20gT_i^3 \end{aligned}$$

4. A continuación se sustituyen  $x_0$ ,  $v_0$  y  $a_0$  en  $p(T_i)$ ,  $p'(T_i)$  y  $p''(T_i)$ .
5. Ahora se resuelven las ecuaciones de tal modo que  $e$ ,  $f$  y  $g$  queden en términos de  $x_0$ ,  $v_0$  y  $a_0$ .
6. Por último, se sustituyen los coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $e$ ,  $f$  y  $g$  en la ecuación original.

Si se eligen

$$x_0 = -60$$

$$x_f = 60$$

$$v_0 = 0$$

$$v_f = 0$$

$$a_0 = 0$$

$$a_f = 0$$

con los Ángulos de Euler para la trayectoria

$$\theta = 0$$

$$\phi = 0$$

$$\psi = 0$$

se obtiene la trayectoria de referencia mostrada en la Figura 3.10

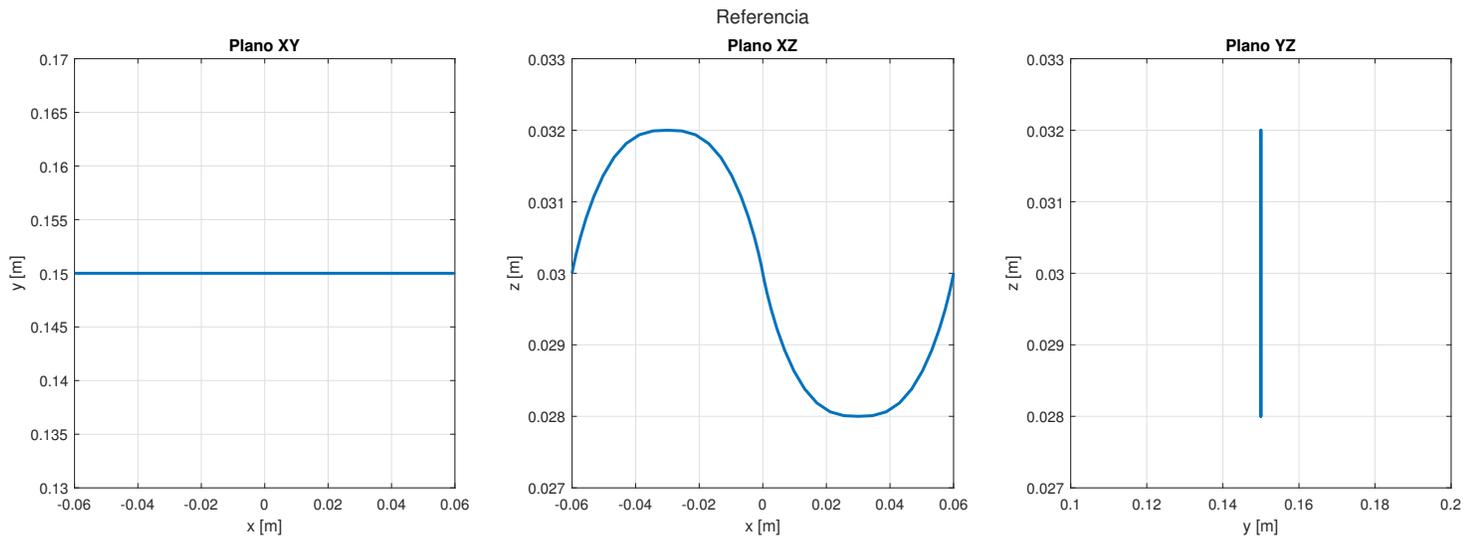


Figura 3.10: Trayectoria de Referencia

## Phantom OMNI

En la Figura 3.11 se presenta la comparativa entre la trayectoria deseada y la trayectoria obtenida por medio de la cinemática inversa para el robot maestro

En la Figura 3.12 se muestran los Ángulos de Euler obtenidos del cálculo de la Cinemática Inversa del Robot Maestro.

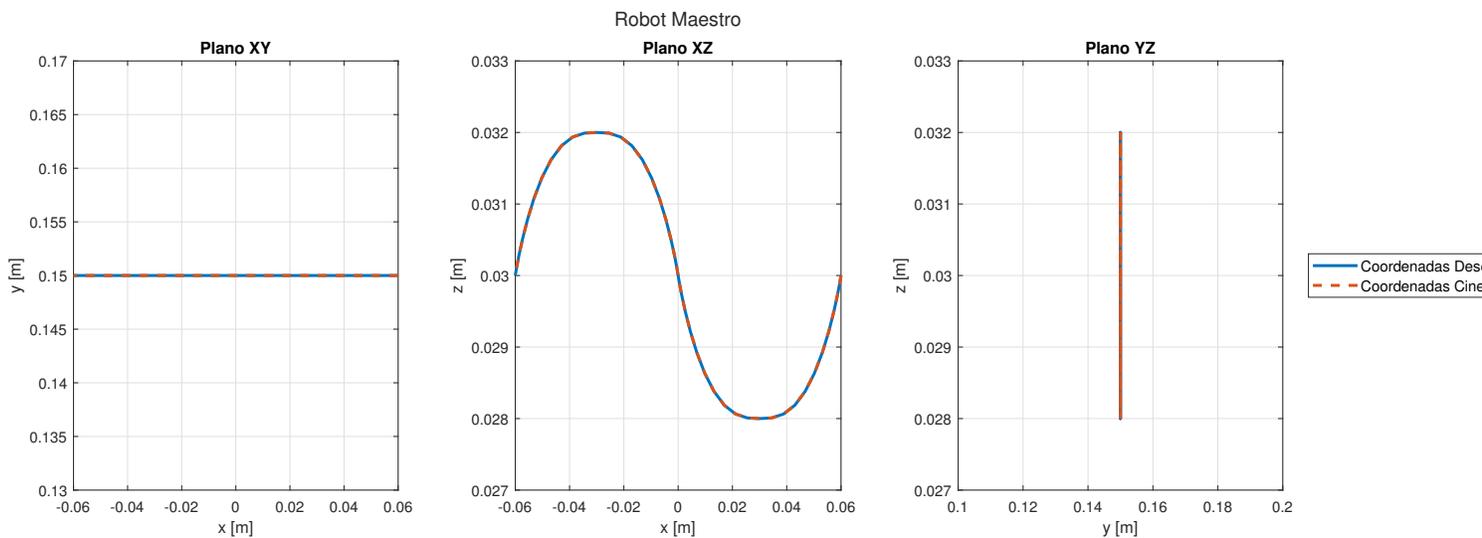


Figura 3.11: Trayectoria Seguida por el Robot Maestro

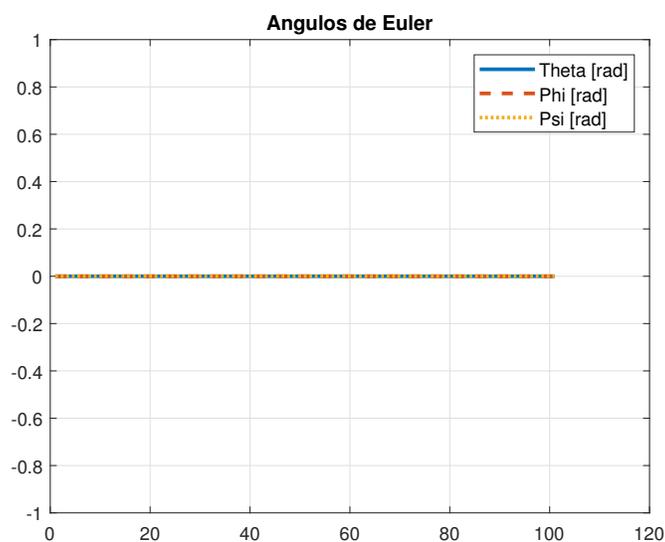


Figura 3.12: Ángulos de Euler Robot Maestro

### Robai Cyton Gamma 1500

En la Figura 3.13 se muestra la comparativa entre la trayectoria deseada y la trayectoria obtenida por medio de la cinemática inversa para el robot esclavo

En la Figura 3.14 se muestran los Ángulos de Euler obtenidos del cálculo de la Cinemática Inversa del Robot Esclavo.

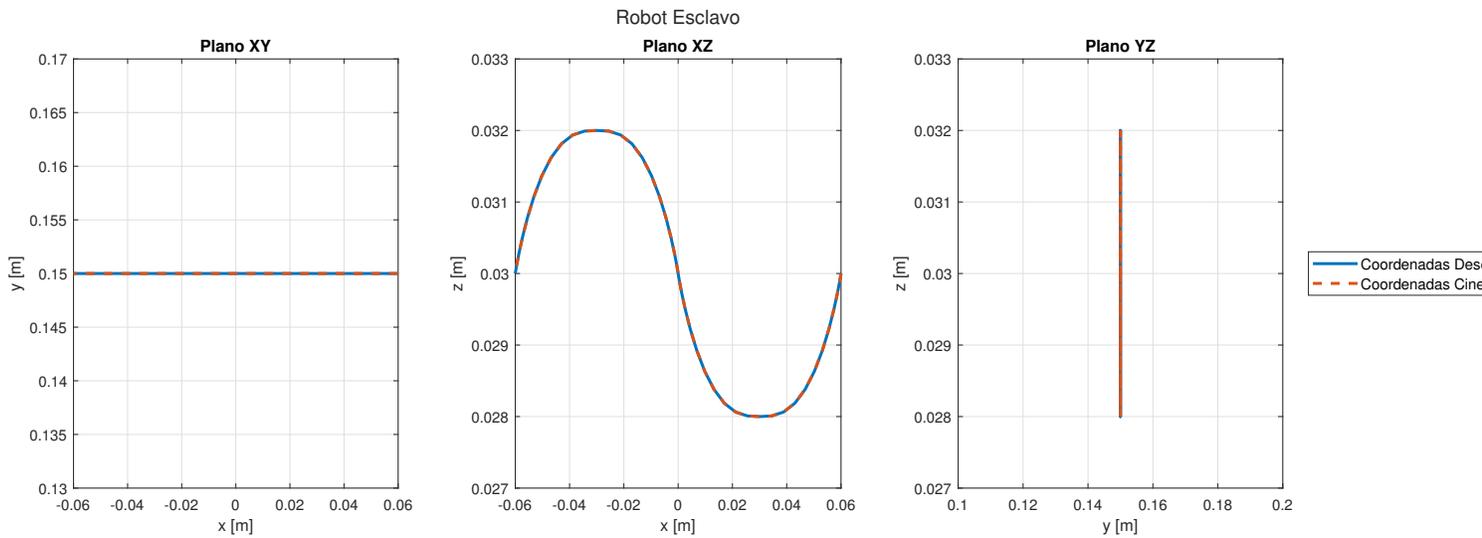


Figura 3.13: Trayectoria Seguida por el Robot Esclavo

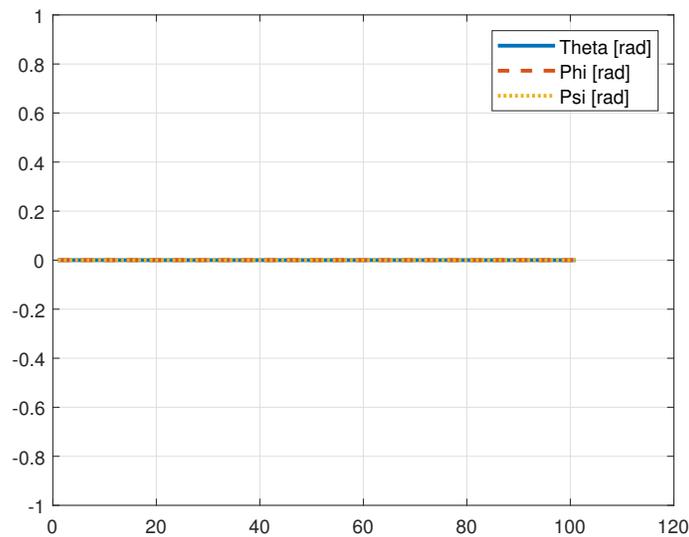


Figura 3.14: Ángulos de Euler Robot Esclavo

## Conclusiones

Se puede observar que la trayectoria del Spline seguida por el algoritmo de cinemática inversa del Robot Maestro sigue perfectamente la trayectoria comandada, con la orientación deseada, por lo que se puede concluir que el algoritmo de cinemática inversa obtiene una solución correcta. De igual manera el Algoritmo Híbrido de cinemática inversa del Robot Esclavo sigue la trayectoria deseada de manera precisa con la orientación deseada, por lo que así como en el caso anterior, se puede concluir la correcta solución del algoritmo de cinemática inversa del robot esclavo.

## 3.2. Dinámica de Cuerpo Rígido

Dinámica es el estudio de la relación entre las fuerzas actuando sobre un cuerpo, la masa del cuerpo y el movimiento de este. La dinámica se usa para predecir el movimiento causado por fuerzas o para determinar las fuerzas requeridas para producir un movimiento dado.

El análisis dinámico puede tratarse en dos sentidos

**Definición** Problema Dinámico Directo: Dadas fuerzas y torques en el sistema, se requiere saber el movimiento producido por estas.

**Definición** Problema Dinámico Inverso: Dado un perfil de velocidad y aceleración sobre una trayectoria, conocer las fuerzas y los torques necesarios para producirla.

En el presente trabajo se explica la formulación mediante las *Ecuaciones de Euler-Lagrange*. Esto se puede encontrar en el Apéndice B.

## 3.3. Dinámica PHANTOM Omni

Para asegurar que el modelo dinámico presentado tenga los valores inerciales adecuados, se realizó una simulación usando SimMechanics proyectando los Elipsoides Inerciales de cada Eslabón. En la Figura 3.15 se muestran los Elipsoides Inerciales del Robot Maestro en la Posición Home.

Se puede notar que la representación del Robot Maestro con los Elipsoides Inerciales se asemeja al Robot Físico, por lo que se puede asegurar que los parámetros obtenidos del Robot Maestro para las simulaciones dinámicas son muy asemejados a la realidad.

### 3.3.1. Espacio Articular

Se realizó el modelo dinámico en Simulink aplicando la metodología descrita en el Apéndice B junto con la metodología para la factorización de la Matriz de Masa y el Vector de Aceleraciones de Coriolis. A continuación se mostrarán los resultados obtenidos.

El Modelo Dinámico Inverso recibe como entrada las variables articulares, y calcula los torques ejercidos por cada articulación. Posteriormente, los torques obtenidos se introducen al Modelo Dinámico Directo para calcular las variables articulares. Cabe destacar que en esta simulación **no se tiene una Entrada de Control presente**. En la Figura 3.16 se muestran los resultados obtenidos.

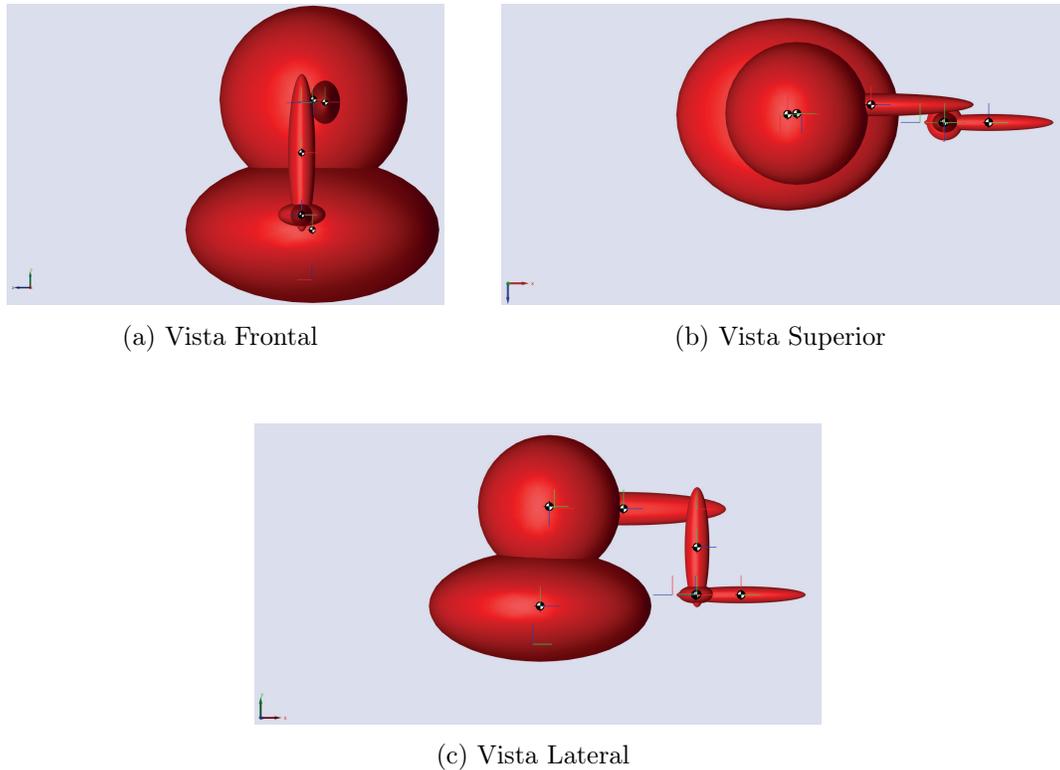


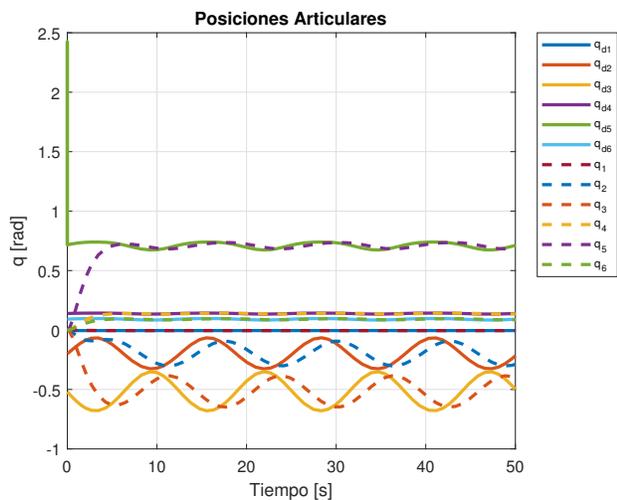
Figura 3.15: Elipsoides de Inercia Robot Maestro

Se puede observar que las salidas  $q$  del modelo siempre tratan de seguir a las referencias  $q_{ref}$  a pesar de que estas son dinámicas en el tiempo; existe un cierto retraso entre la posición articular deseada y la posición articular real, así como también se puede notar que las posiciones articulares reales no llegan a la amplitud de las posiciones articulares deseadas. Se puede observar también que las velocidades y aceleraciones articulares son acotadas, esto de acuerdo con la entrada que se le da al modelo. Por otro lado, los torques en las articulaciones son también acotados y van de acuerdo al movimiento que está efectuando el manipulador.

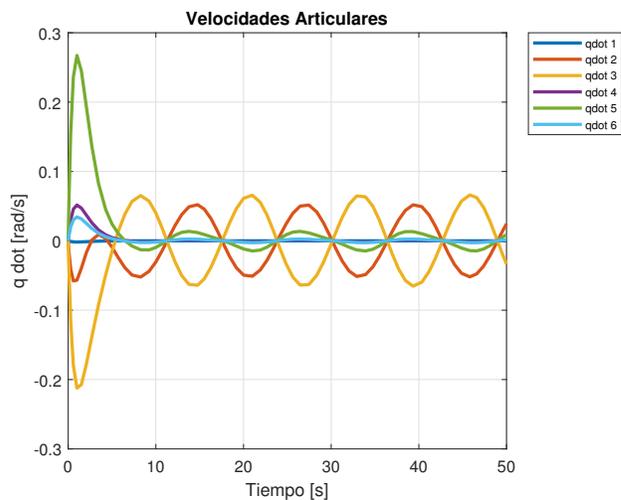
### 3.3.2. Espacio de Trabajo

Se obtuvo el Modelo Dinámico en el Espacio de Trabajo de acuerdo con lo desarrollado en el Apéndice B. Recapitulando de manera rápida, se explica la obtención del Modelo Dinámico en el Espacio de Tarea para robots no redundantes y también para robots redundantes a partir del *Jacobiano Analítico*.

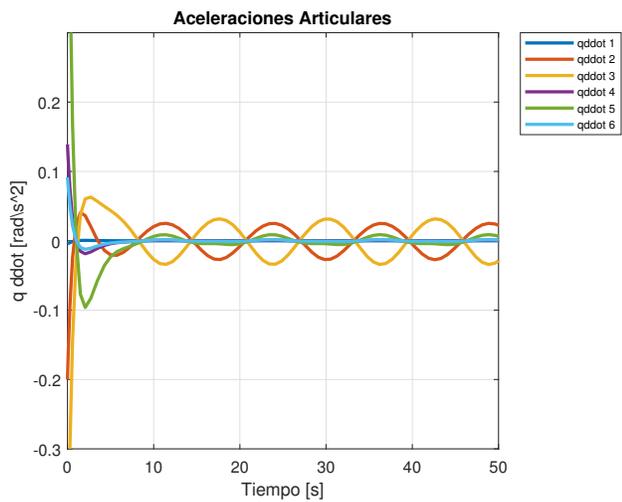
Cabe destacar que para este experimento **no se aplicó ninguna Ley de Control**. En la Figura 3.17 se muestran los resultados obtenidos con el Modelo Dinámico en el Espacio de Trabajo.



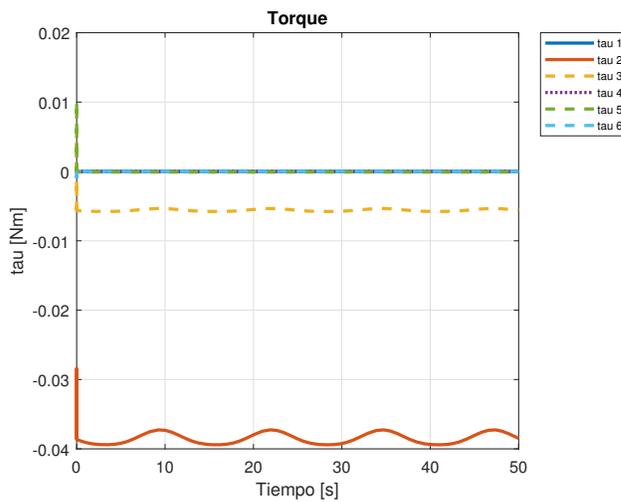
(a) Referencia y Salida Espacio Articular



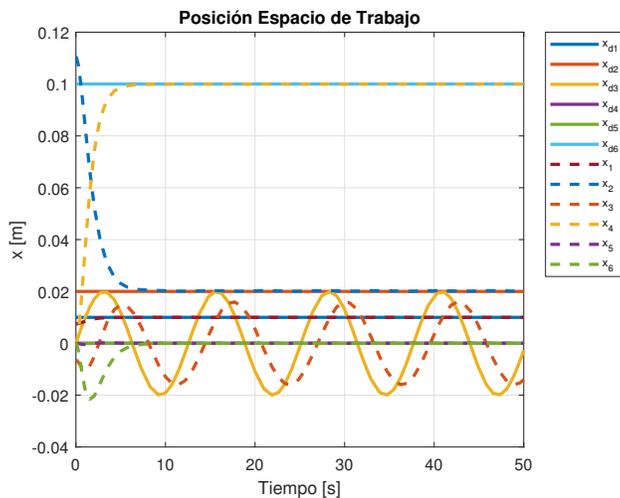
(b) Velocidades Articulares



(c) Aceleraciones Articulares

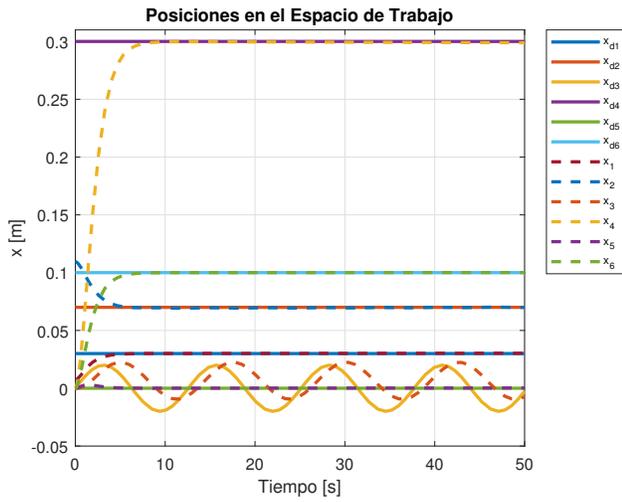


(d) Torque

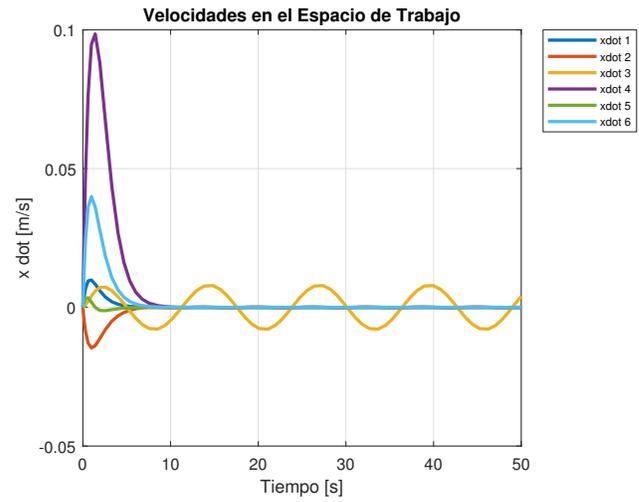


(e) Posición en el Espacio de Trabajo

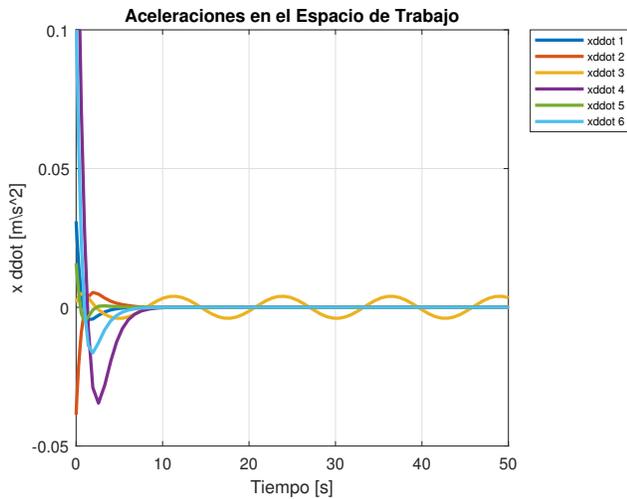
Figura 3.16: Dinámica Robot Maestro Espacio Articular



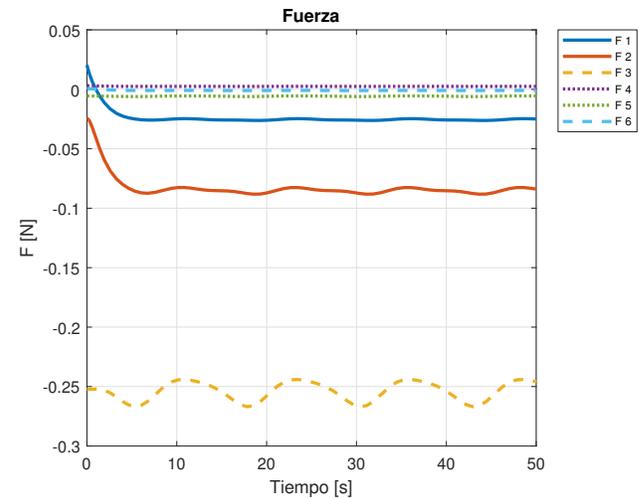
(a) Referencia y Salida Espacio de Trabajo



(b) Velocidades Espacio de Trabajo



(c) Aceleraciones Espacio de Trabajo



(d) Fuerza

Figura 3.17: Dinámica Robot Maestro Espacio de Tarea

Se puede ver que al igual que en el caso del Modelo en el Espacio Articular, el modelo en el espacio de trabajo alcanza la trayectoria deseada en un determinado tiempo. También se puede observar que se tiene un cierto retraso entre las posiciones deseadas y las posiciones reales. Así como en el caso de la Dinámica en el Espacio Articular, se puede observar que las posiciones reales no alcanzan a las posiciones deseadas. Esto es debido a que, sin un control, la inercia propia de los eslabones hace que la respuesta de este sea más lenta que trayectoria deseada.

### 3.4. Dinámica Robai Cyton Gamma 1500

Así como en el caso del Robot Maestro, para el Robot Esclavo se obtuvo su representación en Elipsoides de Inercia, en el Apéndice B se desarrolla este concepto para una mejor comprensión. En la Figura 3.18 se muestra el resultado obtenido

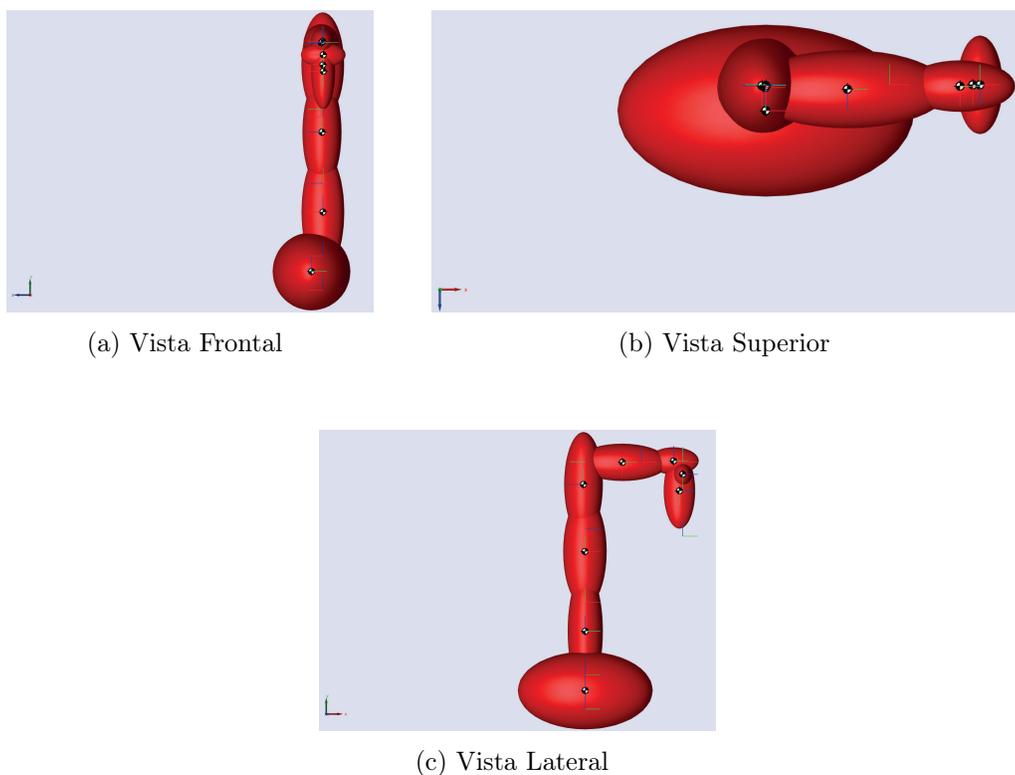


Figura 3.18: Elipsoides de Inercia Robot Esclavo

Al igual que en el caso del Robot Maestro, se puede ver que en el caso del Robot Esclavo, su representación en Elipsoides de Inercia tiene semejanza con el Robot Físico, por lo que se puede deducir que los parámetros físicos usados para el modelo dinámico se asemejan con los parámetros reales del Robot.

### 3.4.1. Espacio Articular

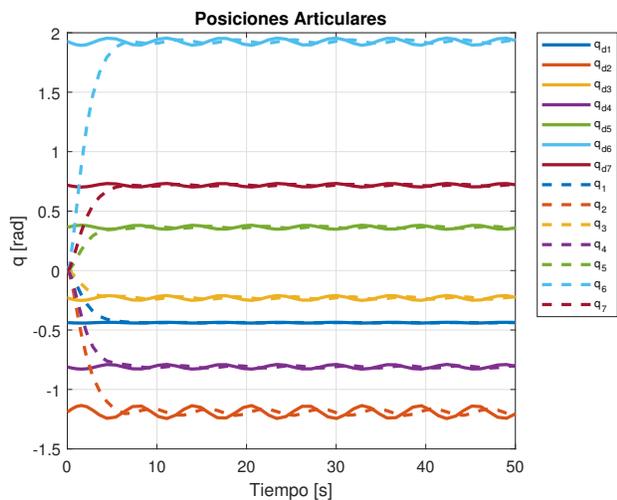
Se realizó el Modelo Dinámico en Simulink y se obtuvieron las gráficas mostradas en la Figura 3.19. Así como en el caso anterior, para esta simulación **no se tiene una Ley de Control**.

Se puede observar que las salidas  $q$  del modelo tratan de seguir a las referencias  $q_{ref}$  a pesar de que estas son dinámicas en el tiempo. Las velocidades y aceleraciones articulares son acotadas, esto de acuerdo con la entrada que se le da al modelo. Por otro lado, los torques en las articulaciones son también acotados y van de acuerdo al movimiento que está efectuando el manipulador. Al igual que en el experimento con el Robot Maestro, se puede ver que hay un cierto retraso entre las posiciones articulares deseadas y las posiciones articulares reales.

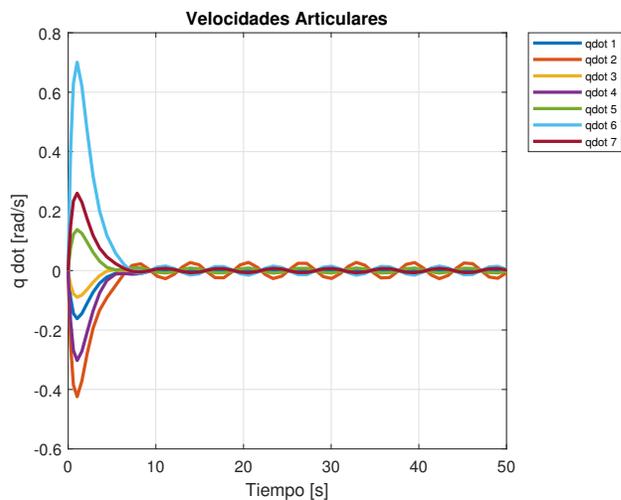
### 3.4.2. Espacio de Trabajo

Para este experimento cabe destacar que **no se aplica una Ley de Control**. En la Figura 3.20 se muestran las gráficas obtenidas con el modelo Dinámico en el Espacio de Tarea.

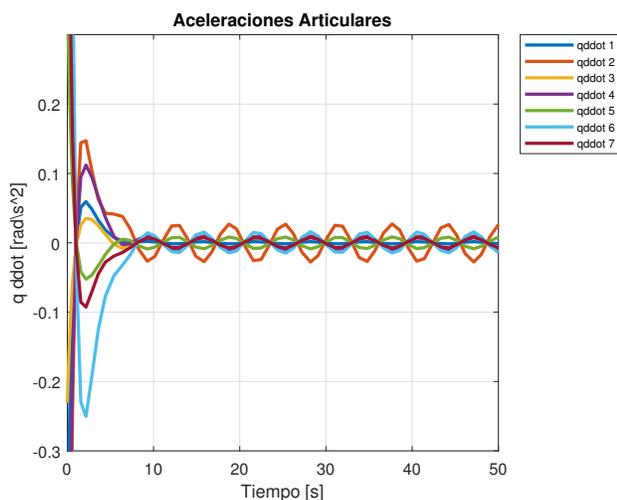
Se puede observar que el modelo en el espacio de trabajo al igual que como pasaba con el modelo en el espacio articular, sigue la trayectoria deseada en lazo abierto, sin embargo, a diferencia del modelo en el espacio articular, se puede ver que desde el segundo 30 empieza a hacerse más notorio el error entre la posición deseada y la posición alcanzada. También se puede observar que hay un retraso entre la posición deseada y la posición real.



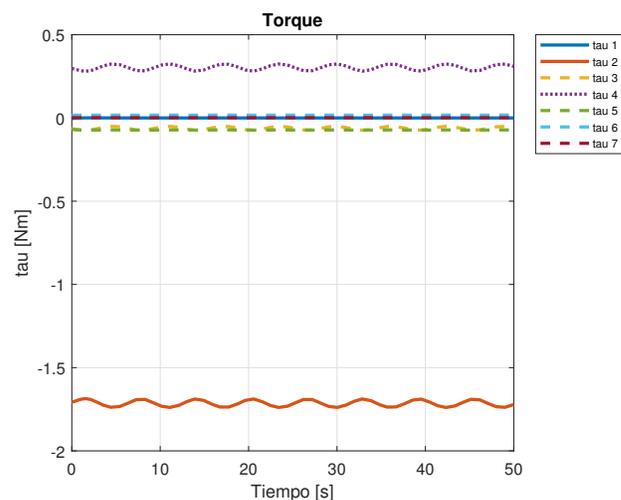
(a) Referencia y Salida Espacio Articular



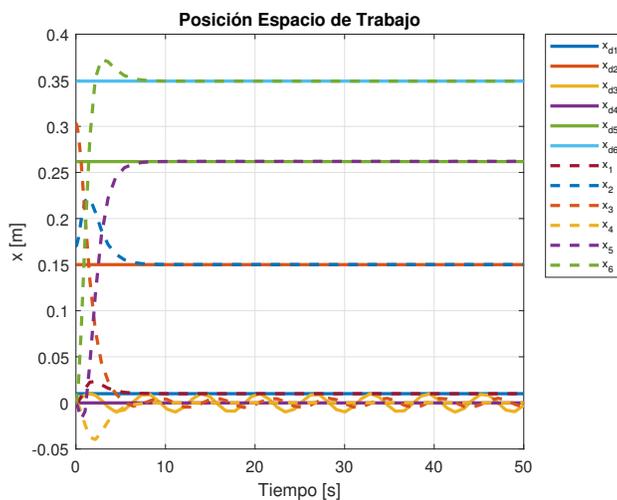
(b) Velocidades Articulares



(c) Aceleraciones Articulares

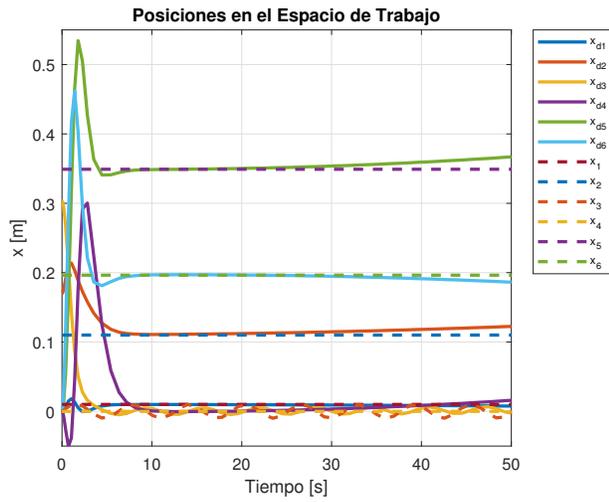


(d) Torque

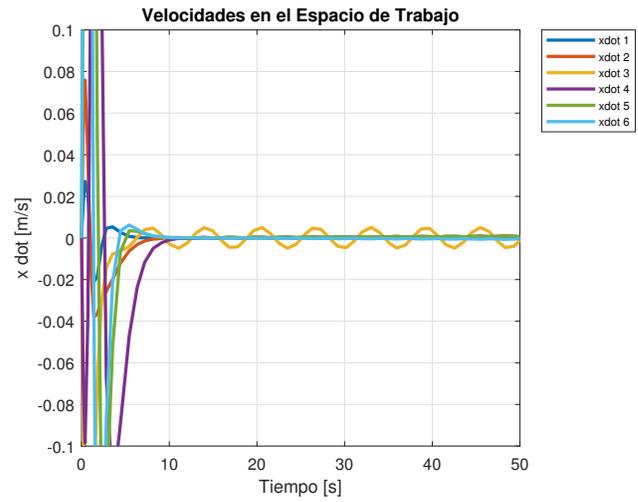


(e) Posición en el Espacio de Trabajo

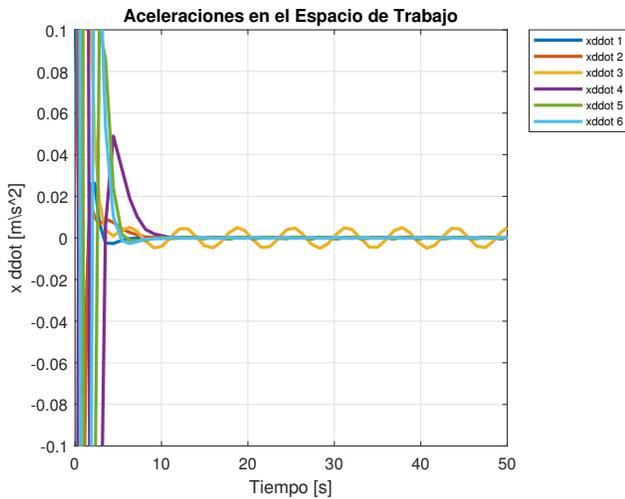
Figura 3.19: Dinámica Robot Esclavo Espacio Articular



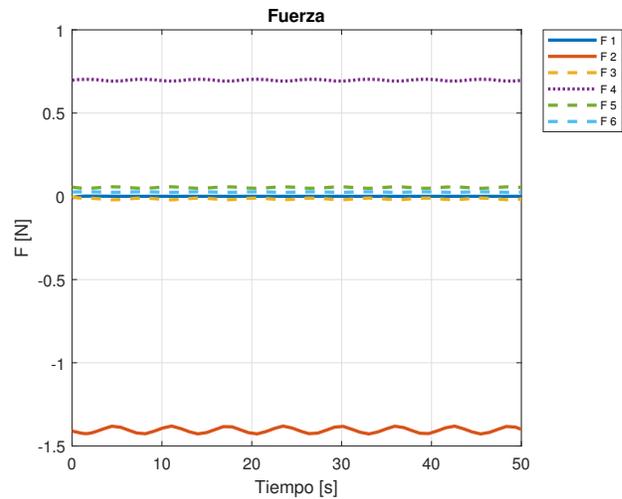
(a) Referencia y Salida Espacio de Trabajo



(b) Velocidades Espacio de Trabajo



(c) Aceleraciones Espacio de Trabajo



(d) Fuerza

Figura 3.20: Dinámica Robot Esclavo Espacio de Tarea

## Capítulo 4

# Control PD con Compensación para Teleoperación

El problema de control para manipuladores robóticos consiste en determinar la historia de tiempo de las variables articulares para causar que el efector final ejecute un movimiento comandado. Las variables articulares pueden ser fuerzas y torques articulares o pueden ser entradas de los actuadores, como por ejemplo, entradas de voltaje a los motores, etc.

Existen muchas técnicas y metodologías de control que pueden ser aplicadas al control de manipuladores. El método de control particular elegido, así como la manera en la cual es implementado puede tener un impacto significativo en el desempeño del manipulador y consecuentemente en el rango de sus posibles aplicaciones.

### 4.1. Control PD con compensación de Gravedad

En muchos ejemplos de sistemas de control, el controlador es típicamente un simple amplificador con una ganancia constante  $K$ . A este tipo de acción de control se le conoce formalmente como *Control Proporcional* ya que la señal de control a la salida del controlador se relaciona con la entrada del controlador por una constante proporcional.

Intuitivamente uno podría ser capaz de usar la derivada o la integral de la señal de entrada, adicionalmente a la operación proporcional de control. Uno de los controladores mas conocidos usados en la práctica es el controlador PID, donde las letras significan Proporcional, Integral y Derivativa. En consecuencia, se puede considerar un controlador en tiempo continuo más general como aquel que contiene componentes tales como sumadores (suma y resta), amplificadores, atenuadores, diferenciadores e integradores. Las componentes integral y derivativa del controlador

PID tienen una implicación individual en el desempeño.

Considérese el controlador PD. Para ilustrar mejor el efecto de este, se analizará el caso escalar. A continuación se muestra el diagrama de bloques de un sistema de control realimentado que arbitrariamente tiene una *función de transferencia* de segundo orden

$$G_p(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

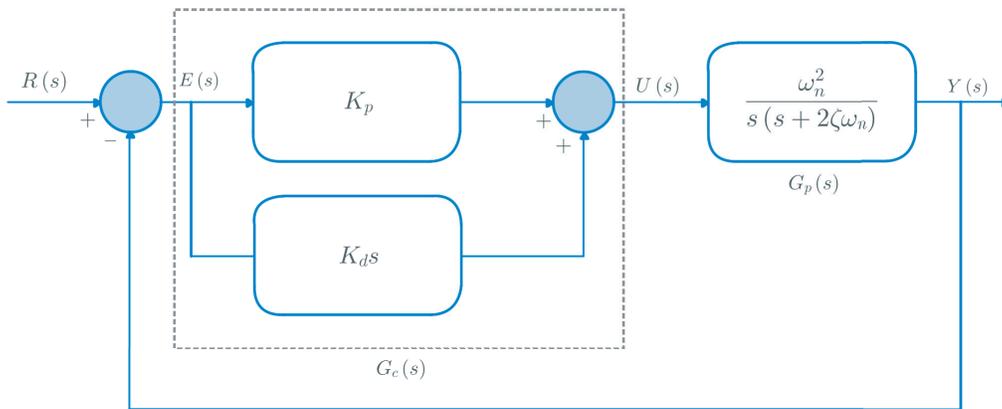


Figura 4.1: Sistema de Control con Controlador PD

Sean

$$K_p \in \mathbb{R}$$

$$K_d \in \mathbb{R}$$

$$U(s) \in \mathbb{R}$$

$$Y(s) \in \mathbb{R}$$

$$R(s) \in \mathbb{R}$$

donde  $K_p$  y  $K_d$  son las constantes proporcional y derivativa respectivamente. El controlador en Serie es un controlador PD con Función de Transferencia

$$G_c = K_p + K_d s \quad (4.1)$$

Entonces, la señal de control aplicada al proceso es

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{d}{dt} e(t) \quad (4.2)$$

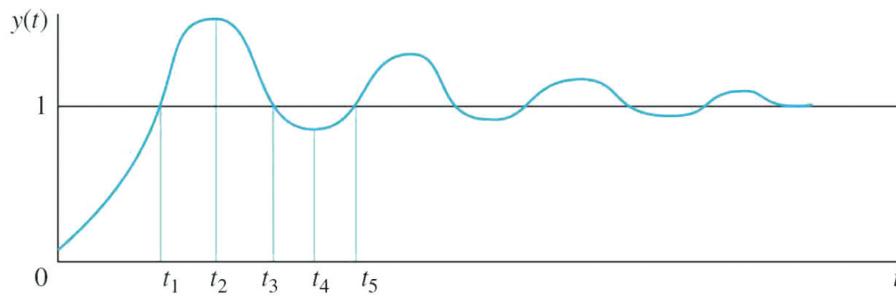
La Función de Transferencia del sistema compensado es

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = G_c(s)G_p(s) = \frac{\omega_n^2 (K_p + K_d s)}{s(s + 2\zeta\omega_n)} \quad (4.3)$$

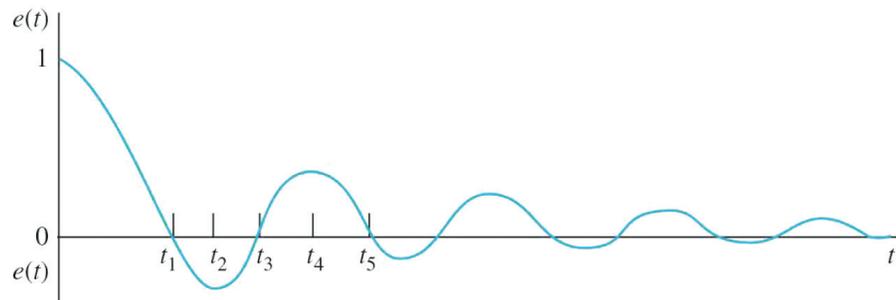
la cual muestra que el control PD es equivalente a añadir un cero en  $s = -\frac{K_p}{K_d}$

#### 4.1.1. Controlador PD en el Dominio del Tiempo

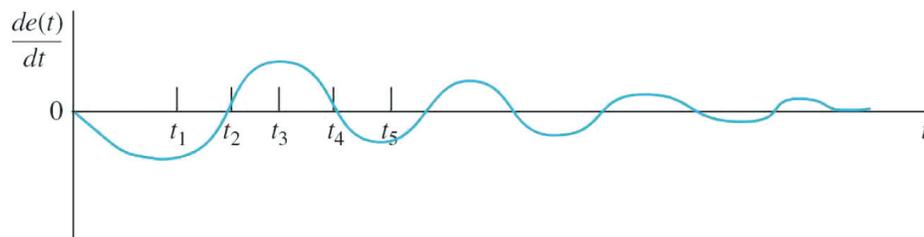
El efecto del controlador PD en la respuesta transitoria de un sistema de control puede ser investigado al referirnos a las respuestas temporales mostradas a continuación



(a) Respuesta Escalón Unitario



(b) Señal de Error



(c) Tasa de Cambio de Tiempo de la Señal de Error

Figura 4.2: Respuesta Controlador PD en el Dominio del Tiempo

Asumamos que la repuesta al escalón unitario de un sistema estable con solamente un control proporcional es el mostrado en la Figura 4.2, el cual tiene un sobretiro máximo relativamente alto y es oscilatorio. La correspondiente señal de error que es la diferencia entre la entrada escalón unitario y la salida  $Y(t)$  y su derivada temporal  $\frac{d}{dt}e(t)$  se muestran en las figuras respectivamente.

El sobretiro y oscilación características también se reflejan en  $e(t)$  y  $\frac{d}{dt}e(t)$ . El desempeño del sistema con el control proporcional se analiza de la siguiente manera:

1. En el intervalo  $0 < t < t_1$  la señal de error  $e(t)$  es positiva. El gran sobretiro y las oscilaciones subsiguientes en la salida  $Y(t)$  se deben a la gran cantidad de energía suministrada al sistema y la falta de amortiguamiento en este.
2. En el intervalo  $t_1 < t < t_3$  la señal de error  $e(t)$  es negativa. Esta tendencia desacelera la salida y eventualmente causa que la salida  $Y(t)$  se revierta y haya un sobretiro.
3. En el intervalo  $t_3 < t < t_5$  la señal de error  $e(t)$  es negativa. Se tiende a reducir el sobretiro en la respuesta causado por la respuesta negativa en el intervalo de tiempo previo. Dado que el sistema se asume estable, la amplitud del error se reduce con cada oscilación, y la salida eventualmente converge a un valor final.

Considerando el análisis previo de la respuesta en el tiempo del sistema, podemos decir que los factores que contribuyen al sobretiro son

1. La corrección positiva en el intervalo  $0 < t < t_1$  es muy grande.
2. La respuesta retardada en el intervalo de tiempo  $t_1 < t < t_2$  es inadecuada.

Para reducir el sobretiro en la respuesta escalón, sin un incremento significativo en el tiempo, un enfoque lógico sería

1. Decrementar la cantidad de energía positiva en el intervalo  $0 < t < t_1$
2. Incrementar la respuesta retardada en el intervalo  $t_1 < t < t_2$

El Controlador PD descrito en la ecuación 4.1 da el efecto de compensación requerido. Dado que la señal de control del controlador PD está dada por la ecuación (4.2), la Figura 4.2 muestra los siguientes efectos

1. En el intervalo  $0 < t < t_1$  la señal  $\frac{d}{dt}e(t)$  es negativa; esto reducirá la respuesta desarrollada por  $e(t)$
2. En el intervalo  $t_1 < t < t_2$ ,  $e(t)$  y  $\frac{d}{dt}e(t)$  son negativas, lo cual significa que la respuesta retardada negativa desarrollada será mayor que aquella con solo el control proporcional.
3. En el intervalo  $t_2 < t < t_3$ ,  $e(t)$  y  $\frac{d}{dt}e(t)$  tienen signos opuestos.

Por lo que todos estos efectos resultarán en sobretiros más pequeños y subtiros en  $Y(t)$ .

Otra forma de ver al control derivativo es que dado que  $\frac{d}{dt}e(t)$  representa la pendiente de  $e(t)$ , *el controlador PD es esencialmente un control anticipativo* [22]. Esto es, al conocer la pendiente, el controlador puede anticipar la dirección del error y usarlo para controlar mejor el proceso. Normalmente, en sistemas lineales, si la pendiente de  $e(t)$  o  $y(t)$  es grande, ocurrirá un gran sobretiro. El control derivativo mide la pendiente instantánea de  $e(t)$ , predice un gran sobretiro y hace un esfuerzo correctivo antes de que el sobretiro excesivo ocurra.

Intuitivamente el control derivativo afecta al error en estado-estable de un sistema solo si el error en estado-estable varía en el tiempo. Si el error en estado-estable de un sistema es constante en el tiempo, la derivada temporal de este error es cero, y la porción derivativa del controlador no provee entrada al proceso. Si el error en estado-estable se incrementa en el tiempo, se desarrolla una entrada proporcional a  $\frac{d}{dt}e(t)$ , la cual reduce la magnitud del error. La ecuación 4.3 también muestra que el controlador PD no altera el tipo de sistema que gobierna el error en estado-estable de un sistema con realimentación-unitaria.

El controlador PD tendrá efecto en el error en estado-estacionario solo si el error varía en el tiempo.

#### 4.1.2. Controlador PD en el Dominio de la Frecuencia

Por simplicidad conceptual a continuación se tomará como ejemplo el caso escalar. Para el diseño en el dominio de la frecuencia, la función de transferencia del controlador PD se escribe como

$$G_c(s) = K_p + K_d s = K_p \left( 1 + \frac{K_d}{K_p} s \right)$$

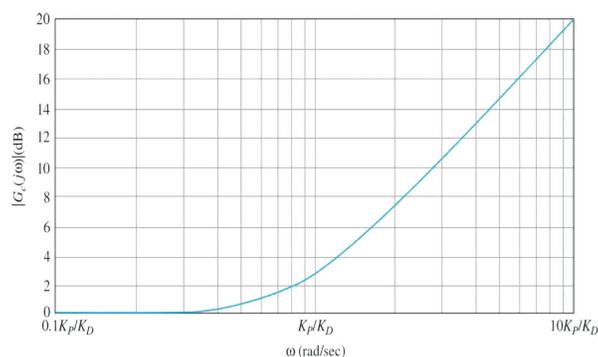
donde

$$K_p \in \mathbb{R}$$

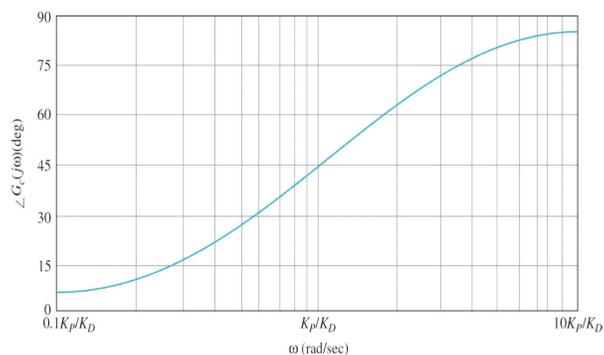
$$K_d \in \mathbb{R}$$

En general, la ganancia proporcional  $K_p$  puede ser combinada con una ganancia en serie del sistema, por lo que la ganancia de frecuencia-cero del controlador pueda ser considerada como la unidad. Las características del filtro pasa-altas del controlador PD se muestran en el diagrama de Bode de la Figura 4.3. La propiedad de adelantamiento de fase podría ser utilizada para mejorar el margen de fase del sistema de control. Desafortunadamente las características de magnitud del controlador PD empujan a la frecuencia de ganancia de cruce a un valor más alto. Entonces, el

principio de diseño de un controlador PD involucra poner la frecuencia de corte del controlador  $\omega = \frac{K_P}{K_D}$ , tal que una mejora efectiva del margen de fase se realiza en la nueva frecuencia de ganancia de cruce. Para un sistema dado, existe un rango de valores de  $\frac{K_P}{K_D}$  que es óptimo para mejorar el amortiguamiento del sistema. Otro de los aparentes efectos del control PD en el dominio de la frecuencia es que, dado a sus características de pasa-altas, en muchos casos incrementará el ancho de banda del sistema y aumentará el tiempo de respuesta de la respuesta escalón. La desventaja práctica del controlador PD es que la porción del diferenciador es un filtro pasa-altas, el cual usualmente acentúa cualquier ruido de altas frecuencias en la entrada.



(a) Diagrama de Bode Magnitud



(b) Diagrama de Bode Fase

Figura 4.3: Controlador PD Diagrama de Bode

### 4.1.3. Compensación de Gravedad

La compensación de gravedad actúa como un *bias* de corrección solo para la cantidad de fuerzas que crean sobretiro y un comportamiento transitorio asimétrico.

Formalmente esto requiere que el controlador PD sea reemplazado por

$$u = K_p(q_d - q) + K_d(-\dot{q}) + G(q) \quad (4.4)$$

Este controlador requiere conocimiento de los componentes de gravedad (estructura y parámetros).

En resumen, un Controlador PD puede afectar el desempeño de un sistema de control de las siguientes maneras:

1. Mejora el amortiguamiento y reduce el máximo sobretiro
2. Reduce el Tiempo de Respuesta y tiempo de asentamiento
3. Incrementa el Ancho de Banda
4. Posible Acentuación de Ruido a Altas Frecuencias

También se deben de tomar las siguientes consideraciones

1. Los controladores PD no pueden resolver el problema de seguimiento, pero aseguran estabilidad global.
2. Los controladores PD con compensación de gravedad mejoran el desempeño obtenido por los controladores PID, sin embargo, requieren un conocimiento exacto.

Esta estructura de control no es teóricamente apta para resolver el problema de seguimiento.

#### 4.1.4. Espacio Articular

Sea la Ley de Control (4.4) donde  $K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de Ganancia Proporcional y  $K_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de Ganancia Derivativa

#### Estabilidad de Controlador PD con Compensación Gravitacional

Se propone la siguiente función de Lyapunov

$$V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T M(q) \dot{\tilde{q}} + \frac{1}{2} \tilde{q}^T K_P \tilde{q}$$

Se puede observar

$$M(q) > 0, K_P > 0 \implies V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) > 0$$

Para probar estabilidad, la derivada temporal de la Función de Lyapunov debe ser negativa definida, por lo que

$$\begin{aligned}\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) &= \frac{1}{2} \left[ \dot{q}^T \left( M(q)\ddot{q} + \dot{M}(q)\dot{q} \right) + \dot{q}^T M(q)\dot{q} \right] + \frac{1}{2} \left[ \dot{q}^T K_P \dot{\tilde{q}} + \dot{\tilde{q}}^T K_P \dot{q} \right] \\ \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) &= \dot{q}^T M(q)\ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q)\dot{q} + \dot{q}^T K_P \dot{\tilde{q}}\end{aligned}\quad (4.5)$$

Sean

$$\begin{aligned}\tilde{q} &= q_d - q \\ \dot{\tilde{q}} &= \dot{q}_d - \dot{q} \\ \ddot{\tilde{q}} &= \ddot{q}_d - \ddot{q}\end{aligned}$$

En caso de que las posiciones articulares deseadas sean constantes

$$\begin{aligned}\tilde{q} &= q_d - q \\ \dot{\tilde{q}} &= -\dot{q} \\ \ddot{\tilde{q}} &= -\ddot{q}\end{aligned}$$

Sea el sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned}M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) &= K_p \tilde{q} + K_d \dot{\tilde{q}} + G(q) \\ \ddot{q} &= M^{-1}(q) \left[ K_p \tilde{q} + K_d \dot{\tilde{q}} - C(q, \dot{q}) \right] \\ \ddot{q} &= M^{-1}(q) [K_p \tilde{q} - K_d \dot{q} - C(q, \dot{q})]\end{aligned}\quad (4.6)$$

Sustituyendo (4.6) en (4.5)

$$\begin{aligned}\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) &= \dot{q}^T M(q) \left[ M^{-1}(q) [K_p \tilde{q} - K_d \dot{q} - C(q, \dot{q})] \right] + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q)\dot{q} - \dot{q}^T K_P \dot{q} \\ \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) &= \dot{q}^T [K_p \tilde{q} - K_d \dot{q} - C(q, \dot{q})] + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M}(q)\dot{q} - \dot{q}^T K_P \dot{q}\end{aligned}\quad (4.7)$$

Por la propiedad de anti-simetría de la matriz de masa

$$N(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, \dot{q})$$

y sustituyéndola en la ecuación (4.7) se llega a

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = -\dot{\tilde{q}}^T K_d \dot{\tilde{q}}$$

De aquí se puede ver que

$$\begin{aligned} V(0, 0) &= 0 \\ V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) &> 0 \\ \dot{V}(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) &< 0 \end{aligned}$$

Por lo que se concluye la estabilidad del Controlador PD con Compensación Gravitacional.

#### 4.1.5. Espacio de Trabajo

Sea la Ley de Control

$$\tau = \mathbf{J}_a^T [K_p (x_d - x) + K_d (\dot{x}_d - \dot{x})] + G(q)$$

donde  $K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de Ganancia Proporcional,  $K_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de Ganancia Derivativa y  $\mathbf{J}_a^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es el *Jacobiano Analítico* del Robot.

#### Estabilidad de Controlador PD con Compensación Gravitacional en el Espacio de Trabajo

Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{x}}^T \bar{M}_x(q) \dot{\tilde{x}} + \frac{1}{2} \tilde{x}^T K_P \tilde{x}$$

Se puede observar

$$\bar{M}_x(q) > 0, K_P > 0 \implies V(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) > 0$$

Para probar estabilidad, la derivada temporal de la Función de Lyapunov debe ser negativa definida, por lo que

$$\dot{V}(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) = \frac{1}{2} \left[ \dot{\tilde{x}}^T \left( \bar{M}_x(q) \ddot{\tilde{x}} + \dot{\bar{M}}_x(q) \dot{\tilde{x}} \right) + \ddot{\tilde{x}}^T \bar{M}_x(q) \dot{\tilde{x}} \right] + \frac{1}{2} \left[ \dot{\tilde{x}}^T K_P \dot{\tilde{x}} + \dot{\tilde{x}}^T K_P \dot{\tilde{x}} \right]$$

$$\dot{V}(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) = \dot{x}^T \bar{M}_x(q) \ddot{x} + \frac{1}{2} \dot{x}^T \dot{\bar{M}}_x(q) \dot{x} + \dot{\tilde{x}}^T K_P \tilde{x} \quad (4.8)$$

Sean

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x_d - x \\ \dot{\tilde{x}} &= \dot{x}_d - \dot{x} \\ \ddot{\tilde{x}} &= \ddot{x}_d - \ddot{x} \end{aligned}$$

Sea el sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \bar{M}_x(q) \ddot{x} + \bar{C}_x(q, \dot{q}) \dot{x} + G_x(q) &= (\mathbf{J}_a^{-1})^T \tau \\ \ddot{x} = \bar{M}_x^{-1}(q) \left[ (\mathbf{J}_a^{-1})^T \tau - \bar{C}_x(q, \dot{q}) \dot{x} - G_x(q) \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

Sustituyendo la Ecuación (4.9) en la Ecuación (4.8)

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) &= \dot{x}^T \bar{M}_x(q) \left[ \bar{M}_x^{-1}(q) \left[ (\mathbf{J}_a^{-1})^T \tau - \bar{C}_x(q, \dot{q}) \dot{x} - G_x(q) \right] \right] + \frac{1}{2} \dot{x}^T \dot{\bar{M}}_x(q) \dot{x} + \dot{\tilde{x}}^T K_P \tilde{x} \\ \dot{V}(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) &= \dot{x}^T \left[ (\mathbf{J}_a^{-1})^T \tau - \bar{C}_x(q, \dot{q}) \dot{x} - G_x(q) \right] + \frac{1}{2} \dot{x}^T \dot{\bar{M}}_x(q) \dot{x} + \dot{\tilde{x}}^T K_P \tilde{x} \end{aligned}$$

Sustituyendo la Ley de Control  $\tau$

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) &= \dot{x}^T \left[ (\mathbf{J}_a^{-1})^T \mathbf{J}_a^T [K_p(x_d - x) + K_d(\dot{x}_d - \dot{x})] + G(q) - \bar{C}_x(q, \dot{q}) \dot{x} - G_x(q) \right] + \frac{1}{2} \dot{x}^T \dot{\bar{M}}_x(q) \dot{x} + \dot{\tilde{x}}^T K_P \tilde{x} \\ \dot{V}(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) &= \dot{x}^T [K_p(x_d - x) + K_d(\dot{x}_d - \dot{x}) + G_x(q) - \bar{C}_x(q, \dot{q}) \dot{x} - G_x(q)] + \frac{1}{2} \dot{x}^T \dot{\bar{M}}_x(q) \dot{x} + \dot{\tilde{x}}^T K_P \tilde{x} \\ \dot{V}(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) &= \dot{x}^T [K_p(x_d - x) + K_d(\dot{x}_d - \dot{x}) - \bar{C}_x(q, \dot{q}) \dot{x}] + \frac{1}{2} \dot{x}^T \dot{\bar{M}}_x(q) \dot{x} + \dot{\tilde{x}}^T K_P \tilde{x} \end{aligned} \quad (4.10)$$

En caso de que las posiciones articulares deseadas sean constantes, es decir, en caso de que se diseñe para Regulación

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x_d - x \\ \dot{\tilde{x}} &= -\dot{x} \\ \ddot{\tilde{x}} &= -\ddot{x}\end{aligned}$$

$$\dot{V}(\tilde{x}, \dot{x}) = \dot{x}^T [K_p(x_d - x) - K_d(\dot{x}) - \bar{C}_x(q, \dot{q})\dot{x}] + \frac{1}{2}\dot{x}^T \dot{\bar{M}}_x(q)\dot{x} - \dot{x}^T K_P \tilde{x} \quad (4.11)$$

$$\dot{V}(\tilde{x}, \dot{x}) = \dot{x}^T [-K_d(\dot{x}) - \bar{C}_x(q, \dot{q})\dot{x}] + \frac{1}{2}\dot{x}^T \dot{\bar{M}}_x(q)\dot{x} \quad (4.12)$$

Por la propiedad de anti-simetría de la matriz de masa

$$N(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{\bar{M}}_x(q) - \bar{C}_x(q, \dot{q})\dot{x}$$

y sustituyéndola en la ecuación (4.12) se llega a

$$\dot{V}(\tilde{x}, \dot{x}) = -\dot{x}^T K_d \dot{x}$$

De aquí se puede ver que

$$\begin{aligned}V(0, 0) &= 0 \\ V(\tilde{x}, \dot{x}) &> 0 \\ \dot{V}(\tilde{x}, \dot{x}) &< 0\end{aligned}$$

Por lo que se concluye la estabilidad del Controlador PD con Compensación Gravitacional en el Espacio de Tarea.

## 4.2. Control PD con Compensador mediante Redes Neuronales

La manera en que las neuronas de una red neuronal están estructuradas, está íntimamente ligada con el algoritmo de aprendizaje usado para entrenar la red. En general se identifican tres casos de arquitecturas de redes

1. Redes de una Capa Hacia Adelante: En una Red Neuronal en capas, las neuronas están organizadas en capas. En su forma más simple, se tiene una capa de entrada de nodos fuente que se proyecta en una capa de salida de neuronas, pero no al revés. En otras palabras, la red es estrictamente hacia adelante o de tipo acíclico.
2. Redes Multicapa Hacia Adelante: La segunda clase de redes neuronales hacia adelante se distingue por la presencia de una o más capas ocultas, cuyos nodos de procesamiento se llaman neuronas ocultas. La función de las neuronas ocultas es intervenir entre las entradas externas y la salida de la red de una manera útil. Al agregar una o más capas ocultas, la red se habilita para extraer estadísticas de orden superior. En un sentido más amplio, la red adquiere una perspectiva global a pesar de su conectividad local debido al conjunto extra de conexiones sinápticas y a la dimensión extra de interacciones neuronales. Se dice que la red neuronal está completamente conectada si cada nodo en cada capa de la red está conectado a cada otro nodo en la capa adyacente hacia adelante. Si algunos enlaces de comunicación (conexiones sinápticas) no se conectan en la red, decimos que la red está parcialmente conectada.
3. Redes Neuronales Recurrentes: Una red neuronal recurrente tiene al menos un lazo de realimentación. La presencia de lazos de realimentación tiene un impacto profundo en la capacidad de entrada de la red en su desempeño. Los lazos de realimentación involucran el uso de ramas particulares compuestas por elementos de retardos unitarios (denotados por  $z^{-1}$ ), lo cual resulta en un comportamiento de dinámica no lineal, asumiendo que la red neuronal tenga unidades no lineales.

En el Apéndice C se hace una comparativa entre *Redes Neuronales Estáticas* y *Redes Neuronales Dinámicas*. Se eligió el enfoque de *Redes Neuronales Dinámicas* debido a sus ventajas computacionales. Se sabe que una sumatoria lineal de orden infinito es equivalente a un sistema lineal de un solo polo realimentado [44].

Si  $G$  y  $f$  son desconocidos, se puede usar una Red Neuronal para aproximarlos

$$\mathbf{W}\sigma(x) + \eta \approx G - f$$

donde  $G$  es el vector de Gravedad,  $f$  es el vector de fuerzas externas,  $\eta$  es el error de modelado,  $\mathbf{W}$  es la matriz de Pesos Sinápticos,  $\sigma(x)$  son las funciones de activación y se define el vector  $x$  como

$$x = \begin{bmatrix} q^T & \dot{q}^T & \tilde{q}^T & \ddot{q}^T \end{bmatrix}^T$$

Sea la Ley de Control

$$\tau = -\mathbf{K}_p \tilde{q} - \mathbf{K}_d \dot{\tilde{q}} - \hat{\mathbf{W}}_t \sigma(x)$$

La Ley de Actualización es

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{W}}_t = \mathbf{K}_w \sigma(x) \dot{q}^T$$

La prueba de estabilidad de Lyapunov para este controlador se puede encontrar en [26].

## 4.3. Simulaciones

### 4.3.1. Controlador PD con Compensación Gravitacional en el Espacio Articular

#### Phantom OMNI

Aplicando el Controlador PD con compensación de gravedad al Robot, se obtuvieron los siguientes resultados con una entrada constante. Se dio la entrada en el espacio de tarea, posteriormente esta se traslada al espacio articular mediante la cinemática inversa. En la Figura 4.4 se muestra la referencia en el espacio de tarea y articular.

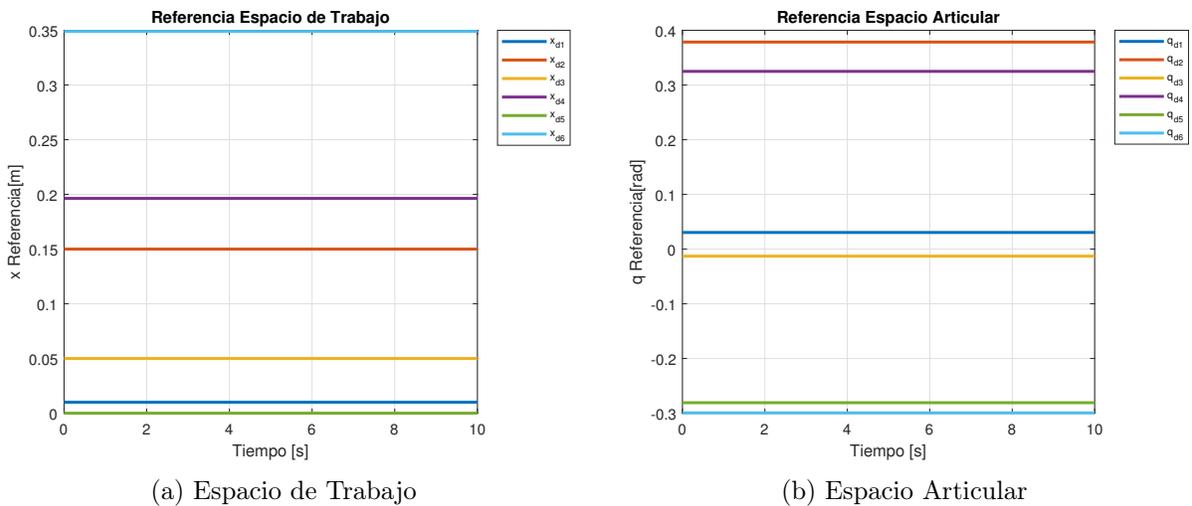


Figura 4.4: Referencia Controlador PD Robot Maestro

Los valores de las Ganancias Proporcional y Derivativa respectivamente son

$$K_p = \begin{bmatrix} 10,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10,2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10,2 \end{bmatrix} \quad K_d = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

y se obtiene la respuesta del Sistema mostrada en la Figura 4.5.

Se puede observar que el *Controlador PD con Compensación Gravitacional* hace que las variables articulares del robot sigan la referencia dada con un *Error* tendiendo a cero en *estado estable*. Se puede ver que en la Respuesta en el Espacio Articular no se observan sobretiros, y se alcanza la posición deseada en menos de 1 segundo. Por otro lado, también se puede ver que la Entrada de Control se mantiene en rangos aceptables operacionalmente.

### Robai Cyton Gamma 1500

Aplicando el Controlador PD con compensación de Gravedad al Robot Esclavo, y teniendo la referencia de este como la posición en el Espacio de Tarea del Robot Maestro. Para obtener la referencia en el Espacio Articular se usó el Algoritmo de Cinemática Inversa del Robot Esclavo.

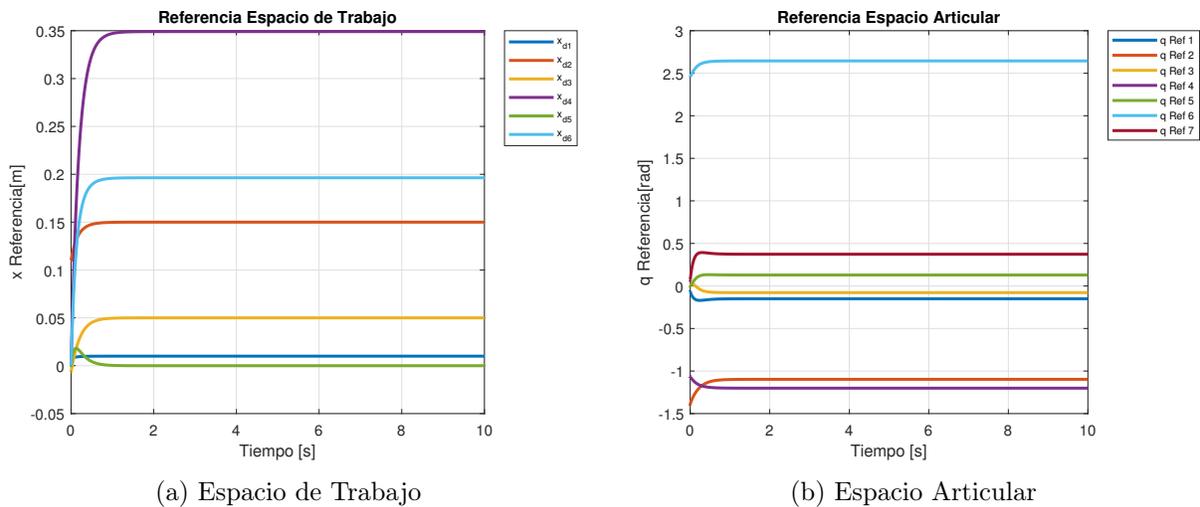
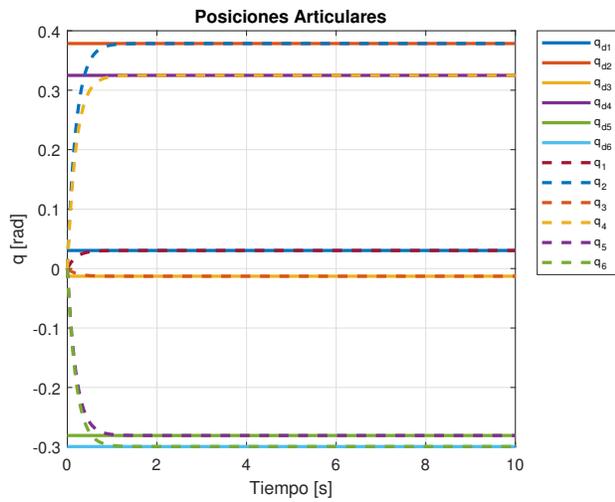
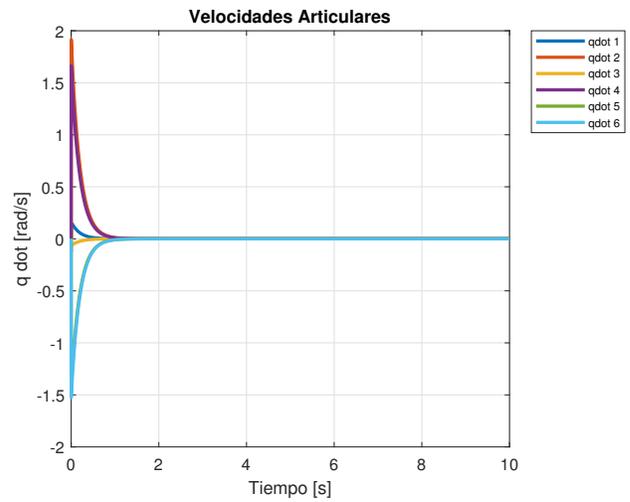


Figura 4.6: Referencia Controlador PD Robot Esclavo

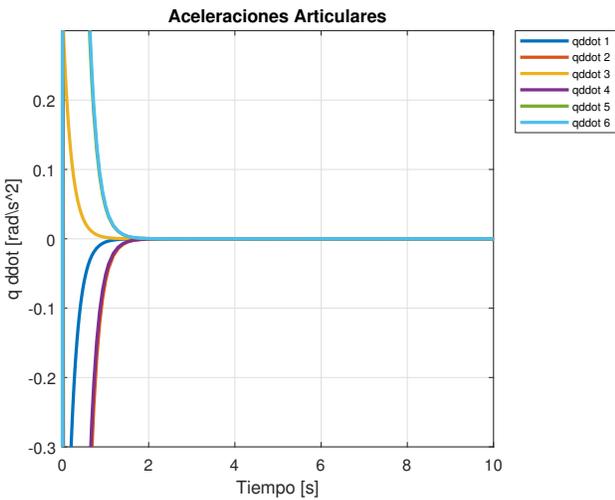
Los valores de las ganancias Proporcional y Derivativa respectivamente son



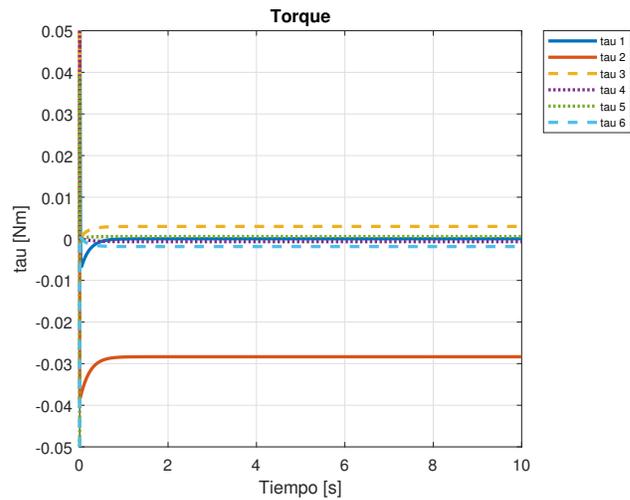
(a) Referencia y Salida Espacio Articular



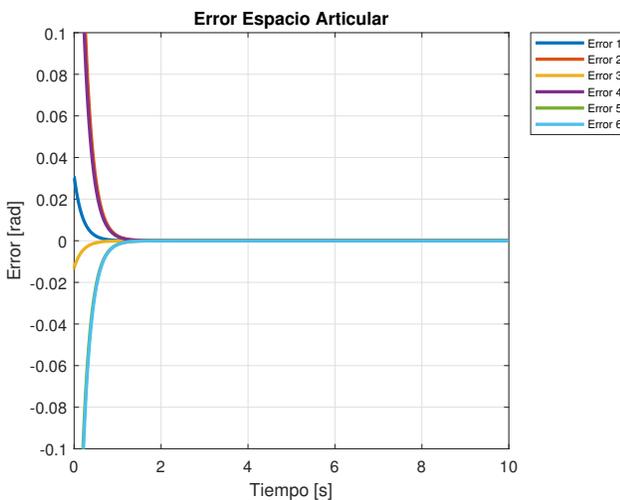
(b) Velocidades Articulares



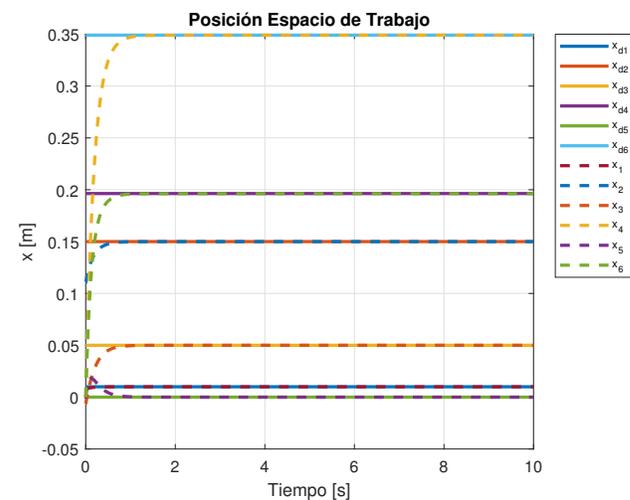
(c) Aceleraciones Articulares



(d) Torque



(e) Error



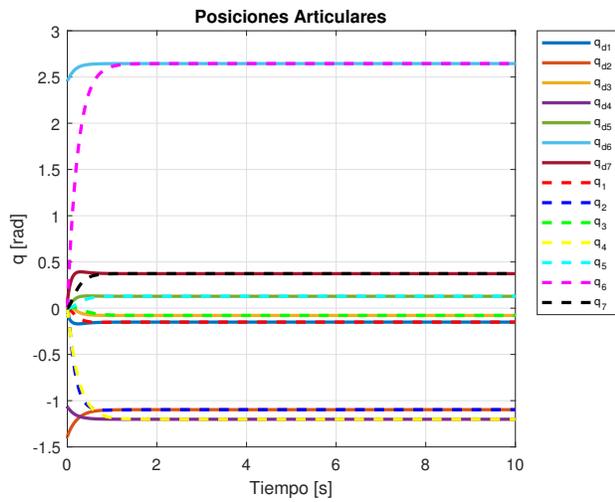
(f) Posición en el Espacio de Trabajo

Figura 4.5: Respuesta Control PD con Compensación Gravitacional Espacio Articular Robot Maestro

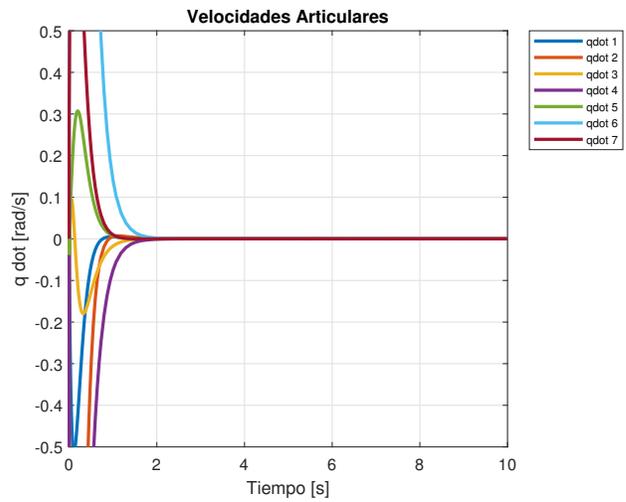
$$K_p = \begin{bmatrix} 2,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,3 \end{bmatrix} \quad K_d = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

A continuación, en la Figura 4.7 se muestra la respuesta obtenida

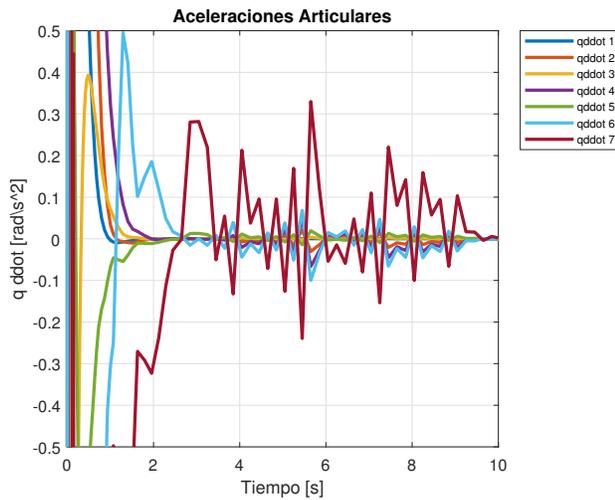
Se puede observar que el *Controlador PD con Compensación Gravitacional* hace que las variables articulares del robot sigan la referencia dada con un *Error* que tiende a cero en *estado estable*. En este caso se alcanza la posición de referencia en menos de 1 segundo, y en ningún momento se tuvieron sobretiros. Por otro lado, se puede ver un ruido acotado en la señal de aceleración  $\ddot{q}$ , sobre todo en la séptima articulación, sin embargo, se puede ver que este es muy pequeño. Cabe destacar que el método mediante el cual se obtiene esta señal es mediante el modelo Dinámico Directo, y de ahí se usa un doble integrador hasta obtener la señal de posición. También se puede observar que las variables  $\dot{q}$  y  $q$  no tienen ninguna variación perceptible presente. Por otro lado, la Ley de Control  $\tau$  se mantiene en valores de operación plausibles para el funcionamiento correcto del Robot Esclavo.



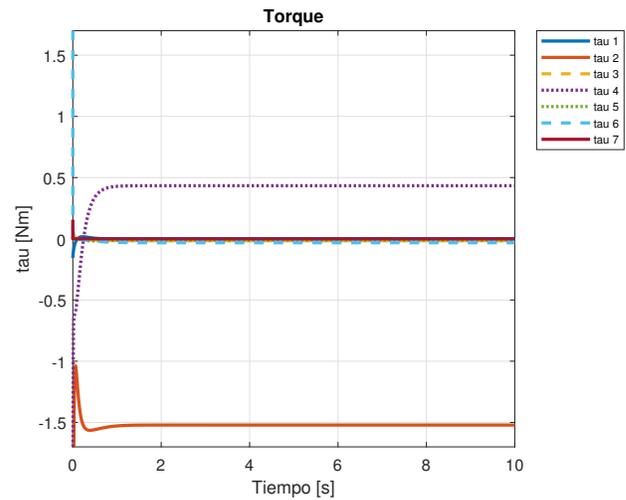
(a) Referencia y Salida Espacio Articular



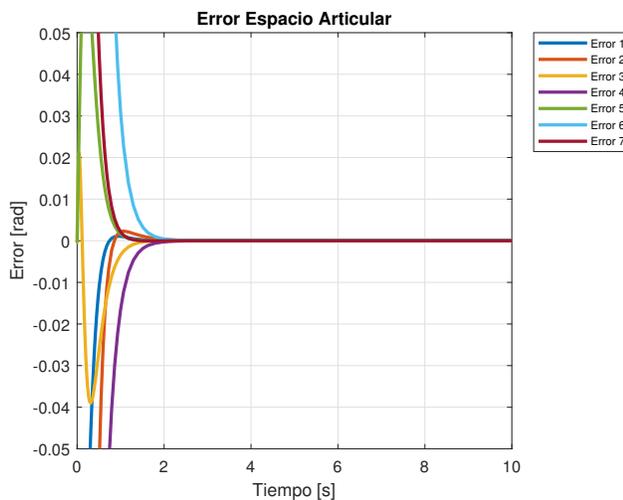
(b) Velocidades Articulares



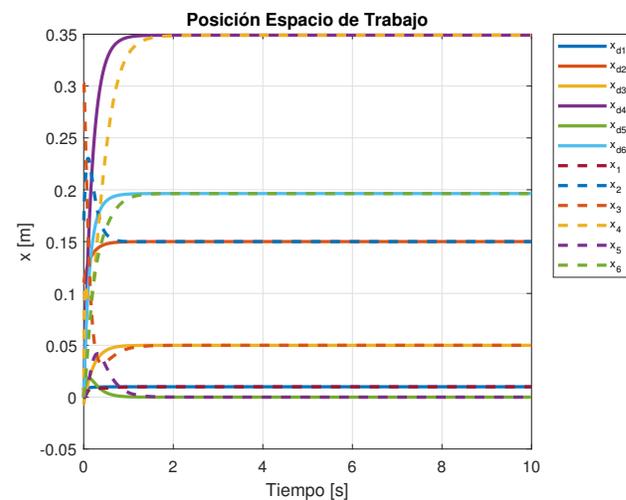
(c) Aceleraciones Articulares



(d) Torque



(e) Error



(f) Posición en el Espacio de Trabajo

Figura 4.7: Respuesta Control PD con Compensación Gravitacional Espacio Articular Robot Esclavo

### 4.3.2. Controlador PD con Compensación Gravitacional en el Espacio de Tarea

#### Phantom OMNI

Aplicando el Controlador PD con Compensación Gravitacional al Robot, se obtuvieron los siguientes resultados con una Referencia Constante.

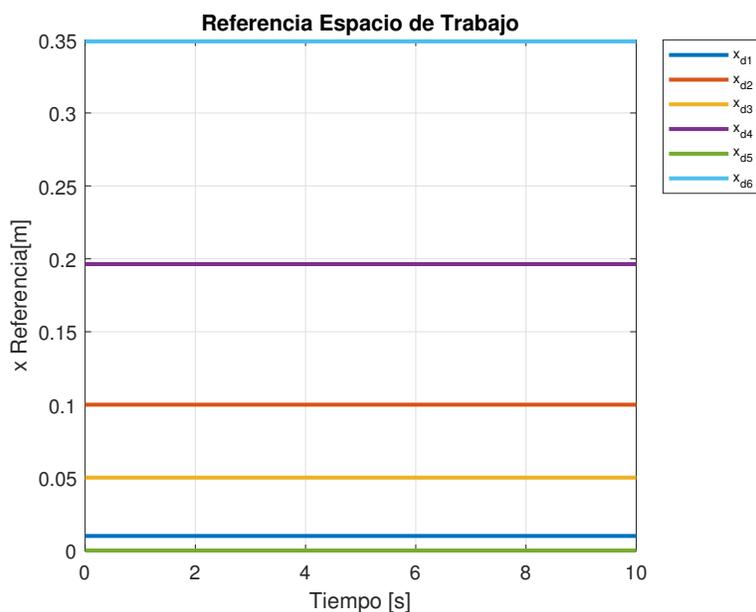
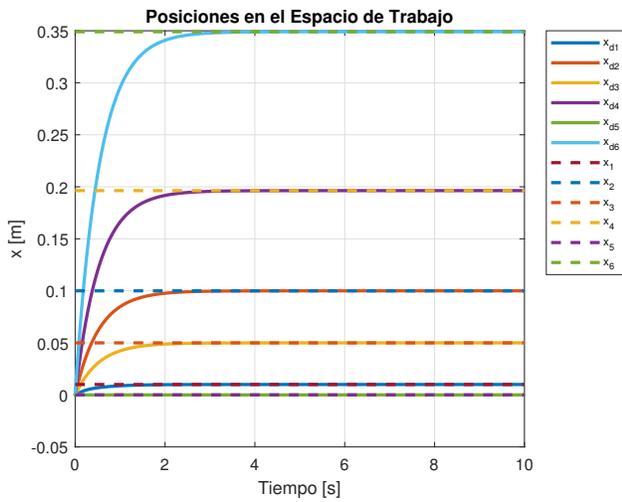


Figura 4.8: Referencia Controlador PD Espacio de Trabajo Robot Maestro

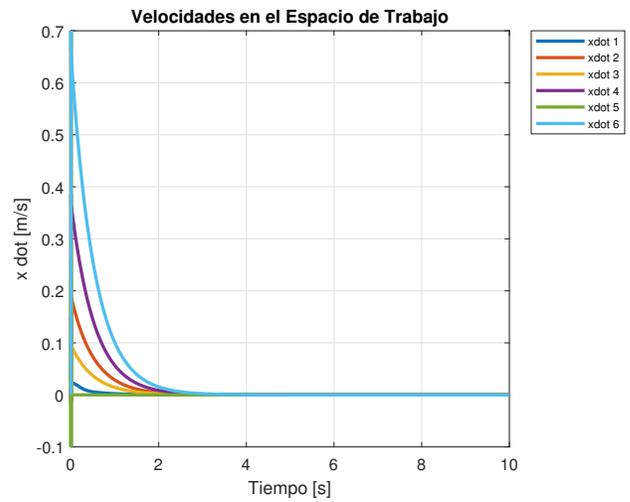
Los valores de las ganancias Proporcional y Derivativa respectivamente son

$$K_p = \begin{bmatrix} 19,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 19,3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 19,3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 19,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19,3 \end{bmatrix} \quad K_d = \begin{bmatrix} 10,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10,3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10,3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10,3 \end{bmatrix}$$

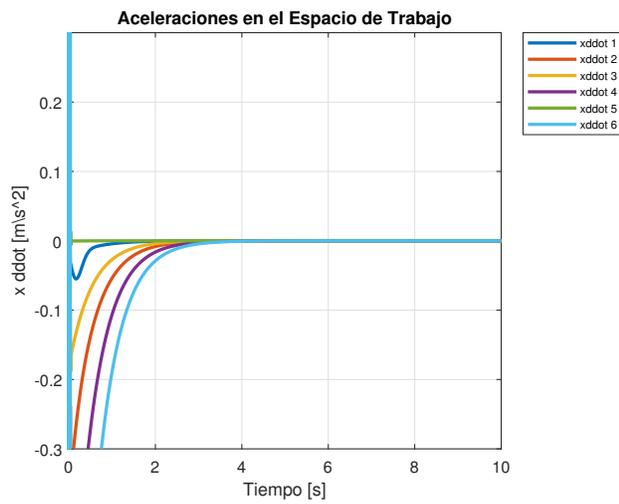
En la Figura 4.9 se puede observar el Resultado obtenido



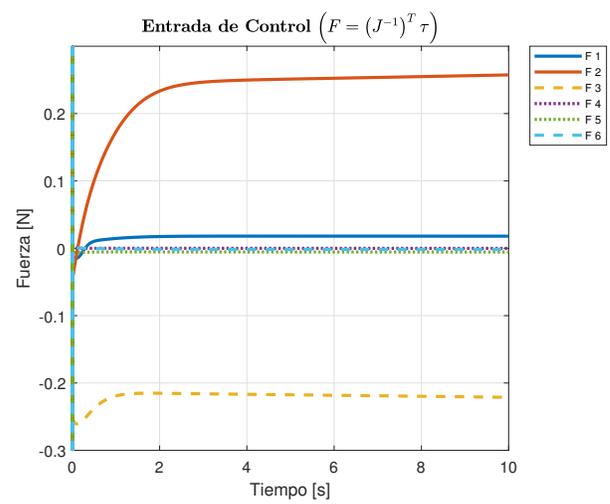
(a) Referencia y Salida Espacio de Trabajo



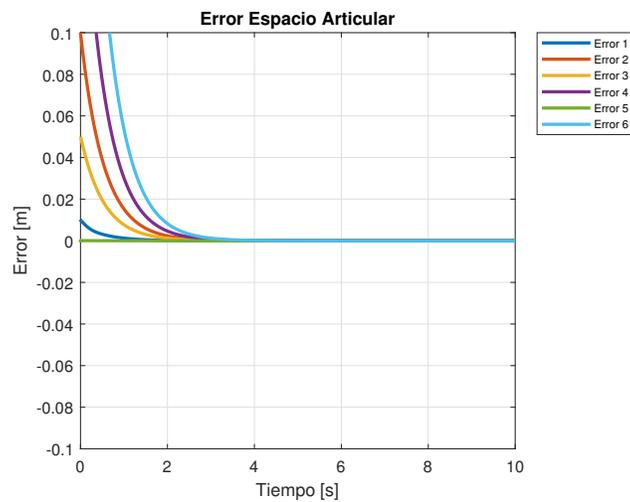
(b) Velocidades en el Espacio de Trabajo



(c) Aceleraciones en el Espacio de Trabajo



(d) Fuerzas



(e) Error

Figura 4.9: Respuesta Control PD con Compensación Gravitacional Espacio de Tarea Robot Maestro

Se puede ver que el *Controlador PD con Compensación Gravitacional* hace que las variables articulares del robot sigan la referencia con un Error que tiende a cero en Estado Estable. En el caso del Espacio de Trabajo se puede ver que casi tarda dos segundos en alcanzar la posición deseada. En este caso la Entrada de Control refleja valores plausibles y no se observan señales de ruido o perturbaciones.

### Robai Cyton Gamma 1500

Aplicando el Controlador PD con compensación de gravedad al Robot Esclavo, se obtuvieron los siguientes resultados. En este caso la referencia es la posición en el Espacio de Tarea del Robot Maestro, esto es

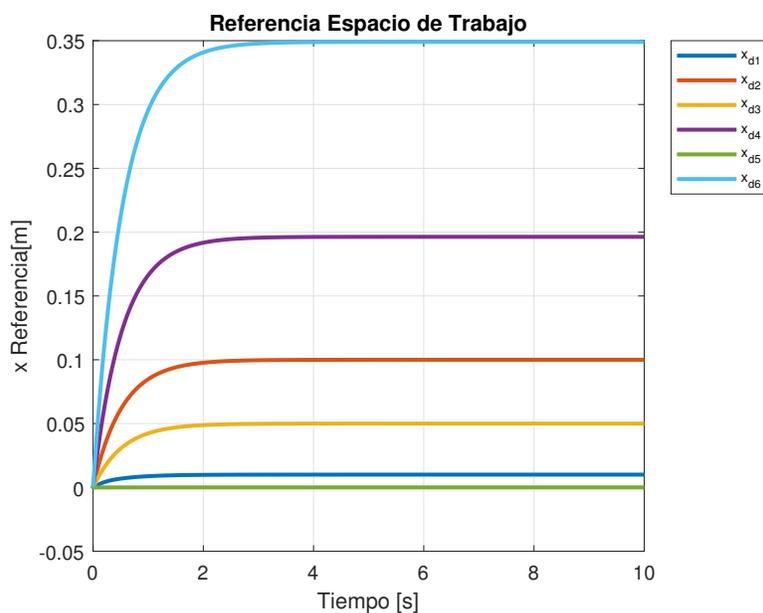
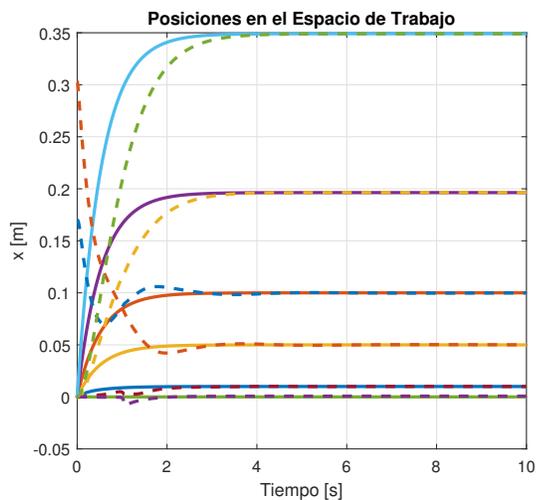


Figura 4.10: Referencia Controlador PD Espacio de Trabajo Robot Esclavo

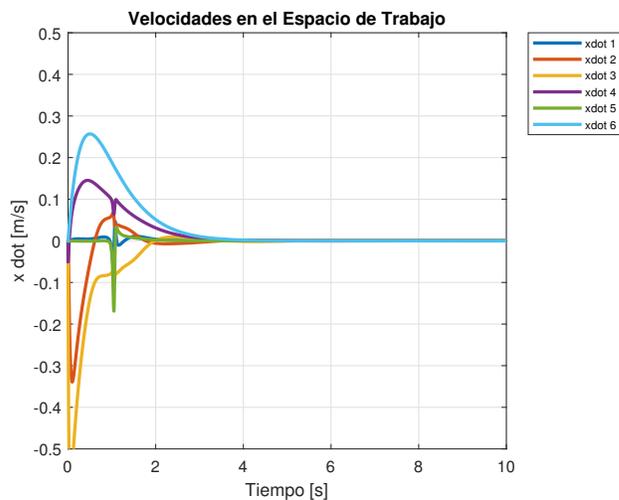
Los valores de las ganancias Proporcional y Derivativa respectivamente son

$$K_p = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \quad K_d = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

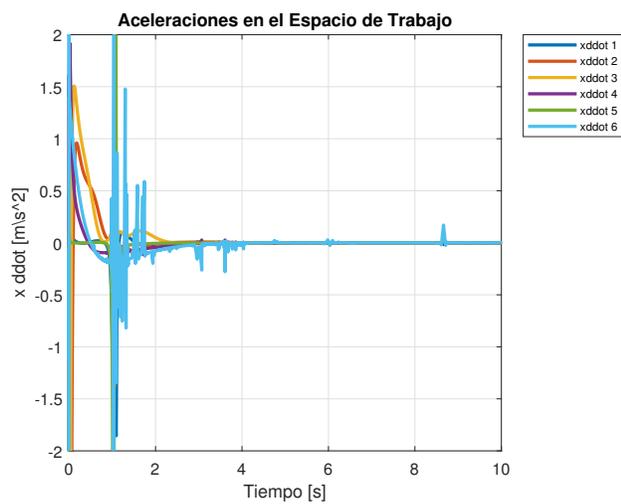
y se obtuvieron los resultados mostrados en la Figura 4.11



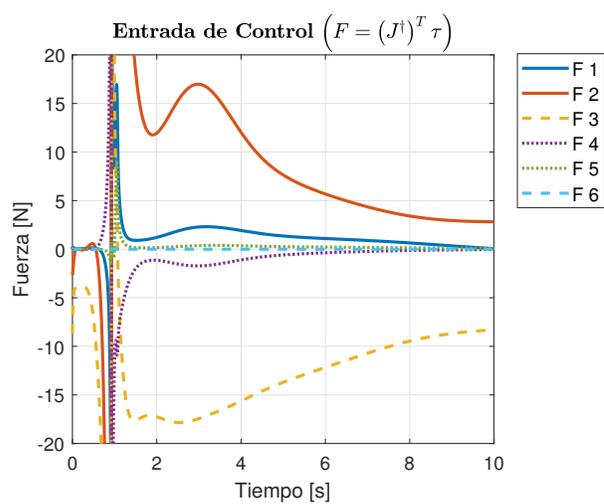
(a) Referencia y Salida Espacio de Trabajo



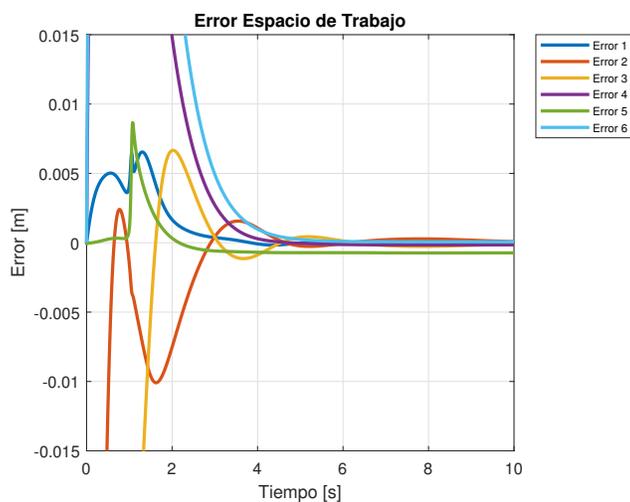
(b) Velocidades en el Espacio de Trabajo



(c) Aceleraciones en el Espacio de Trabajo



(d) Fuerzas



(e) Error

Figura 4.11: Respuesta Control PD con Compensación Gravitacional Espacio de Tarea Robot Esclavo

Se puede ver que en el Caso del *Controlador PD con Compensación Gravitacional* en el Espacio de Tarea, a este le toma alrededor de 2 segundos para llegar a la posición deseada. En este sentido cabe destacar que durante los primeros segundos la referencia es dinámica. También se puede observar que en el caso de las variables  $x_2$  y  $x_3$  se tiene un pequeño sobretiro. Se puede ver que la coordenada de Aceleración en el Espacio de Tarea  $\ddot{x}$  tiene poco ruido. Por otro lado, se puede ver que a diferencia del *Controlador PD con Compensación Gravitacional* en el Espacio Articular, en este caso se tiene un pequeño Error en Estado Estable. La Entrada de Control  $F$  refleja el cambio en posición durante los primeros segundos, y posteriormente se ve como converge en Estado Estable.

### 4.3.3. Controlador PD con Compensación por Redes Neuronales

#### Phantom OMNI

En el caso del Robot Maestro se planteó la Red Neuronal mostrada en la Figura 4.12

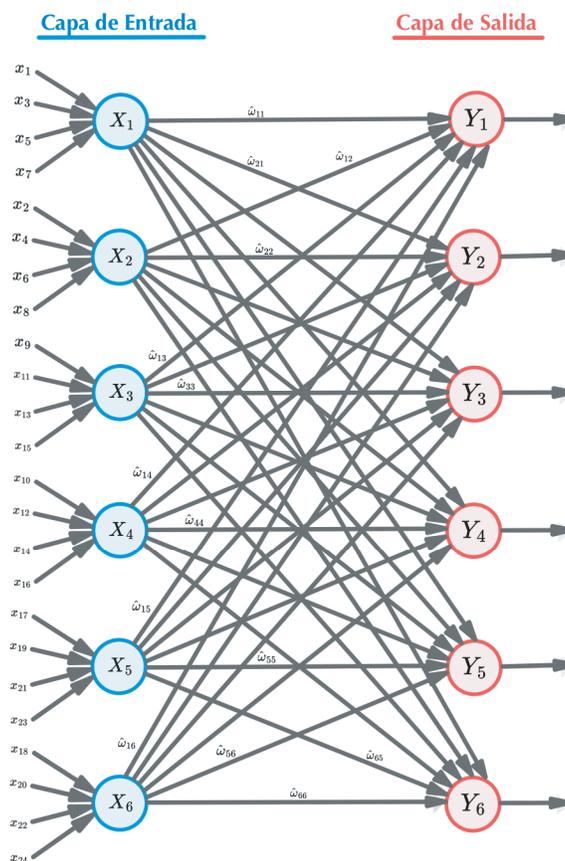


Figura 4.12: Red Neuronal propuesta para Compensación Robot Maestro

Se puede ver que esta Red consta de la capa de entrada, que es la que recibe los datos, y la

capa de salida, que es la que da el resultado de la Red. En este caso La capa de salida consta de 6 neuronas. La distribución de datos de entrada se hace como se muestra en esa Figura, y en este caso la Función de Activación elegida es la Tangente Hiperbólica.

Aplicando el Controlador PD con Compensación Neuronal al Robot Maestro, se obtuvieron los siguientes resultados con una entrada constante. Se dio la entrada en el espacio de tarea, posteriormente esta se traslada al espacio articular mediante la cinemática inversa. En la Figura 4.13 se muestra la referencia en los espacios de tarea y articular.

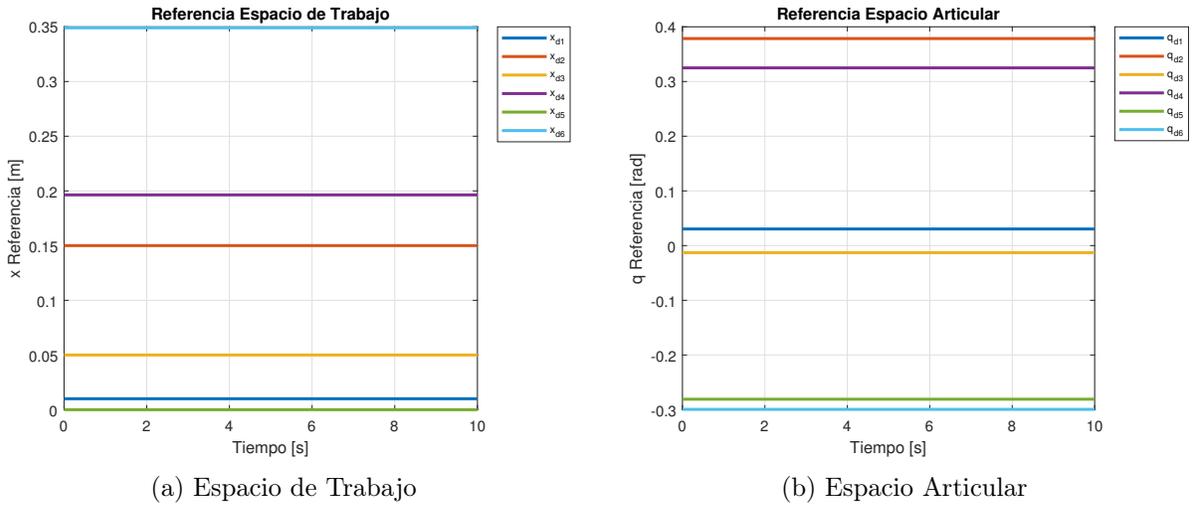


Figura 4.13: Referencia Controlador PD con Compensación por Redes Neuronales Robot Maestro

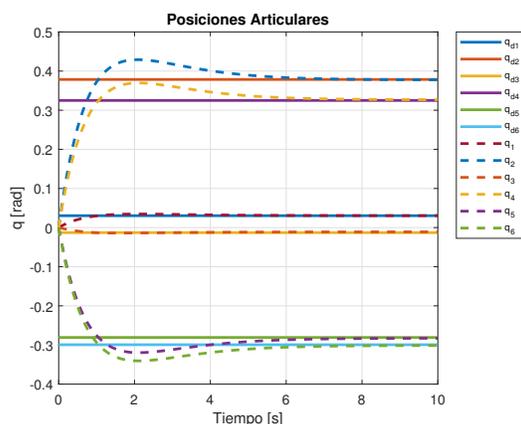
Los valores de las ganancias Proporcional, Derivativa y de la Red Neuronal respectivamente son

$$K_p = \begin{bmatrix} 45500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 45500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 45500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 45500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 45800 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 45500 \end{bmatrix} \quad K_d = \begin{bmatrix} 49900 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 49900 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 49900 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 49900 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 49900 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 49900 \end{bmatrix}$$

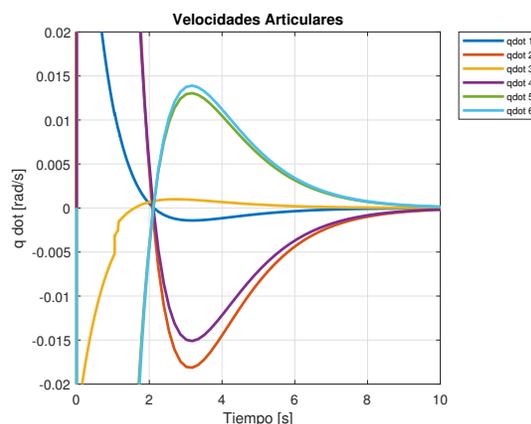
$$K_w = \begin{bmatrix} 80 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 80 \end{bmatrix}$$

con las condiciones iniciales para la Ley de Aprendizaje de los Pesos Sinápticos

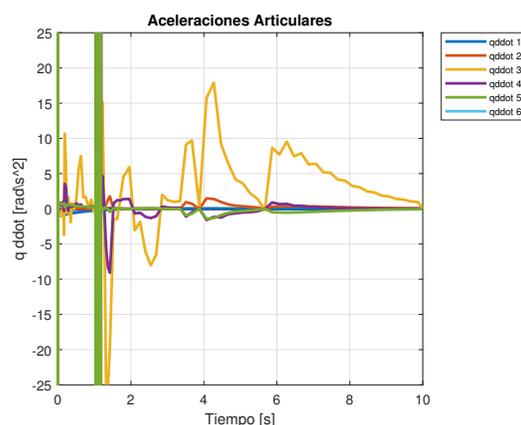
$$w_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$



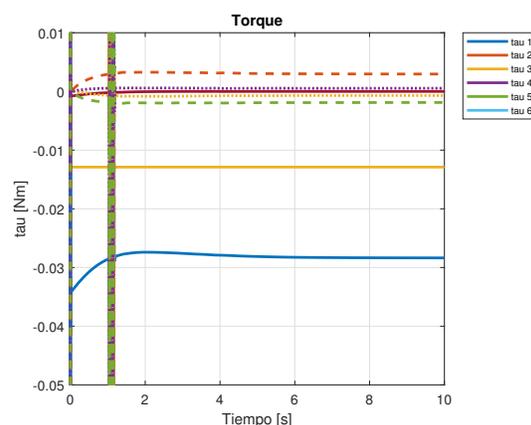
(a) Referencia y Salida Espacio Articular



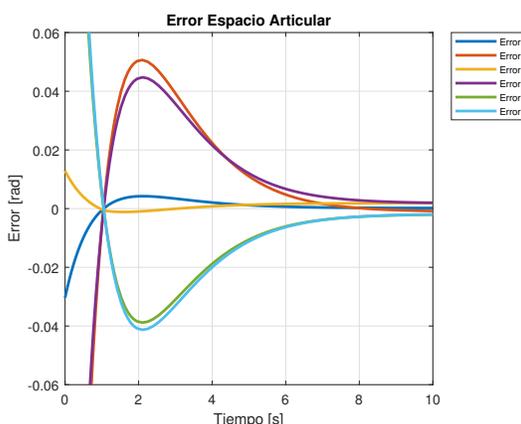
(b) Velocidades Articulares



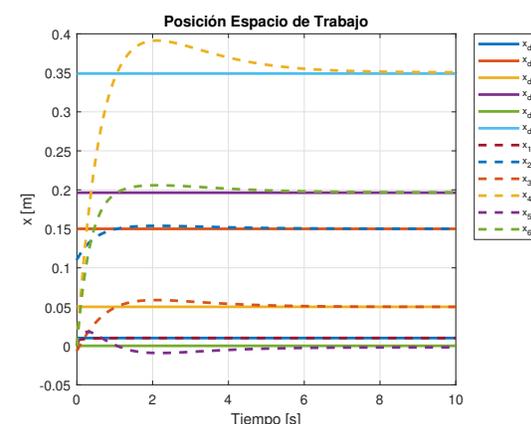
(c) Aceleraciones Articulares



(d) Torque



(e) Error



(f) Posición en el Espacio de Trabajo

Figura 4.14: Respuesta Controlador PD con Compensación por Redes Neuronales Robot Maestro Espacio Articular

En la Figura 4.14 se muestran los resultados obtenidos.

También se muestran los resultados obtenidos de la Red Neuronal en la Figura 4.15.

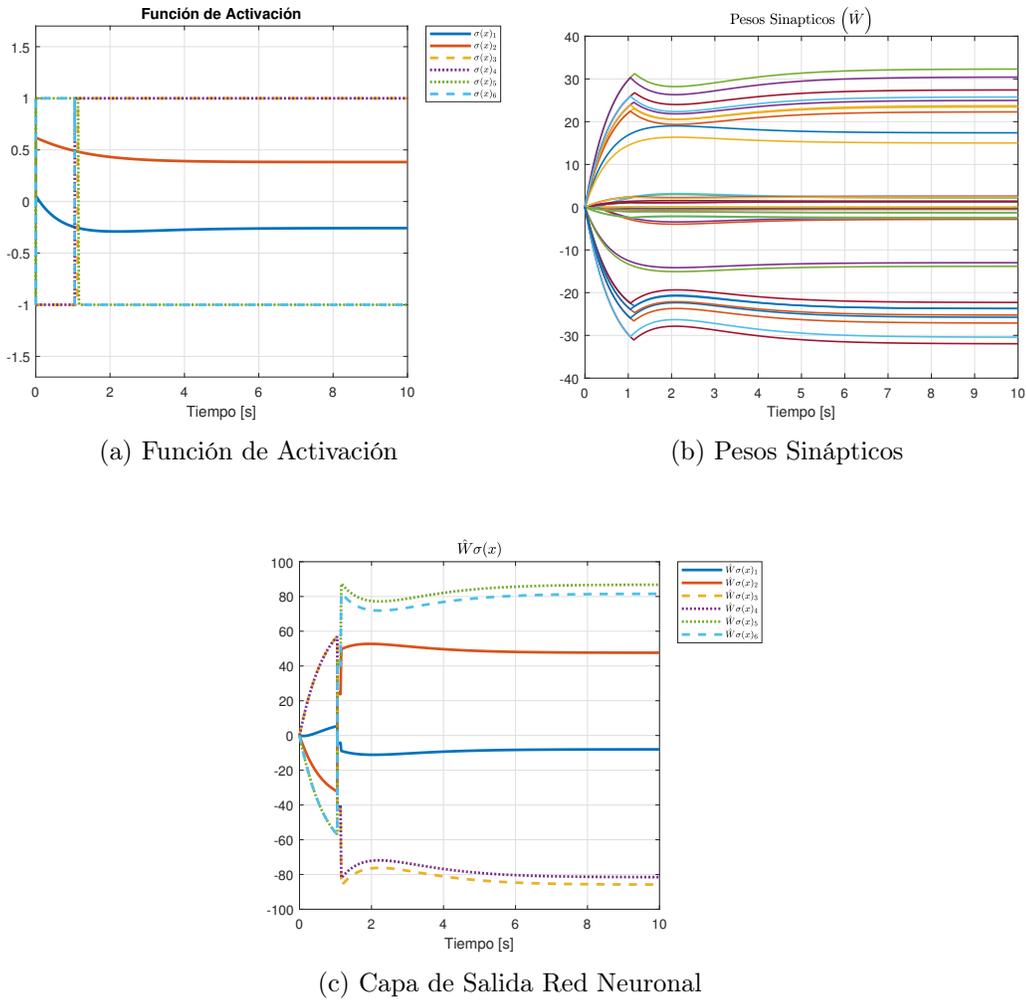


Figura 4.15: Resultados Red Neuronal Robot Maestro

Al usar el *Controlador PD con Compensación por Redes Neuronales*, se puede ver que se tiene un pequeño sobretiro y se llega a la posición deseada en alrededor de 6 segundos. Debido a esto, se puede ver que las velocidades articulares  $\dot{q}$  y las aceleraciones articulares  $\ddot{q}$  toman tiempo para apenas llegar a cero en los 10 segundos que dura la simulación (ya que estamos en el problema de regulación). En la Figura 4.15b se puede apreciar que los pesos sinápticos empiezan a converger a un valor constante a partir del segundo 6. Debido a que en este caso se tienen 36 Pesos Sinápticos distintos, desde  $\hat{W}_{11}$  hasta  $\hat{W}_{66}$ , en este caso solo se pretende ilustrar la tendencia de los Pesos Sinápticos alcanzados, y no se enfatizará en los valores que se alcanzaron. Se puede ver que en Estado Estable, este controlador sigue teniendo un pequeño Error de Posición, cuya máxima magnitud es

de 0,002 rad, este se podría corregir o disminuir agregando una capa a la Red Neuronal. Por otro lado, se puede ver que la Entrada de Control  $\tau$  tiene valores plausibles para los servomotores de cada articulación. Cuando se usa la Cinemática Directa para cambiar las coordenadas  $q$  a  $x$ , se puede notar que se sigue teniendo el sobretiro que se observa en el espacio articular.

### Robai Cyton Gamma 1500

Para el Robot Esclavo se planteó la Red Neuronal mostrada en la Figura 4.16

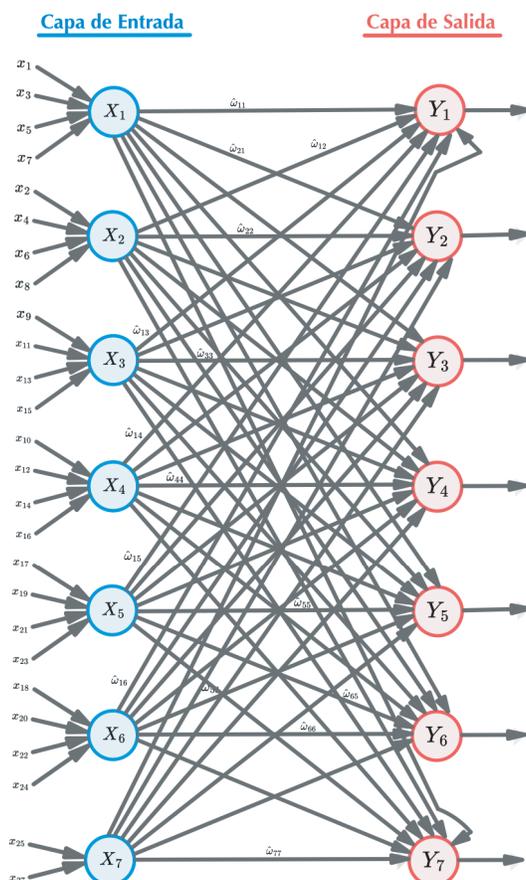


Figura 4.16: Red Neuronal propuesta para Compensación Robot Esclavo

Se puede ver que esta Red consta de la capa de entrada, que es la que recibe los datos, y la capa de salida, que es la que da el resultado de la Red. En este caso La capa de salida consta de 7 neuronas. La distribución de datos de entrada se hace como se muestra en esa Figura, y en este caso, así como en el anterior, la Función de Activación elegida es la Tangente Hiperbólica.

En la Figura 4.17 se puede apreciar la referencia dada al Robot Esclavo, la cual es la trayectoria seguida por el Robot Maestro en el Espacio de Tarea.

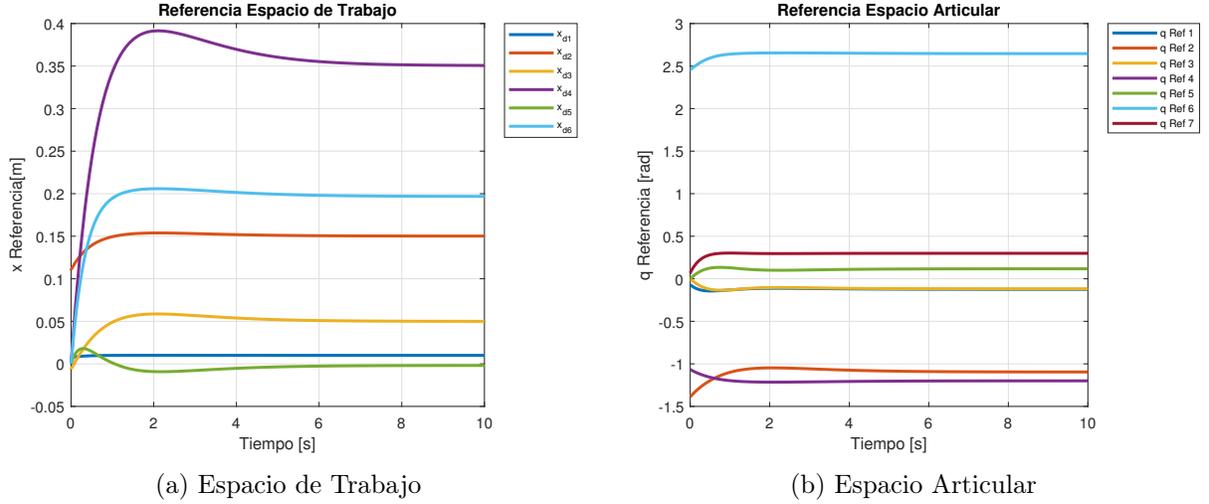


Figura 4.17: Referencia Controlador PD con Compensación por Redes Neuronales Robot Esclavo

Los valores de las ganancias Proporcional, Derivativa y de la Red Neuronal respectivamente son

$$K_p = \begin{bmatrix} 45500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 45500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 45500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 45500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 48500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 45500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 45500 & 0 \end{bmatrix} \quad K_d = \begin{bmatrix} 55000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 55000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 55000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 55000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 55000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 55000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 55000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 55000 \end{bmatrix}$$

$$K_w = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

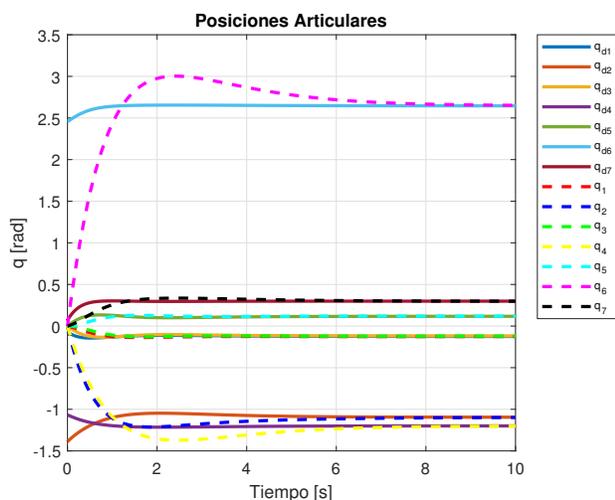
Las condiciones iniciales para la Ley de Aprendizaje para los Pesos Sinápticos del Robot Maestro son

$$w_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

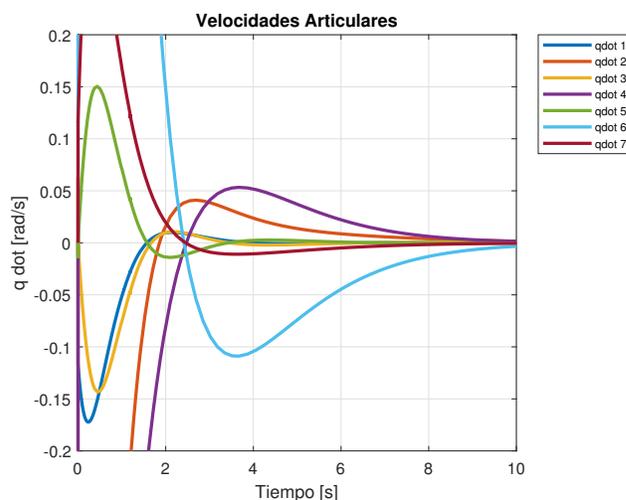
En la Figura 4.18 se pueden ver los resultados obtenidos.

Se muestran los resultados obtenidos de la Red Neuronal en la Figura 4.19.

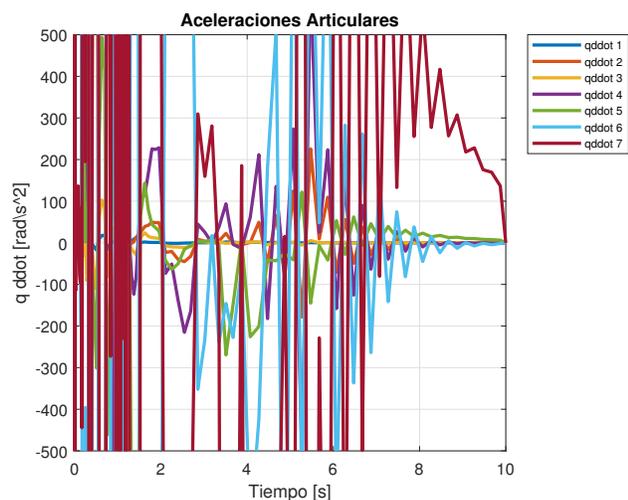
Se puede observar que para el *Controlador PD con Compensación por Redes Neuronales* se tiene un pequeño sobretiro durante los primeros segundos, y posteriormente se alcanza la posición deseada  $\mathbf{q}_d$ . Por otro lado, también se puede ver que las velocidades y aceleraciones articulares



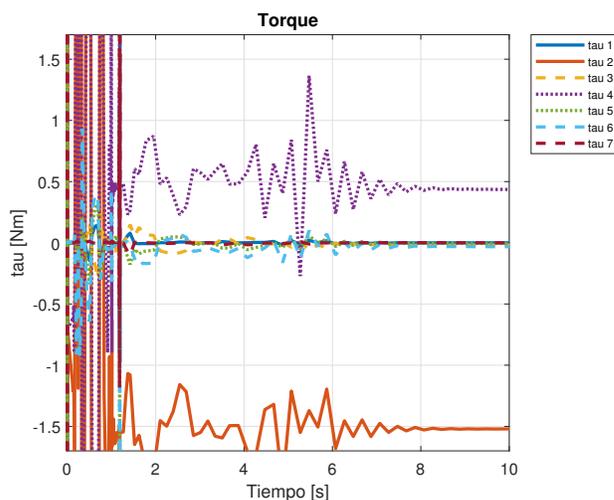
(a) Referencia y Salida Espacio Articular



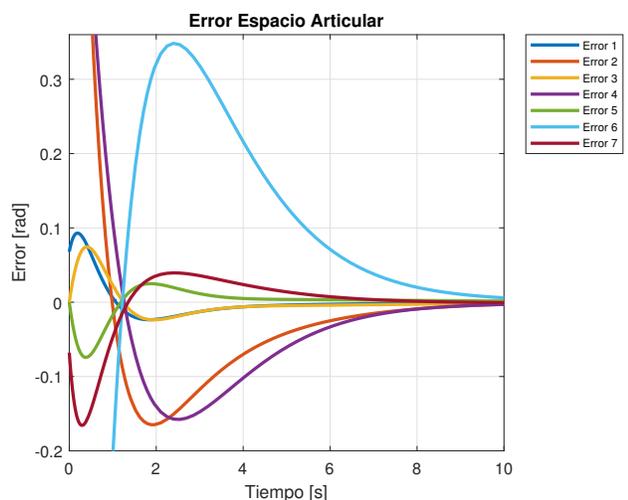
(b) Velocidades Articulares



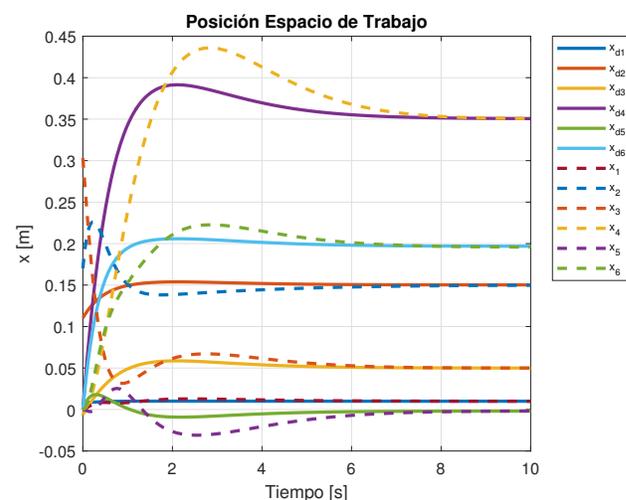
(c) Aceleraciones Articulares



(d) Torque

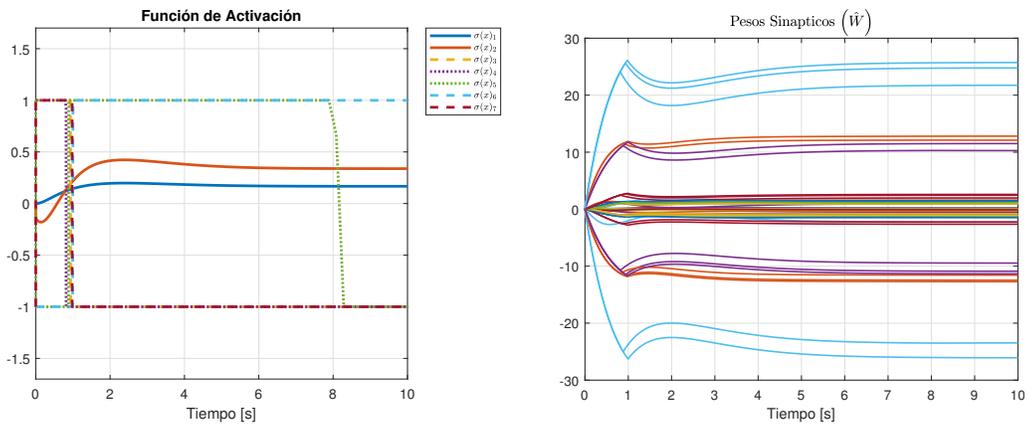


(e) Error



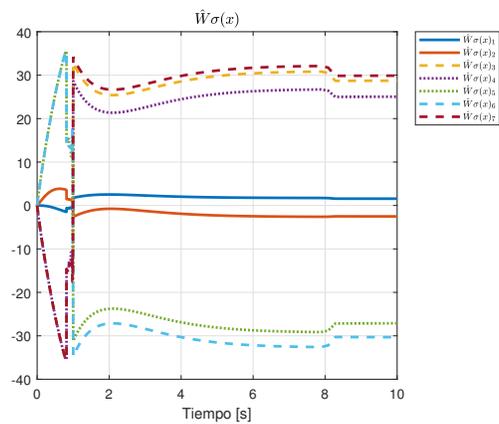
(f) Posición en el Espacio de Trabajo

Figura 4.18: Respuesta Controlador PD con Compensación por Redes Neuronales Robot Esclavo Espacio Articular



(a) Función de Activación

(b) Pesos Sinápticos



(c) Capa de Salida Red Neuronal

Figura 4.19: Resultados Red Neuronal Robot Esclavo

$\dot{\mathbf{q}}$  y  $\ddot{\mathbf{q}}$  respectivamente convergen a cero una vez que la posición articular  $\mathbf{q}$  llega a un estado estable. En la Figura 4.19b se puede apreciar que así como pasó en el caso del Robot Maestro, los valores de los Pesos Sinápticos empezaron a converger a una constante alrededor del segundo 6. Las aceleraciones articulares  $\ddot{\mathbf{q}}$  tienen mayor ruido en este caso, sin embargo, todo es debido a lo explicado anteriormente. En este caso el Error en Estado Estable tiende a cero, teniéndose un error de 0,0031 rad en su magnitud máxima, sin embargo no se logra eliminar por completo al cabo de los 10 segundos. Si se agregara otra capa a la Red Neuronal, probablemente se podría reducir el Error en Estado Estable. La Ley de Control  $\tau$  en un inicio tiene ruido, no obstante, logra estabilizarse y converge tal como se espera. Se puede observar que el sobretiro inicial que se tiene en las Posiciones Articulares  $\mathbf{q}$  se traslada también a las posiciones en el Espacio de Tarea  $\mathbf{x}$ .



## Capítulo 5

# Control de Impedancia para Teleoperación

La idea del control por impedancia es asignar un comportamiento dinámico prescrito a un robot mientras su efector final interactúa con el entorno. Se especifica el desempeño deseado mediante una *impedancia dinámica generalizada*, es decir, un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden que representan a un sistema masa-resorte-amortiguador. En general, el control de impedancia es adecuado para aquellas tareas donde las fuerzas de contacto deben de permanecer pequeñas, típicamente para evitar interferencia entre las partes en el ensamble u operaciones de inserción, mientras que la precisión de regulación de fuerzas no es requerida. De hecho, no hay un lazo de error de fuerza explícito en este enfoque, por lo que muy comúnmente se dice que *la fuerza se controla al controlar la posición*. Usando matrices de rigidez programable y de amortiguamiento en el modelo de impedancia, se alcanza un compromiso entre fuerza de contacto y precisión de posición como el resultado de interacciones inesperadas con el entorno.

### 5.1. Control por Dinámica Inversa

Para lograr una dinámica deseada característica para la interacción entre el manipulador y su entorno en el punto de contacto, el diseño de la entrada de control  $u$  en (B.9) ó (B.18), que son el Modelo Dinámico del Robot en el Espacio Articular y en el Espacio de Tarea respectivamente, se maneja en dos etapas.

La primera etapa desacopla y linealiza la dinámica en lazo cerrado en las coordenadas del espacio de trabajo para obtener

$$\ddot{x}=u_0$$

donde  $u_0$  es una entrada auxiliar externa disponible para el control. Basándonos en (B.18), esto

se logra al elegir

$$u = J_a^T(q) (\bar{M}_x(q)u_0 + \bar{C}_x(q, \dot{q})\dot{x} + G_x(q) - f)$$

en términos de los componentes del modelo original

$$u = M(q)J_a^{-1}(q) \left( u_0 - \dot{J}_a(q)\dot{q} \right) + C(q, \dot{q}) + G(q) - J_a^T(q)f \quad (5.1)$$

En la segunda etapa, el modelo de impedancia deseada que balancea dinámicamente las fuerzas de contacto  $f$  en el efector final del manipulador se eligen como un sistema mecánico lineal de segundo orden descrito por

$$H_m(\ddot{x} - \ddot{x}_d) + D_m(\dot{x} - \dot{x}_d) + K_m(x - x_d) = f \quad (5.2)$$

donde  $H_m$  es la Matriz de Inercia Aparente,  $D_m$  es el amortiguamiento deseado y  $K_m$  es la rigidez deseada. El vector  $x_d(t)$  especifica una trayectoria de referencia la cual puede ser ejecutada exactamente si  $f = 0$ , es decir, durante movimiento libre. Cuando el manipulador está en contacto, el balanceo automático de fuerzas dinámicas producirá un comportamiento de movimiento diferente. Si (5.2) representa a una impedancia física, las matrices  $H_m$  y  $K_m$  se deben de elegir positivas definidas y  $D_m$  se debe elegir positiva semidefinida. Todas las matrices son simétricas (típicamente diagonales). La impedancia mecánica se obtiene al elegir  $u_0$  en (5.1) como

$$u_0 = \ddot{x}_d + H_m^{-1} (D_m(\dot{x}_d - \dot{x}) + K_m(x_d - x) + f)$$

por lo que la ley de control de impedancia en general es

$$u = J_a^T(q) (\bar{M}_x(q)\ddot{x}_d + \bar{C}_x(q, \dot{q})\dot{x} + G_x(q) + \bar{M}_x(q)H_m^{-1} (D_m(\dot{x}_d - \dot{x}) + K_m(x_d - x)) + (\bar{M}_x(q)H_m^{-1} - I) f) \quad (5.3)$$

La implementación de (5.3) requiere realimentación de los estados del manipulador  $(q, \dot{q})$  y mediciones de la fuerza de contacto  $f$ . Se puede ver que no hay un lazo de control de fuerza explícito en esta Ley de Control.

En la Figura 5.1 se muestra un diagrama del Controlador de Impedancia.

Cualquier elección de  $H_m$ ,  $D_m$  y  $K_m$  que cumpla con las características es factible, se tienen algunas limitaciones en la práctica. Si la ubicación donde el contacto ocurre no es conocida, los elementos de las matrices  $H_m$  y  $K_m$  deben ser elegidos para evitar fuerzas de impacto excesivas.

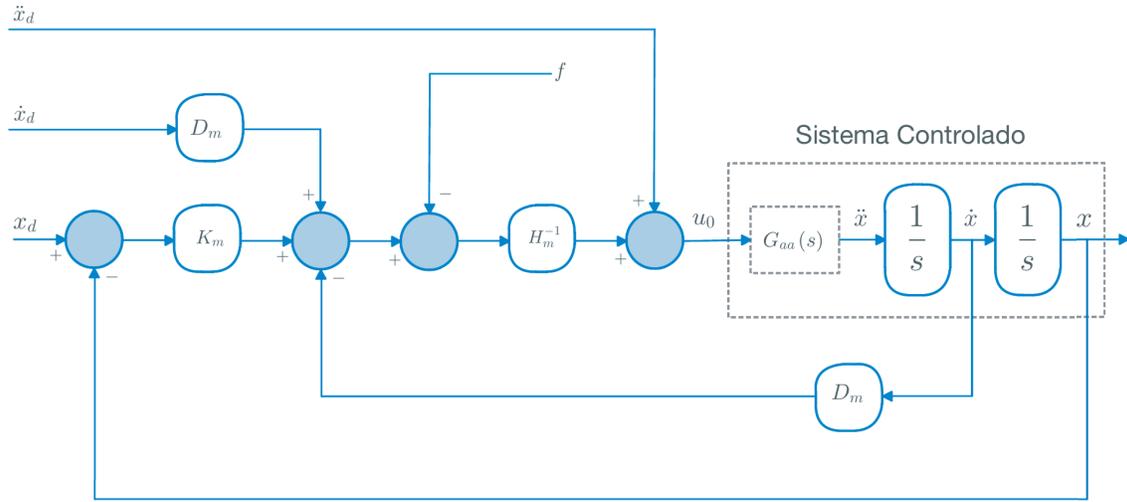


Figura 5.1: Diagrama de Bloques Control de Impedancia

Cuando se elige una impedancia no lineal en (5.3) ocurre una simplificación relevante. Reemplazando

$$H_m = \bar{M}_x(q)$$

en la ecuación (5.2) se llega a

$$u = J_a^T(q) (\bar{M}_x(q)\ddot{x}_d + \bar{C}_x(q, \dot{q})\dot{x} + G_x(q) + D_m(\dot{x}_d - \dot{x}) + K_m(x_d - x))$$

o en las coordenadas originales

$$u = M(q)J_a^{-1}(q) (\ddot{x}_d - \dot{J}_a(q)\dot{q}) + C(q, \dot{q}) + G(q) - J_a^T(q) (D_m(\dot{x}_d - \dot{x}) + K_m(x_d - x)) \quad (5.4)$$

Cabe destacar que no se requiere realimentación de fuerza en este caso. Se puede ver a (5.4) como un controlador de movimiento, que intenta mantener limitadas las fuerzas que surgen del contacto del efector final con su entorno.

## 5.2. Control PD

Para el problema de regulación ( $\dot{x}_d = 0$  y  $\dot{q} \approx 0$ ), se obtiene el siguiente controlador de (5.4):

$$u = J_a^T(q) (D_m(\dot{x}_d - \dot{x}) + K_m(x_d - x)) + G(q) \quad (5.5)$$

Se puede ver que la ley de control (5.5) es un controlador PD en el espacio de tarea con compensación de gravedad. En este caso se puede ver que las fuerzas elásticas y viscosas en el espacio de tarea debidas al error de posición  $x_d - x$  y al movimiento  $\dot{x}$ , se transforman a torques articulares mediante el Jacobiano Transpuesto.

### 5.3. Prueba de Estabilidad de Lyapunov

Cuando se considera una referencia constante  $x_d$  y fuerzas de contacto  $f \neq 0$ , se puede usar la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_1 = \frac{1}{2} \dot{x}^T \bar{M}_x(q) \dot{x} + \frac{1}{2} (x_d - x)^T K_m (x_d - x) \quad (5.6)$$

Se puede ver que (5.6) es positiva definida. Si se calcula la derivada temporal de (5.6)

$$\dot{V}_1 = \dot{x}^T \bar{M}_x(q) \ddot{x} + \frac{1}{2} \dot{x}^T \dot{\bar{M}}_x(q) \dot{x} + (\dot{x}_d - \dot{x})^T K_m (x_d - x)$$

Si  $x_d$  es constante, es decir, el control es para el caso de regulación

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \dot{x}^T \bar{M}_x(q) \ddot{x} + \frac{1}{2} \dot{x}^T \dot{\bar{M}}_x(q) \dot{x} - \dot{x}^T K_m (x_d - x) \\ &= \dot{x}^T (-\bar{C}_x(q, \dot{q}) \dot{x} - G_x(q) + J_a^{-T}(q) G(q) - D_m \dot{x} + K_m (x_d - x)) + \frac{1}{2} \dot{x}^T \dot{\bar{M}}_x(q) \dot{x} - \dot{x}^T K_m (x_d - x) \\ &= -\dot{x}^T D_m \dot{x} \end{aligned}$$

Se puede ver que  $\dot{V}_1 = -\dot{x}^T D_m \dot{x}$  es negativa definida. Por lo que al final se tiene

$$V_1(0, 0) = 0$$

$$V_1(\tilde{x}, \dot{x}) > 0$$

$$\dot{V}_1(\tilde{x}, \dot{x}) < 0$$

Por lo que se concluye que el *Control es Estable*.

### 5.4. Simulación

#### Phantom Omni

Dado que la trayectoria del robot Phantom Omni será la trayectoria a seguir para el Robot Robai Cyton Gamma 1500, en este caso se implementó un controlador PD con compensación gra-

vitacional al primero, obteniéndose el siguiente resultado. En la Figura 5.2 se muestra la referencia en el espacio de tarea.

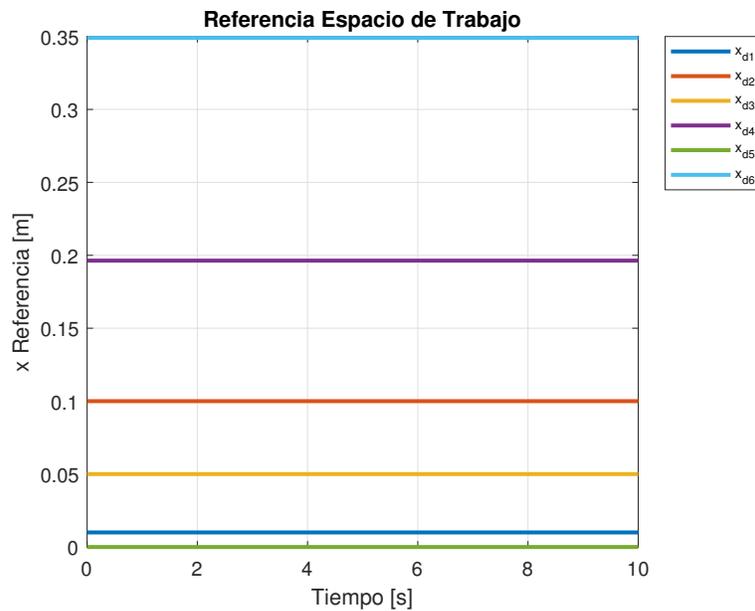
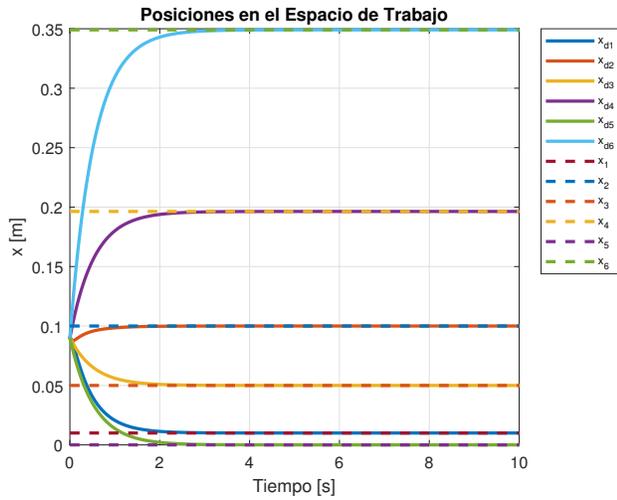


Figura 5.2: Referencia Controlador PD con Compensación Gravitacional Robot Maestro Espacio de Trabajo

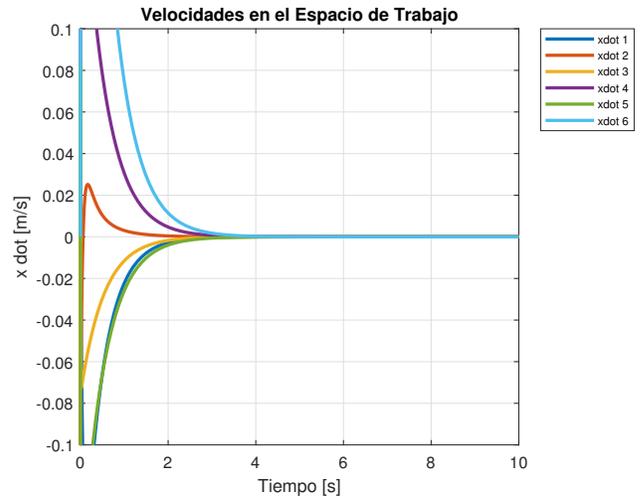
Los valores de las ganancias Proporcional y Derivativa respectivamente son

$$K_p = \begin{bmatrix} 19,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 19,3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 19,3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 19,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19,3 \end{bmatrix} \quad K_d = \begin{bmatrix} 10,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10,3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10,3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10,3 \end{bmatrix}$$

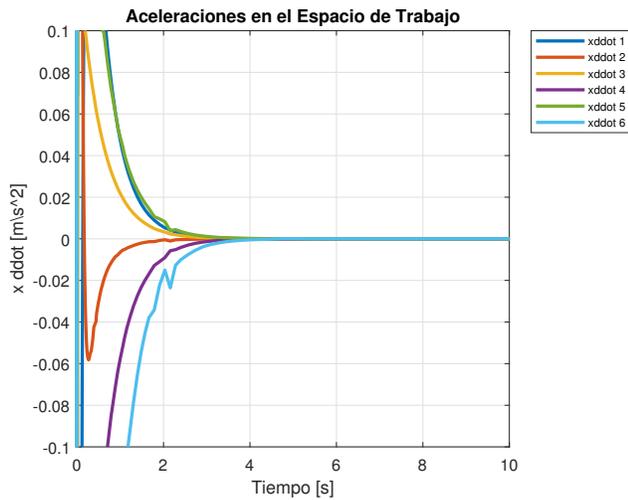
Se pueden observar los resultados obtenidos en la Figura 5.3



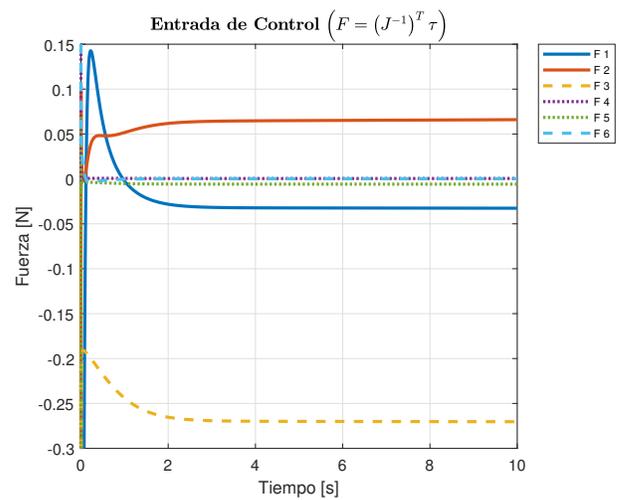
(a) Referencia y Salida Espacio de Trabajo



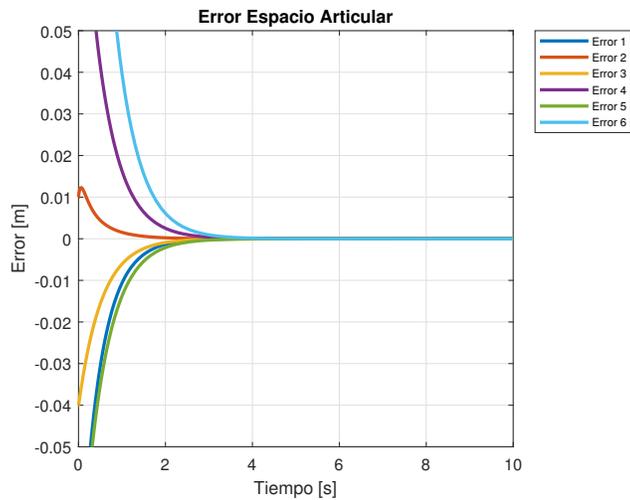
(b) Velocidades en el Espacio de Trabajo



(c) Aceleraciones en el Espacio de Trabajo



(d) Fuerzas



(e) Error

Figura 5.3: Respuesta Controlador PD con Compensación Gravitacional Robot Maestro Espacio de Trabajo

Dado que anteriormente ya se había analizado este controlador, se omitirán los comentarios en esta ocasión.

En este caso las condiciones iniciales de los integradores de la Dinámica Directa son

$$\dot{x}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad x_0 = [0,09 \ 0,09 \ 0,09 \ 0,09 \ 0,09 \ 0,09]^T$$

### Robai Cyton Gamma 1500

Aplicando el Controlador de Impedancia al Robot Esclavo, se obtuvieron los siguientes resultados. En este caso la referencia del Robot Esclavo es la trayectoria del Robot Maestro, esto es

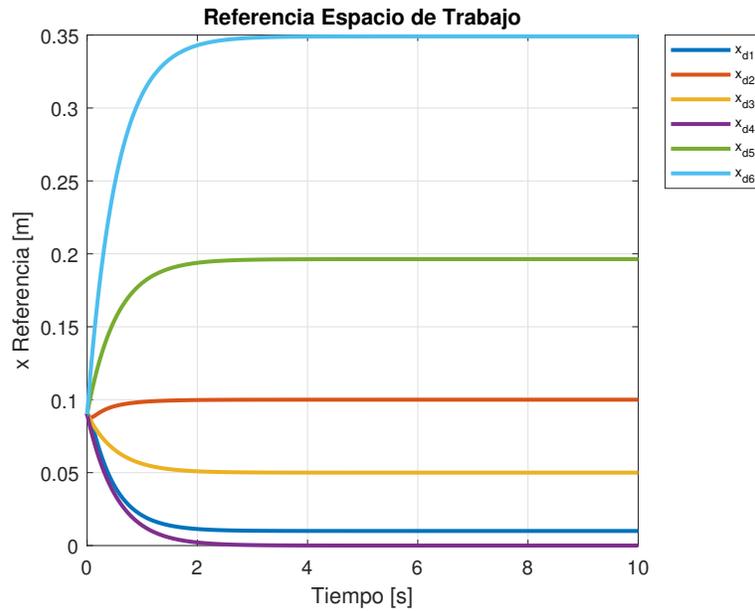


Figura 5.4: Referencia Controlador de Impedancia Robot Esclavo Espacio de Trabajo

La Matriz de Inercia Aparente es

$$H_m = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 \end{bmatrix}$$

Las Matrices de amortiguamiento y rigidez deseada respectivamente son

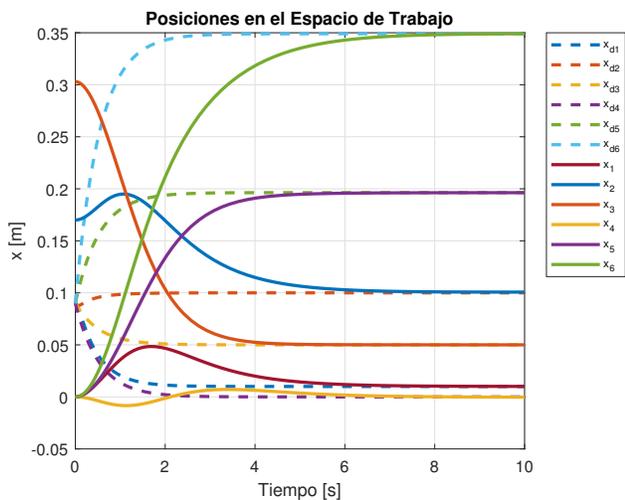
$$D_m = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 \end{bmatrix}, K_m = \begin{bmatrix} 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 \end{bmatrix}$$

En la Figura 5.5 se muestran los resultados obtenidos.

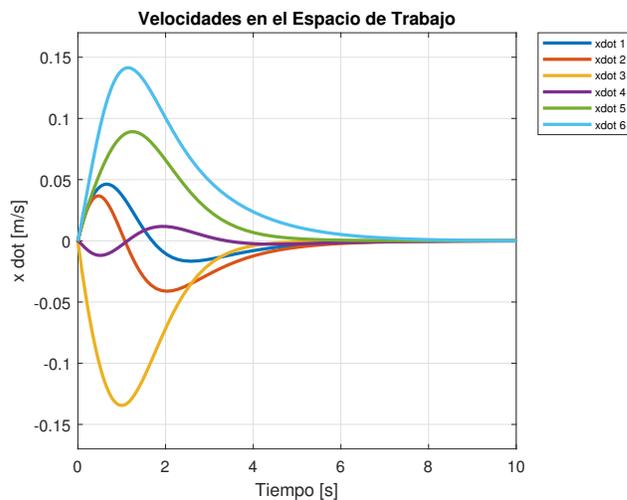
En este caso, se eligió el vector de fuerzas externas como

$$\tau_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0,5 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

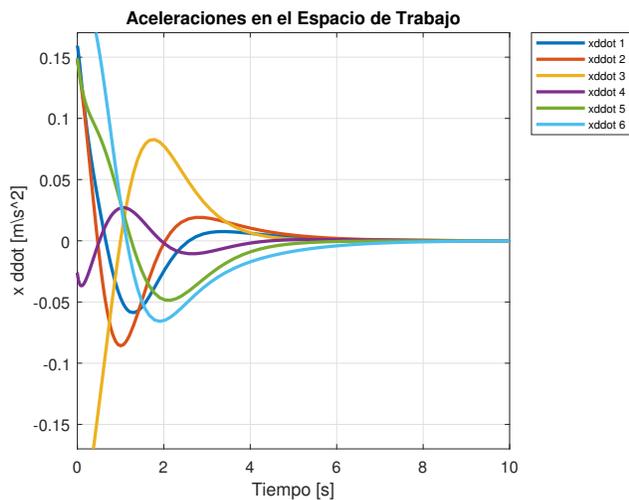
Se puede apreciar que en este caso se tiene una referencia en posición dinámica durante los primeros segundos. Al *Controlador de Impedancia* le toma alrededor de 6 segundos hacer que el Robot Esclavo llegue a la posición deseada. En este caso cabe aclarar algunos puntos. A diferencia de los casos anteriores, se tiene un modelo del entorno, por lo que en este caso el Controlador no está actuando únicamente en el subespacio de posición, sino también en el subespacio de fuerza, y a pesar de eso logra llegar a la posición deseada  $x_d$  en un tiempo razonable y sin sobretiros. Por otro lado, también se observa que las gráficas de velocidad y aceleración en el espacio de Tarea  $\dot{x}$  y  $\ddot{x}$  respectivamente convergen a cero en tiempo finito. Así mismo, se puede ver que el Error en Estado Estable tiende a cero. Finalmente se puede observar que la Ley de Control es suave durante toda la trayectoria y alcanza valores plausibles para el Robot Esclavo. En este caso a diferencia de las ocasiones anteriores, se dio un vector de fuerzas externas con entradas distintas de cero para corroborar que el controlador compense de manera correcta esta situación, obteniéndose al final una respuesta satisfactoria.



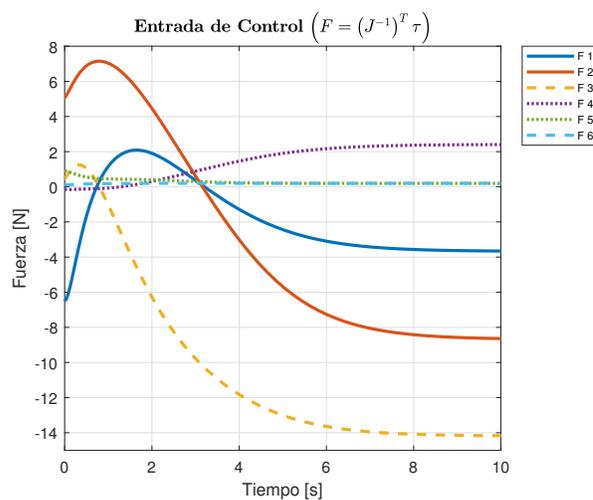
(a) Referencia y Salida Espacio de Trabajo



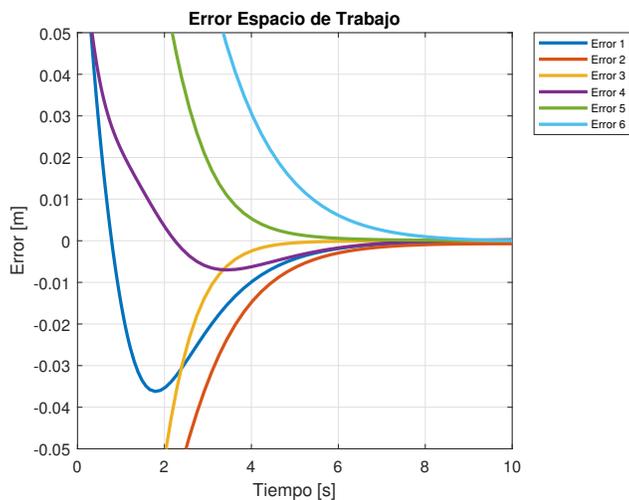
(b) Velocidades en el Espacio de Trabajo



(c) Aceleraciones en el Espacio de Trabajo



(d) Fuerzas



(e) Error

Figura 5.5: Respuesta Controlador de Impedancia Robot Esclavo Espacio de Trabajo



# Capítulo 6

## Conclusiones

En el presente Trabajo de Tesis se desarrolló todo el proceso de Modelado Matemático y Control en Robótica; empezando por la creación de diagramas cinemáticos, el desarrollo de los modelos de Cinemática Directa, Cinemática Inversa, Cinemática diferencial, Dinámica y control. En el caso del robot redundante, se tuvo que diseñar un algoritmo híbrido para la cinemática inversa, el cual tiene una parte analítica (cerrada), y un refinamiento numérico mediante el algoritmo de Levenberg-Marquardt (Mínimos Cuadrados Amortiguados). Este algoritmo se pensó de esta manera para minimizar el costo computacional de la unidad de procesamiento, ya que generalmente el algoritmo numérico ocupa muchos recursos debido al gran número de iteraciones que se tienen que hacer para llegar al resultado; al hacer este híbrido, se calcula una solución aproximada, y posteriormente se realiza el refinamiento numérico con un pequeño número de iteraciones. Para el propósito de corroborar físicamente el funcionamiento de la cinemática inversa, se desarrolló el simulador en VRML, el cual tiene conexión con MATLAB, por lo que además de revisar la precisión mediante las matrices de Transformación Homogénea, también se pudo corroborar que la posición deseada fuese plausible para el Robot Físico.

En cuanto al modelo dinámico de ambos robots, se tuvo que buscar un método alternativo para computar el vector de aceleración de Coriolis, ya que para robots con más de 4 grados de libertad, es muy costoso computacionalmente computar los símbolos de Christoffel, por lo que en su lugar se utilizó el método explicado en [6], de tal manera que se pudieron correr los modelos de ambos robots realizados con un procesador *intel i7* de séptima generación. Adicionalmente, para el modelo dinámico en el espacio de tarea del robot redundante, se siguió con la metodología descrita en [45], la cual requiere la descomposición del espacio articular en el espacio de tarea asociado con la matriz Jacobiana y su complemento ortogonal, esto se puede ver en la introducción del parámetro  $\Gamma$  en el modelo. Por otro lado, para ambos modelos dinámicos en el espacio de tarea se

usaron los conceptos de la matriz Jacobiana Analítica y su derivada temporal.

La simulación de los Modelos Dinámicos de ambos robots sigue el siguiente proceso:

1. Se Calcula la Cinemática Directa y la Cinemática Diferencial.
2. Posteriormente con los modelos Cinemáticos calculados, se calcula el Modelo Dinámico Inverso, mediante el cual se obtienen la Matriz de Masa, el Vector de Aceleración de Coriolis, el Vector de Gravedad y el Vector de Torques Articulares.
3. Ahora se calcula el Modelo Dinámico Directo con los parámetros obtenidos del Modelo Dinámico Inverso, esto se hace para obtener las variables articulares  $q$ .
4. En el caso de los modelos en el Espacio de Tarea, adicionalmente a esto se hacen las transformaciones descritas en el Apéndice B y se obtiene la Dinámica Directa para obtener las variables de posición en el espacio de Tarea  $x$ .

Al realizar la simulación de los modelos dinámicos de ambos robots, se puede ver que para una referencia dada, la salida de la Dinámica Directa  $q$  en el espacio articular ó  $x$  en el espacio de Tarea, trata de llegar a la referencia deseada, incluso si esta es cambia en el tiempo, por lo que de esta manera se corroboró el buen funcionamiento y precisión de los modelos. Cuando se hicieron estas pruebas, se puede notar un retardo en las variables articulares de los robots  $q$  ó  $x$  (dependiendo si se trabaja en el Espacio Articular o el Espacio de Tarea) con respecto a la referencia deseada  $q_d$  ó  $x_d$ . Esto es resultado de que en esas primeras simulaciones no se tiene una Ley de Control para los Robots.

Posteriormente se simularon tres leyes de control diferentes

1. Controlador PD con Compensación Gravitacional en el Espacio Articular
2. Controlador PD con Compensación Gravitacional en el Espacio de Tarea
3. Controlador PD con Compensación mediante Redes Neuronales

Al comparar estas tres leyes de control, se puede observar que el *Controlador PD con Compensación Gravitacional en el Espacio Articular* tiene un mejor desempeño que su contraparte en el *Espacio de Tarea* y el *Controlador PD con Compensación mediante Redes Neuronales*. En el caso de la primera se puede ver que el Error en Estado Estable es muy pequeño, prácticamente 0, sin embargo, específicamente en el caso del Controlador PD con Compensación Gravitacional para el Robot Esclavo, a pesar de que este Error en Estado Estacionario tiende a 0, no llega a serlo, sino que se queda en una vecindad cercana. En ambos casos la Ley de Control adopta valores

plausibles para los manipuladores. Por otro lado, el tiempo que tarda el Controlador PD en el Espacio Articular en alcanzar los valores articulares deseados  $q_d$  es menor al tiempo que tarda su contraparte en el Espacio de Tarea en alcanzar las posiciones deseadas  $x_d$ . El *Controlador PD con Compensación mediante Redes Neuronales* tiene un pequeño sobretiro en las variables articulares  $q$ , tanto en el Robot Maestro como en el Robot Esclavo, aunque al cabo de alrededor de 6 segundos en ambos casos se logra llegar al valor  $q_d$  deseado. Por otro lado, se puede ver que la señal de aceleración para este controlador en ambos robots es más ruidosa que en el caso de su contraparte con Compensación Gravitacional, sin embargo, al cabo de los 10 segundos que tarda la simulación esta señal logra converger a un valor cercano a cero. La Ley de Control  $\tau$  en el caso del Controlador PD con Compensación por Redes Neuronales se ve con variabilidad en un inicio, sin embargo al cabo de 8 segundos esta logra estabilizarse en un valor, esto se debe a que después de ese tiempo, el Control tiene una corrección muy pequeña por hacer. En los tres casos el Controlador logra su objetivo y lleva al sistema a los valores de posición deseados, tanto en el Espacio Articular como en el Espacio de Tarea. En este trabajo se usó como función de activación  $\tanh(x)$  para la Red Neuronal, esto debido a que es una función centrada en cero, por lo que para valores en esa vecindad, las neuronas seguirán teniendo un buen funcionamiento. Cabe destacar que la red neuronal utilizada es de una sola capa, por lo que probablemente si se agregara una segunda capa, la compensación  $\hat{W}\sigma(x)$  podría aproximar de una mejor manera el término  $G - f$ .

El control de impedancia es solamente un esquema de control de posición con ajustes hechos para controlar las fuerzas de contacto. Se comandan posiciones y las impedancias se ajustan para obtener una respuesta de fuerza apropiada. El control de impedancia se usa a lo largo del subespacio de control de posición. El entorno se modela como un sistema masa-resorte-amortiguador de segundo orden y a partir de ahí se ajustan las ganancias del controlador de impedancia para tener la respuesta deseada. De acuerdo con los experimentos realizados para este trabajo, se puede ver como este controlador, tiene una respuesta sin ningún tipo de sobreimpulso, y alcanza la referencia en un tiempo finito. Se puede ver que a pesar de haber hecho el experimento con un torque externo distinto de cero afectando al Robot Esclavo, el controlador de impedancia pudo compensarlo y llegar a la respuesta deseada.

Al comparar la respuesta de todos los controladores, se puede ver que la respuesta más rápida se tuvo del Controlador PD con Compensación Gravitacional en el Espacio Articular, aunque cabe destacar que este es un controlador únicamente de posición, a diferencia del Controlador de Impedancia que también hace control de fuerza.

## 6.1. Trabajo a Futuro

Dado el alcance de este trabajo de Tesis y su estado actual se sugieren los siguientes puntos como Trabajo a Futuro:

- Implementar un Lazo de Control de Fuerza del Robot Esclavo al Robot Maestro, de tal manera que el Robot Maestro pueda "*sentir*" el entorno con el que tenga contacto el Robot Esclavo.
- Implementar una Ley de Control de Impedancia Híbrida para el Robot Esclavo, de tal manera que se pueda tener mayor capacidad de decisión sobre que grados de libertad se desea controlar mediante el subespacio de posición y que grados de libertad mediante el subespacio de fuerza.
- Hacer la implementación de los Controladores en los Robots Físicos.
- Implementar un Esquema de Control mediante Redes Neuronales Dinámicas.
- Trabajar en una Ley de Control que involucre también los retrasos a los que puede estar sometido el sistema de Teleoperación.

# Apéndice A

## Marco Teórico de Cinemática de Cuerpo Rígido

### A.1. Cadenas Cinemáticas

Para propósitos de análisis cinemático, se puede pensar que un robot es un conjunto de eslabones rígidos conectados mediante articulaciones.

Supóngase un robot de  $n + 1$  eslabones numerados de 0 a  $n$ . Las articulaciones se numeran de 1 a  $n$ , y la  $i$ -ésima articulación es el punto en el espacio donde se conectan los eslabones  $i - 1$  e  $i$ . Se denomina a la  $i$ -ésima variable articular por  $q_i$ . A continuación se agrega un referencial coordinado a cada eslabón.

Supóngase que  $A_i$  es la matriz homogénea que transforma las coordenadas de un punto del referencial  $i$  al  $i - 1$ . Si se asume que todas las articulaciones son rotacionales o prismáticas, la matriz  $A_i$  queda en función de una sola variable articular, es decir

$$A_i = A_i(q_i)$$

La matriz homogénea que transforma las coordenadas de un punto del referencial  $j$  al referencial  $i$  se denomina por convención **Matriz de Transformación** y se denotará por  $T_i^j$ .

La posición de cualquier punto en el efector final, expresada en el referencial  $n$ , es una constante independiente de la configuración del robot. Se denota la posición y orientación del efector final con respecto al referencial inercial mediante un vector  $\mathbf{d}_0^n$  y una matriz de rotación  $\mathbf{R}_0^n$  respectivamente, y se define la matriz homogénea

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^n & \mathbf{d}_0^n \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces la posición y orientación del efector final en el referencial inercial o base están dadas por

$$\mathbf{T}_0^n = A_1(q_1) \dots A_n(q_n)$$

Cada transformación homogénea  $A_i$  es de la forma

$$A_i = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{i-1}^i & \mathbf{d}_{i-1}^i \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

## A.2. Representación Denavit-Hartenberg

Una convención usada para seleccionar los referenciales en robótica es la convención Denavit-Hartenberg. En esta convención cada transformación homogénea  $A_i$  es representada como un producto de cuatro transformaciones básicas

$$\begin{aligned} A_i &= Rot(z, \theta) Tras(z, d) Tras(x, a) Rot(x, \alpha) \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i) \sin(\alpha_i) & a_i \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i) \sin(\alpha_i) & a_i \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Los diversos parámetros en A.1 son:

1.  $a_i$ : Distancia de traslación a lo largo de  $x_i$  (desde el eje  $z_{i-1}$  hasta  $\mathbf{O}_i$ ).
2.  $\alpha_i$ : Ángulo de rotación sobre  $x_i$  (ángulo entre el eje  $z_{i-1}$  y  $z_i$ ).
3.  $d_i$ : Distancia de traslación a lo largo de  $z_{i-1}$  (desde  $\mathbf{O}_{i-1}$  hasta el eje  $x_i$ ).

4.  $\theta_i$ : Ángulo de rotación sobre  $z_{i-1}$  (ángulo entre el eje  $x_{i-1}$  y  $x_i$ ).

Una matriz homogénea puede ser caracterizada por seis parámetros (tres de posición y tres de orientación). En la representación Denavit-Hartenberg solo hay cuatro parámetros; para lograr esto deben seguirse dos reglas

1. El eje  $x_i$  debe ser perpendicular al eje  $z_{i-1}$
2. El eje  $x_i$  debe intersecar al eje  $z_{i-1}$

Se tienen tres casos para la colocación del origen de los referenciales de acuerdo a los ejes  $z_i$  y  $z_{i-1}$ .

1. No coplanares:  $x_i$  es la única línea perpendicular a ambos ejes con mínima norma.
2. Coplanares y Paralelos: Existen una infinidad de líneas normales a estos ejes con mínima norma.  $\mathbf{O}_i$  se coloca de tal manera que  $x_i$  interseque con una o ambas articulaciones.
3. Coplanares e Intersecados:  $x_i$  se elige normal al plano formado por los ejes  $z_i$  y  $z_{i-1}$ .  $\mathbf{O}_i$  se coloca en la intersección.

### A.3. Solución de la Cinemática Inversa en Forma Cerrada

Dada una posición y orientación deseada del efector final y los parámetros geométricos de los eslabones con respecto al referencial inercial, el problema cinemático inverso de posición es encontrar una solución articular de forma cerrada para posicionar al efector final con la posición y orientación deseada. Una solución articular se dice *cerrada* si las variables articulares desconocidas pueden ser resueltas de manera explícita [51]. En diversos casos las últimas tres articulaciones no se intersecan en un punto, entonces obtener una solución cerrada se vuelve difícil o incluso imposible.

En algunos casos se puede notar que no son los ejes de las tres últimas articulaciones los que se intersecan, sino los ejes de las tres primeras; esto significa que si se ve al problema cinemático inverso con las articulaciones en orden invertido, esto es, tomando el referencial inercial sujeto al efector final, y refiriendo el referencial colocado en el eslabón base a este último, el nuevo vector de posición denotado como  $\mathbf{p}'$ , está en función de únicamente las últimas tres variables articulares, es decir,  $\theta_4$ ,  $\theta_5$  y  $\theta_6$  (suponiendo un robot de 6 grados de libertad).

Para resolver el problema cinemático inverso de esta manera, se toma

$$T' = T^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{n} & \mathbf{a} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = (A_1 \dots A_n)^{-1} = A_n^{-1} \dots A_1^{-1} = A_n^0$$

La cinemática inversa del robot manipulador Robai Cyton Gamma 1500 se obtuvo mediante este método. En su apartado se describirá más a fondo el procedimiento.

## A.4. Mínimos Cuadrados Amortiguados (Levenberg-Marquardt)

Se conocen soluciones cerradas al problema cinemático inverso para manipuladores no redundantes, pero para los redundantes o no redundantes con geometrías complicadas, este problema puede ser resuelto iterativamente [54].

A la fecha, soluciones a la cinemática inversa no han encontrado un uso extendido debido a tres razones:

1. Los manipuladores no redundantes con soluciones al problema cinemático inverso cerradas son suficientes para aplicaciones variadas.
2. Los métodos existentes para computar las soluciones de cinemática inversa con la matriz Jacobiana no son eficientes.
3. Estos métodos tienen dificultades numéricas cerca de configuraciones donde la matriz Jacobiana está mal condicionada (singularidades cinemáticas).

A continuación se expondrá el método de Levenberg-Marquardt para la solución de la cinemática inversa numérica.

Este método evita varios problemas que tiene la pseudoinversa en las singularidades y puede dar un método numéricamente estable en la selección de  $\Delta\theta$  [7].

Teóricamente se fundamenta en lo siguiente. En vez de simplemente encontrar el vector mínimo  $\Delta\theta$  que da una mejor solución a

$$\Delta\theta = \alpha J^T \vec{\mathbf{e}}$$

donde

$$\alpha = \frac{\langle \vec{\mathbf{e}}, J J^T \vec{\mathbf{e}} \rangle}{\langle J J^T \vec{\mathbf{e}}, J J^T \vec{\mathbf{e}} \rangle}$$

se encuentra el valor de  $\Delta\theta$  que minimice la cantidad

$$\|J\Delta\theta - \vec{\mathbf{e}}\|^2 + \lambda^2 \|\Delta\theta\|^2$$

donde  $\lambda \in \mathbb{R}$  es una constante de amortiguamiento distinta de cero. Esto es equivalente a minimizar la cantidad

$$\left\| \begin{pmatrix} J \\ \lambda I \end{pmatrix}^T \Delta\theta - \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{e}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right\|$$

La ecuación normal es

$$\begin{pmatrix} J \\ \lambda I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} J \\ \lambda I \end{pmatrix} \Delta\theta = \begin{pmatrix} J \\ \lambda I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{e}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Esto puede ser reescrito como

$$(J^T J + \lambda^2 I) \Delta\theta = J^T \vec{\mathbf{e}}$$

Se puede demostrar que la ecuación  $J^T J + \lambda^2 I$  es no singular [7]. Entonces la solución es

$$\Delta\theta = (J^T J + \lambda^2 I)^{-1} J^T \vec{\mathbf{e}} \quad (\text{A.1})$$

Se puede demostrar que [7]

$$(J^T J + \lambda^2 I)^{-1} J^T = J^T (J^T J + \lambda^2 I)^{-1}$$

Entonces

$$\Delta\theta = J^T (J^T J + \lambda^2 I)^{-1} \vec{\mathbf{e}} \quad (\text{A.2})$$

La ventaja de la ecuación (A.2) es que la matriz que se va a invertir es de menor tamaño a la de la ecuación (A.1).

La constante de amortiguamiento debe ser lo suficientemente grande para que las soluciones para  $\Delta\theta$  se comporten de manera adecuada cerca de las singularidades, pero si se elige muy grande la tasa de convergencia es muy lenta.



## Apéndice B

# Marco Teórico de Dinámica de Cuerpo Rígido

### B.1. Euler-Lagrange

Del *Teorema de Energía Cinética de König* se sabe que la *Energía Cinética* de un Sistema de Partículas en un referencial inercial es la suma de dos Términos. El Primero es la Energía Cinética del Centro de Masa, entendiéndose como este el punto donde se concentra toda la masa del sistema. El Segundo es la Energía Cinética en el Centro de Masa del Sistema, relativo al movimiento de las partículas del sistema alrededor del centro de masa, es decir

$$T = \frac{1}{2}m (v_p^T v_p) + \frac{1}{2}\omega^T I_p \omega + v_p^T (\omega \times mr_G)$$

Si se considera el Tensor de Inercia de cada eslabón con respecto al centro de gravedad de cada eslabón

$$T = \frac{1}{2}m (v_G^T v_G) + \frac{1}{2}\omega^T I_G \omega \quad (\text{B.1})$$

Si se relacionan las velocidades lineales y angulares de cada uno de los  $n$  eslabones con las velocidades articulares y considerando la energía cinética total

$$T = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{2}m_i \{J_{v_i} \dot{q}\}^T \{J_{v_i} \dot{q}\} + \frac{1}{2} \{J_{\omega_i} \dot{q}\}^T \{R_0^i I_{G_i} R_i^0\} \{J_{\omega_i} \dot{q}\} \right] \quad (\text{B.2})$$

1. De esta manera los vectores de velocidad quedan descritos con respecto al referencial base, y el Tensor de Inercia es constante en el referencial de cada eslabón. De la ecuación B.2 las

variables  $J_{v_i}$  y  $J_{\omega_i}$  representan las componentes lineales y angulares del Jacobiano de cada eslabón respectivamente. Desarrollando B.2

$$\begin{aligned}
 T &= \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{2} m_i \{J_{v_i} \dot{q}\}^T \{J_{v_i} \dot{q}\} + \frac{1}{2} \{J_{\omega_i} \dot{q}\}^T \{R_0^i I_{G_i} R_i^0\} \{J_{\omega_i} \dot{q}\} \right] \\
 T &= \frac{1}{2} \dot{q}^T \sum_{i=1}^n \left[ m_i \{J_{v_i}\}^T \{J_{v_i}\} + \{J_{\omega_i}\}^T \{R_0^i I_{G_i} R_i^0\} \{J_{\omega_i}\} \right] \dot{q} \\
 T &= \frac{1}{2} \dot{q}^T \sum_{i=1}^n \left( \begin{bmatrix} J_{v_i}^T & J_{\omega_i}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_i & 0 \\ 0 & R_0^i I_{G_i} R_i^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{v_i} \\ J_{\omega_i} \end{bmatrix} \right) \dot{q} \\
 T &= \frac{1}{2} \dot{q}^T \sum_{i=1}^n \left( J_i^T \begin{bmatrix} m_i & 0 \\ 0 & R_0^i I_{G_i} R_i^0 \end{bmatrix} J_i \right) \dot{q}
 \end{aligned}$$

Si se hace

$$M(q) = \sum_{i=1}^n \left( J_i^T \begin{bmatrix} m_i & 0 \\ 0 & R_0^i I_{G_i} R_i^0 \end{bmatrix} J_i \right)$$

Entonces

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}$$

Recordando que el Tensor de Inercia es una matriz simétrica, la matriz de masa  $M(q)$  es también simétrica. Dado que la Energía Cinética es no negativa y cero si y solo si hay movimiento, entonces la matriz de masa debe ser Positiva Definida; lo anterior implica que

$$\det(M(q)) \neq 0$$

siendo  $M(q)$  invertible.

En la gran mayoría de los sistemas robóticos la única energía potencial presente es la debida a la gravedad, tal que

$$W(q) = \sum_{i=1}^n m_i g^T r_{G_i}(q)$$

donde  $r_{G_i}(q)$  está expresado en el referencial base.

El Lagrangiano está dado por

$$L = T - W = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - W(q)$$

talque

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} L = \frac{1}{2} (M(q) + M^T(q)) \dot{q} = M(q) \dot{q}$$

En forma alternativa, para cada velocidad angular

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} L = \sum_j m_{k,j} \dot{q}_j$$

talque

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} L = \sum_j \left( m_{k,j} \ddot{q}_j + \frac{d}{dt} (m_{k,j}) \dot{q}_j \right) = \sum_j m_{k,j} \ddot{q}_j + \sum_j \frac{d}{dt} (m_{k,j}) \dot{q}_j \quad (\text{B.3})$$

sin embargo

$$\frac{d}{dt} (m_{k,j}) = \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} (m_{k,j}) \dot{q}_i \quad (\text{B.4})$$

Por lo que sustituyendo B.4 en B.3

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} L = \sum_j m_{k,j} \ddot{q}_j + \sum_j \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} (m_{k,j}) \dot{q}_i \dot{q}_j = \sum_j m_{k,j} \ddot{q}_j + \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial q_i} (m_{k,j}) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

Por otro lado, también se puede expresar el Lagrangiano de la siguiente manera

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (m_{i,j}) \dot{q}_i \dot{q}_j - W(q) \quad (\text{B.5})$$

Derivando B.5 con respecto a las coordenadas generalizadas

$$\frac{\partial}{\partial q_k} L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial q_k} (m_{i,j}) \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{\partial}{\partial q_k} W(q)$$

Por las *Ecuaciones de Euler-Lagrange* se tiene

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} L - \frac{\partial}{\partial q_k} L = Q_k \quad (\text{B.6})$$

Sustituyendo en B.6

$$\begin{aligned} \sum_j m_{k,j} \ddot{q}_j + \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial q_i} (m_{k,j}) \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial q_k} (m_{i,j}) \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial q_k} W(q) &= \tau_k \\ \sum_j m_{k,j} \ddot{q}_j + \left( \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial q_i} (m_{k,j}) - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial q_k} (m_{i,j}) \right) \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial q_k} W(q) &= \tau_k \end{aligned}$$

Recordemos la siguiente identidad

$$\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial q_i} (m_{k,j}) \dot{q}_i \dot{q}_j = \sum_{i,j} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial q_i} (m_{k,j}) - \frac{\partial}{\partial q_j} (m_{k,i}) \right) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

Tal que

$$\sum_{i,j} \left( \frac{\partial}{\partial q_i} (m_{k,j}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_k} (m_{i,j}) \right) = \sum_{i,j} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial q_i} (m_{k,j}) + \frac{\partial}{\partial q_j} (m_{k,i}) - \frac{\partial}{\partial q_k} (m_{i,j}) \right) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

El término

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial q_i} (m_{k,j}) + \frac{\partial}{\partial q_j} (m_{k,i}) - \frac{\partial}{\partial q_k} (m_{i,j}) \right)$$

se conoce como los Símbolos de Christoffel. En lo subsecuente se denotarán mediante  $c_{i,j,k}$ , por lo que

$$\sum_j m_{k,j} \ddot{q}_j + \sum_{i,j} c_{i,j,k} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial q_k} W(q) = \tau_k$$

Nótese que

$$c_{i,j,k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial q_i} (m_{k,j}) + \frac{\partial}{\partial q_j} (m_{k,i}) - \frac{\partial}{\partial q_k} (m_{i,j}) \right) = c_{j,i,k}$$

por lo que el cálculo de los símbolos de Christoffel se reduce a la mitad. A continuación se define

$$\frac{\partial}{\partial q_k} W(q) = g_k$$

Talque

$$\sum_j m_{k,j} \ddot{q}_j + \sum_{i,j} c_{i,j,k} \dot{q}_i \dot{q}_j + g_k = \tau_k$$

Agrupando las  $k$  ecuaciones en forma matricial

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) = Q$$

## B.2. Una Nueva Factorización de la Matriz de Coriolis

El cálculo de los *Símbolos de Christoffel* para configuraciones complejas de robots requiere software de matemáticas simbólicas y su uso hace que la inherente estructura dependiente en la matriz de masa de la matriz de Coriolis no sea clara. La factorización que se describirá satisface la propiedad de *anti-simetría* importante para el control, y es única en el sentido de que está dada explícitamente en función de las matrices cinemáticas del manipulador y sus derivadas temporales.

Las fuerzas Centrípetas/Coriolis siempre están presentes en manipuladores con más de una articulación rotacional. En mecánica clásica se denominan pseudo-fuerzas las cuales surgen debido al hecho de que las fuerzas y torque son aplicadas en sistemas coordenados rotacionales, no-inerciales. Las fuerzas centrípetas surgen debido a la rotación del eslabón relativa a un sistema coordinado inercial y es proporcional a  $\dot{q}_i^2$ , donde  $\dot{q}_i$  denota el  $i$ -ésimo elemento del vector de velocidades generalizadas  $\dot{q}$ . Por otro lado, las fuerzas de Coriolis surgen como fuerzas de interconexión con otros eslabones y son proporcionales a  $\dot{q}_i\dot{q}_j$ .

A continuación se presenta el trabajo realizado por [6]. La matriz Centrípeta/Coriolis  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  no es única y es cuestión de elección. Esto es debido a que los términos cruzados de velocidades articulares en las fuerzas de Coriolis, pueden ser representados por diversas matrices  $C$ . La propiedad de anti-simetría es importante en diversos métodos de diseño de control, incluyendo el diseño de Lyapunov y establece que es posible expresar la matriz de Coriolis/Centrípeta tal que  $\dot{M} - 2C$  sea anti-simétrica, o equivalentemente  $\dot{M} = C + C^T$ .

La factorización se deriva de la siguiente manera. Primero se consideran las ecuaciones de movimiento de Newton-Euler (no recursivas) explícitas para un sistema de cuerpo rígido conectado. Este sistema es equiparado a las Ecuaciones Diferenciales de Euler-Lagrange Clásicas usando el principio del Trabajo Virtual, llegando a una factorización de forma cerrada la cual no satisface la propiedad de anti-simetría. Por último, se muestra cómo se recupera la propiedad de anti-simetría usando una simple modificación.

### B.2.1. Modelado por Newton-Euler

El momento lineal del  $i$ -ésimo eslabón es

$$\nu_{v_i} = m_i \dot{\mathbf{p}}_i = m_i \mathbf{J}_{v_i} \dot{\mathbf{q}}$$

donde  $\dot{\mathbf{p}}_i$  es la velocidad del centro de masa del eslabón  $i$  con respecto a un referencial inercial, y  $m_i$  es la masa del eslabón. El momento angular está dado por

$$\nu_{\omega_i} = I_i^r \omega_i = \mathbf{R}_i I_i \mathbf{R}_i^T \mathbf{J}_{\omega_i} \dot{\mathbf{q}}$$

donde la matriz de inercia  $I_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es constante simétrica positiva definida y las columnas de  $\mathbf{R}_i \in SO(3)$  son los ejes coordenados del referencial del eslabón  $i$  con respecto al referencial inercial. Las matrices  $\mathbf{J}_{v_i}, \mathbf{J}_{\omega_i}$  son las matrices cinemáticas que relacionan las velocidades angulares con las velocidades lineales del centro de masa del eslabón  $i$ . Las ecuaciones de Newton-Euler para el sistema completo pueden ser expresadas de la siguiente manera

$$\dot{\nu} = \sum \mathbf{F} = -\mathbf{G} + \tau_c + \tau$$

donde  $\nu \in \mathbb{R}^{6n}$  contiene los momentos lineales y angulares de todos los eslabones,

$$\nu = \left[ \nu_{v_1} \quad \dots \quad \nu_{v_n} \quad \nu_{\omega_1} \quad \dots \quad \nu_{\omega_n} \right]^T$$

La suma de las fuerzas y momentos  $\sum \mathbf{F}$  son particionados por conveniencia en fuerzas debidas a la gravedad  $G$ , la entrada de torque  $\tau$  y los torques de restricción  $\tau_c$  los cuales contienen los torques de interacción entre los eslabones. Removiendo el torque de restricción  $\tau_c$  resulta en las ecuaciones de movimiento de  $n$  cuerpos rígidos desacoplados.

El *momentum* total  $\nu$  se relaciona con las velocidades articulares por medio del Jacobiano Generalizado como

$$\nu = \mathcal{M}(\mathbf{q})\mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

donde  $\mathcal{M} = \text{blockdiag} \{m_1 I^{3 \times 3}, \dots, m_n I^{3 \times 3}, I_1^r, \dots, I_n^r\}$  y

$$\mathbf{J} = \left[ \mathbf{J}_{v_1}^T \quad \dots \quad \mathbf{J}_{v_n}^T \quad \mathbf{J}_{\omega_1}^T \quad \dots \quad \mathbf{J}_{\omega_n}^T \right]^T$$

La matriz de masa factorizada usando el Jacobiano Generalizado está dada por

$$M(q) = \mathbf{J}^T \mathcal{M} \mathbf{J}$$

### B.2.2. Trabajo Virtual

Es posible usar el principio del trabajo virtual para derivar el mapeo entre las fuerzas actuando en los *momentums* lineales y angulares del  $i$ -ésimo eslabón,  $\{\dot{\nu}_{v_i}, \dot{\nu}_{\omega_i}\}$  y los torques del espacio articular  $u$ . La relación está dada por

$$\tau_i = \mathbf{J}_i^T \mathbf{u} = \left[ \mathbf{J}_{v_i}^T \quad \mathbf{J}_{\omega_i}^T \right] \mathbf{u}$$

Factorizando las fuerzas para todos los eslabones del manipulador da el mapeo

$$\tau = \mathbf{J}^T \mathbf{u}$$

### B.2.3. La Derivación de la Factorización de la Matriz de Coriolis

**Proposición B.1.** *La matriz dada por la ecuación (B.7) es una factorización válida de la matriz de Coriolis/Centrípeta la cual satisface la propiedad de anti-simetría*

$$\mathbf{C}_s = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{J}_{v_i}^T \dot{\mathbf{J}}_{v_i} + \mathbf{J}_{\omega_i}^T \mathbf{R}_i I_i \mathbf{R}_i^T \dot{\mathbf{J}}_{\omega_i} + \mathbf{J}_{\omega_i}^T \dot{\mathbf{R}}_i I_i \mathbf{R}_i^T \mathbf{J}_{\omega_i} \quad (\text{B.7})$$

## B.3. Jacobiano Analítico

Si la posición y orientación del efector final están especificados en términos de un número mínimo de parámetros en el espacio de tarea es posible obtener la matriz Jacobiana por derivación directa de la ecuación de cinemática directa, es decir

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{p}_e \\ \dot{\phi}_e \end{pmatrix} = \mathbf{J}_a(q) \dot{q}$$

donde a la matriz  $\mathbf{J}_a(q) = \frac{\partial f}{\partial q}$  se le denomina *Jacobiano Analítico*.

La relación entre el Jacobiano Analítico y el Jacobiano Geométrico se expresa como

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & T(\phi_e) \end{pmatrix} = T_a(\phi_e) \mathbf{J}_a$$

donde  $T(\phi_e)$  es una *matriz de transformación* que depende del conjunto de parámetros particulares usados para representar la orientación del efector final.

Se puede reconocer fácilmente que los dos Jacobianos son diferentes en general, sin embargo coinciden en la parte de posición. Referente a su uso, el *Jacobiano Geométrico* se adopta cuando las cantidades físicas son de interés, mientras que el *Jacobiano Analítico* se adopta cuando las cantidades del espacio de tarea son de interés. Es posible pasar de un Jacobiano a otro, excepto cuando la matriz de transformación es singular, las orientaciones en que el determinante de  $T(\phi_e)$  son cero se llaman *representaciones singulares* de  $\phi_e$ .

## B.4. Elipsoides de Inercia

Si se asume que el momento de inercia de un cuerpo está determinado con respecto a un gran número de ejes a través de un punto fijo  $O$ , y que un punto  $Q$  ha sido trazado en cada eje a una distancia  $OQ = \frac{1}{\sqrt{I_{OL}}}$  de  $O$  [5]. El lugar de los puntos  $Q$  obtenidos forman una superficie como se ve en la Figura B.1.

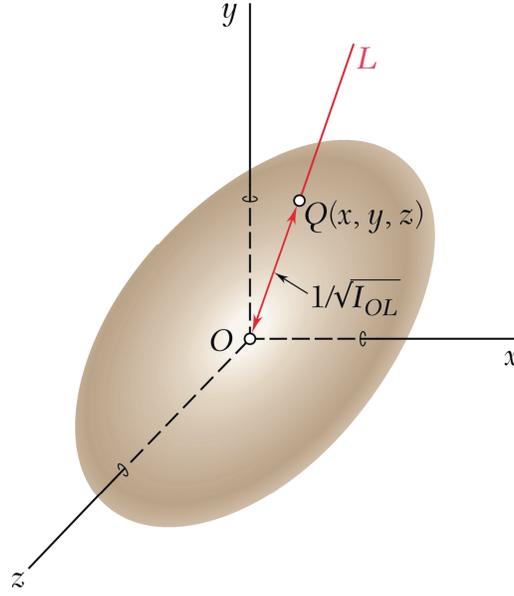


Figura B.1: Superficie formada por los puntos  $Q$ , tomado de [5]

La ecuación de tal superficie se puede obtener al sustituir  $\frac{1}{(OQ)^2}$  por  $I_{OL}$  en

$$\mathbf{I}_{OL} = I_x \lambda_x^2 + I_y \lambda_y^2 + I_z \lambda_z^2 - 2I_{xy} \lambda_x \lambda_y - 2I_{yz} \lambda_y \lambda_z - 2I_{zx} \lambda_z \lambda_x \quad (\text{B.8})$$

y después multiplicando ambos lados por  $(OQ)^2$ . Observando que

$$(OQ) \lambda_x = x$$

$$(OQ) \lambda_y = y$$

$$(OQ) \lambda_z = z$$

donde  $x, y, z$  denotan las coordenadas rectangulares de  $Q$ , se puede escribir

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy} xy - 2I_{yz} yz - 2I_{zx} zx = 1$$

La ecuación obtenida es la ecuación de una superficie cuadrática. Dado que el momento de inercia  $I_{OL}$  es diferente de cero, para cada eje  $OL$ , ningún punto  $Q$  puede estar a una distancia infinita de  $O$ , y se puede ver que la superficie cuadrática obtenida es la de un elipsoide. El elipsoide que define el momento de inercia del cuerpo con respecto a cualquier eje que cruce el punto  $O$  se llama *Elipsoide de Inercia* del Cuerpo en el punto  $O$ .

La ecuación B.8 representa los momentos de inercia a lo largo de los ejes  $x, y$  y  $z$ , y los productos de inercia del cuerpo a lo largo de los ejes  $xy, yz$  y  $xz$ .

## B.5. Modelo Dinámico en el Espacio de Trabajo

Cuando fuerzas externas adicionales del ambiente actúan en el efector final del manipulador, el modelo dinámico (en ausencia de fuerzas de fricción) es

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) = u + \mathbf{J}^T(q)f \quad (\text{B.9})$$

donde

$$f = \begin{pmatrix} \gamma \\ \mu \end{pmatrix}$$

es el vector de fuerzas generalizadas ( $m \times 1$ ) expresado en el referencial base,  $\gamma$  son las fuerzas lineales y  $\mu$  son los momentos angulares. Las fuerzas  $\mathbf{J}^T(q)f$  se toman con signo positivo ya que se ejercen desde el ambiente al efector final. En este caso se considerará solamente el caso donde  $m = n$ , y sin pérdida de generalidad,  $n = 6$ .

En lo siguiente se asumirá que no hay singularidades cinemáticas. La matriz cuadrada  $\mathbf{J}(q)$  es el *Jacobiano Geométrico* del manipulador.

$$v = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \mathbf{J}(q)\dot{q}$$

Haciendo referencia al Jacobiano Analítico, la ecuación de cinemática diferencial puede ser escrita de la forma

$$\dot{x} = \mathbf{J}_a(q)\dot{q} = T_a^{-1}(\phi_e)\mathbf{J}(q)\dot{q} \quad (\text{B.10})$$

donde se asume que no existen representaciones singulares de  $\phi_e$ .

Los dos conjuntos de fuerzas generalizadas  $f$  y  $f_a$  que desempeñan trabajo en  $v$  y  $\dot{x}$  respectivamente se relacionan por el principio del trabajo virtual

$$\mathbf{J}^T(q)f = \mathbf{J}^T(q)T_a^{-T}(\phi_e)f_a = \mathbf{J}_a^T(q)f_a$$

Entonces el modelo B.9 se puede reescribir como

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) = u + \mathbf{J}_a^T(q)f_a \quad (\text{B.11})$$

con un formato alternativo para el término de fuerzas externas.

Despejando  $\ddot{q}$

$$\ddot{q} = M^{-1}(q) (u + \tau_e - C(q, \dot{q}) - G(q)) \quad (\text{B.12})$$

Al derivar B.10 se obtiene

$$\ddot{x} = \mathbf{J}_a(q)\ddot{q} + \dot{\mathbf{J}}_a(q)\dot{q}$$

Despejando  $\ddot{q}$

$$\ddot{q} = \mathbf{J}_a^{-1}(q) (\ddot{x} - \dot{\mathbf{J}}_a(q)\dot{q}) \quad (\text{B.13})$$

Igualando B.12 y B.13

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_a^{-1}(q) (\ddot{x} - \dot{\mathbf{J}}_a(q)\dot{q}) &= M^{-1}(q) (u + \tau_e - C(q, \dot{q}) - G(q)) \\ \ddot{x} - \dot{\mathbf{J}}_a(q)\dot{q} &= \mathbf{J}_a(q)M^{-1}(q) (u + \tau_e - C(q, \dot{q}) - G(q)) \\ \ddot{x} &= \mathbf{J}_a(q)M^{-1}(q) (u + \tau_e - C(q, \dot{q}) - G(q)) + \dot{\mathbf{J}}_a(q)\dot{q} \\ M(q)\mathbf{J}_a^{-1}(q)\ddot{x} &= (u + \tau_e - C(q, \dot{q}) - G(q)) + M(q)\mathbf{J}_a^{-1}(q)\dot{\mathbf{J}}_a(q)\dot{q} \end{aligned}$$

$$\mathbf{J}_a^{-T}(q)M(q)\mathbf{J}_a^{-1}(q)\ddot{x} = \mathbf{J}_a^{-T}(q) (u + \tau_e - C(q, \dot{q}) - G(q)) + \mathbf{J}_a^{-T}(q)M(q)\mathbf{J}_a^{-1}(q)\dot{\mathbf{J}}_a(q)\dot{q} \quad (\text{B.14})$$

Sea

$$\bar{M}_x(q) = \mathbf{J}_a^{-T}(q)M(q)\mathbf{J}_a^{-1}(q) \quad (\text{B.15})$$

Sustituyendo B.15 en B.14

$$\bar{M}_x(q)\ddot{x} = \mathbf{J}_a^{-T}(q) (u + \tau_e - C(q, \dot{q}) - G(q)) + \bar{M}_x(q)\dot{\mathbf{J}}_a(q)\dot{q}$$

Dado que

$$\begin{aligned} x &= f(q) \\ \dot{x} &= \mathbf{J}_a(q)\dot{q} \end{aligned}$$

entonces

$$\dot{q} = \mathbf{J}_a^{-1}(q)\dot{x} \quad (\text{B.16})$$

Por otro lado, sea

$$C(q, \dot{q}) = h(q, \dot{q})\dot{q}$$

Entonces

$$\bar{M}_x(q)\ddot{x} = \mathbf{J}_a^{-T}(q) (u + \tau_e - h(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)) + \bar{M}_x(q)\dot{\mathbf{J}}_a(q)\dot{q} \quad (\text{B.17})$$

Sustituyendo (B.16) en (B.17)

$$\bar{M}_x(q)\ddot{x} = f + \mathbf{f}_a + \left( \bar{M}_x(q)\dot{\mathbf{J}}_a(q) - \mathbf{J}_a^{-T}(q)h(q, \dot{q}) \right) \mathbf{J}_a^{-1}(q)\dot{x} - G_x(q)$$

$$\bar{M}_x(q)\ddot{x} + \left( \mathbf{J}_a^{-T}(q)h(q, \dot{q}) - \bar{M}_x(q)\dot{\mathbf{J}}_a(q) \right) \mathbf{J}_a^{-1}(q)\dot{x} + G_x(q) = f + \mathbf{f}_a$$

Finalmente se obtiene

$$\bar{M}_x(q)\ddot{x} + \bar{C}_x(q, \dot{q})\dot{x} + G_x(q) = \left( \mathbf{J}_a^{-1}(q) \right)^T u + f_a \quad (\text{B.18})$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{M}_x(q) &= \left( \mathbf{J}_a^{-1}(q) \right)^T M(q) \left( \mathbf{J}_a(q) \right)^{-1} = \left( \mathbf{J}_a(q) M^{-1}(q) \mathbf{J}_a^T \right)^{-1} \\ \bar{C}_x(q, \dot{q}) &= \left( \mathbf{J}_a^{-1}(q) \right)^T h(q, \dot{q}) \left( \mathbf{J}_a(q) \right)^{-1} - \bar{M}_x(q) \dot{\mathbf{J}}_a(q) \left( \mathbf{J}_a(q) \right)^{-1} \\ G_x(q) &= \left( \mathbf{J}_a^{-1}(q) \right)^T G(q) \end{aligned}$$

Nótese que la dependencia funcional de los términos no lineales en la ecuación (B.18) es aún en  $q, \dot{q}$  y no en las nuevas variables de estado  $x, \dot{x}$ . Desde el punto de vista computacional (propósitos de simulación) es más ventajoso mantener la dependencia explícita de las variables articulares.

### B.5.1. Modelo Dinámico de Robots Redundantes

En el caso de robots redundantes, el mapeo de velocidades del espacio de tarea al espacio articular no se puede obtener solamente mediante la inversión del Jacobiano. A continuación se explica la metodología descrita en [45] para el Modelado Dinámico de Robots Redundantes.

La proyección de fuerzas del espacio operacional y su complemento ortogonal en el espacio de configuración se define mediante las matrices  $\mathbf{J}_a^{-T}(q)$  y  $\Gamma^T(q)$  respectivamente.

Sea  $\tau_x = \mathbf{J}_a^T(q)f$  el vector de fuerzas en el espacio articular generado por las fuerzas en el espacio de tarea  $f \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ . La fuerza en el espacio articular se puede expresar como

$$\tau = \mathbf{J}_a^T(q)f + \Gamma^T(q)\tau_0 \quad (\text{B.19})$$

Sustituyendo (B.19) y (B.9) en  $\ddot{x} = \mathbf{J}_a(q)\ddot{q} + \dot{\mathbf{J}}_a(q)\dot{q}$

$$\ddot{x} = \mathbf{J}_a(q)M^{-1}(q) [\mathbf{J}_a^T(q)f + \Gamma^T(q)\tau_0 + \tau_e - C(q, \dot{q}) - G(q)] + \dot{\mathbf{J}}_a(q)\dot{q}$$

$$\bar{M}_x(q)\ddot{x} = \bar{M}_x(q)\mathbf{J}_a(q)M^{-1}(q) [\mathbf{J}_a^T(q)f + \Gamma^T(q)\tau_0 + \tau_e - C(q, \dot{q}) - G(q)] + \bar{M}_x(q)\dot{\mathbf{J}}_a(q)\dot{q}$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_x(q)\ddot{x} + \bar{M}_x(q) \left[ \mathbf{J}_a(q)M^{-1}(q)C(q, \dot{q}) - \dot{\mathbf{J}}_a(q)\dot{q} \right] + \bar{M}_x(q)\mathbf{J}_a(q)M^{-1}(q)G(q) = \\ \bar{M}_x(q)\mathbf{J}_a(q)M^{-1}(q) [\Gamma^T(q)\tau_0] + f + f_a \end{aligned}$$

$$\bar{M}_x(q)\ddot{x} + \mu_x(q, \dot{q}) + g_x(q) = \bar{M}_x(q)\mathbf{J}_a(q)M^{-1}(q)\Gamma^T(q)\tau_0 + f + f_a \quad (\text{B.20})$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{M}_x(q) &= (\mathbf{J}_a^{-1}(q))^T M(q)\mathbf{J}_a^{-1}(q) = (\mathbf{J}_a(q)M^{-1}(q)\mathbf{J}_a^T(q))^{-1} \\ \mu_x(q, \dot{q}) &= \bar{M}_x(q) \left[ \mathbf{J}_a(q)M^{-1}(q)C(q, \dot{q}) - \dot{\mathbf{J}}_a(q)\dot{q} \right] \\ g_x(q) &= \bar{M}_x(q)\mathbf{J}_a(q)M^{-1}(q)G(q) \end{aligned}$$

En este caso  $\bar{M}_x(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  se puede interpretar como la matriz de energía cinética en el espacio de tarea,  $\mu_x(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  es la proyección de las fuerzas centrífuga y de Coriolis y  $g_x(q) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  es la proyección de las fuerzas gravitacionales. El término  $\bar{M}_x(q)\mathbf{J}_a(q)M^{-1}(q)\Gamma^T(q)\tau_0$  son las fuerzas de interacción de movimiento acoplado en el espacio de tarea y su espacio complemento ortogonal. Para el desacoplamiento dinámico,  $\tau_0$  no debe influir aceleración en el espacio de tarea, por lo que se debe de satisfacer la siguiente igualdad

$$\mathbf{J}_a(q)M^{-1}(q)\Gamma^T\tau_0 = 0 \quad (\text{B.21})$$

Para satisfacer B.21, la estructura de la matriz  $\Gamma$  debe ser seleccionada como una matriz de proyección del espacio nulo, es decir

$$\Gamma = (I - \mathbf{J}_a^\dagger(q)\mathbf{J}_a(q)) \quad (\text{B.22})$$

En este caso  $\mathbf{J}_a^\dagger(q)$  es la pseudoinversa derecha del Jacobiano  $\mathbf{J}_a(q)$ . Sustituyendo B.22 en B.21 se llega a la estructura de la pseudoinversa  $\mathbf{J}_a^\dagger(q)$  asegurando el desacoplamiento dinámico

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_a(q)M^{-1}(q)\left(I - \mathbf{J}_a^T(q)\mathbf{J}_a^{\dagger T}(q)\right)\tau_0 &= 0 \\ \mathbf{J}_a(q)M^{-1}(q)\tau_0 &= \mathbf{J}_a(q)M^{-1}(q)\mathbf{J}_a^T(q)\mathbf{J}_a^{\dagger T}(q)\tau_0 \\ \mathbf{J}_a^{-T}(q)M(q)\mathbf{J}_a^{-1}(q)\mathbf{J}_a(q)M^{-1}(q)\tau_0 &= \mathbf{J}_a^{\dagger T}(q)\tau_0 \\ \bar{M}_x(q)\mathbf{J}_a(q)M^{-1}(q)\tau_0 &= \mathbf{J}_a^{\dagger T}(q)\tau_0\end{aligned}$$

por lo que se llega a

$$\mathbf{J}_a^\dagger(q) = M^{-1}(q)\mathbf{J}_a^T(q)\bar{M}_x(q) \quad (\text{B.23})$$

Sustituyendo B.23 en B.20

$$\bar{M}_x(q)\ddot{x} + \mu_x(q, \dot{q}) + g_x(q) = \bar{M}_x(q)\mathbf{J}_a(q)M^{-1}(q)\Gamma^T(q)\tau_0 + f + f_a \quad (\text{B.24})$$

donde

$$\begin{aligned}\bar{M}_x(q) &= \mathbf{J}_a^{-T}(q)M(q)\mathbf{J}_a^{-1}(q) = \left(\mathbf{J}_a(q)M^{-1}(q)\mathbf{J}_a^T\right)^{-1} \\ \mu_x(q, \dot{q}) &= \mathbf{J}_a^{\dagger T}C(q, \dot{q}) - \bar{M}_x(q)\dot{\mathbf{J}}_a(q)\dot{q} \\ g_x(q) &= \mathbf{J}_a^{\dagger T}G(q)\end{aligned}$$

En el modelo B.24 las fuerzas del espacio de tarea actúan como entrada al sistema. Para determinar las velocidades y aceleraciones del espacio de tarea se usa la solución de la mínima norma usando la matriz pseudoinversa derecha  $\{\mathbf{J}_a^\dagger(q) | \mathbf{J}_a(q)\mathbf{J}_a^\dagger(q) = I\}$ . Por lo que

$$\dot{q} = \mathbf{J}_a^\dagger(q)\dot{x} + \Gamma\dot{q}_0$$

$$\ddot{q} = \mathbf{J}_a^\dagger(q)\left(\ddot{x} - \dot{\mathbf{J}}_a(q)\dot{q}\right) + \Gamma\ddot{q}_0$$

En la ecuación anterior,  $\Gamma$  es la matriz de proyección del espacio nulo y  $q_0$  es cualquier vector en  $\mathbb{R}^n$ .



# Apéndice C

## Redes Neuronales

De una forma muy general, una Red Neuronal es una máquina diseñada para modelar la forma en que el cerebro desempeña una tarea o función particular. Para alcanzar un buen desempeño, las redes neuronales emplean una interconexión masiva de células de cómputo simple llamadas *neuronas*. Con esta premisa, se puede usar la siguiente definición de red neuronal vista como una máquina adaptativa:

**Definición** Una red neuronal es un procesador distribuido en paralelo masivamente formado por unidades de procesamiento simples, que tienen una predisposición natural para almacenar conocimiento experimental y tenerlo disponible para su uso. Se parece al cerebro en dos aspectos:

1. El conocimiento es adquirido por la red desde su entorno por medio de un proceso de aprendizaje.
2. Se usa la fortaleza de conexión interneurona, también llamada pesos sinápticos, para almacenar el conocimiento adquirido.

El procedimiento usado para realizar el proceso de aprendizaje se llama *algoritmo de aprendizaje*, cuya función es modificar los pesos sinápticos de la red en una manera ordenada para alcanzar un objetivo de diseño deseado.

La modificación de los pesos sinápticos provee un método tradicional para el diseño de redes neuronales, sin embargo, también es posible que la Red Neuronal cambie su topología, lo cual está motivado en el hecho de que las neuronas en el cerebro humano pueden morir y nuevas conexiones sinápticas pueden surgir.

Una Red Neuronal tiene un gran poder de cómputo debido, en primer lugar, a su masiva estructura distribuida en paralelo, y en segundo lugar, a su habilidad de aprender y generalizar.

La *generalización* se refiere al proceso de la Red Neuronal de producir salidas razonables para entradas que no se encuentran durante el entrenamiento (aprendizaje).

El uso de las Redes Neuronales ofrece las siguientes propiedades y capacidades

1. No Linealidad: Una Neurona Artificial puede ser lineal o no lineal. Una Red Neuronal hecha de una interconexión de neuronas no lineales es no lineal. La no linealidad es de un tipo especial en el sentido de que está distribuida a lo largo de toda la red.
2. Mapeo Entrada Salida: El paradigma de Aprendizaje Supervisado involucra la modificación de los pesos sinápticos de la red neuronal al aplicar un conjunto de muestras de entrenamiento marcadas. La red se presenta con un ejemplo del conjunto elegido aleatoriamente y los pesos sinápticos (parámetros libres) de la red se modifican para minimizar la diferencia entre la respuesta deseada y la respuesta real de la red producidas por la señal de entrada. El entrenamiento de la red se repite con muchos ejemplos del conjunto hasta que la red alcanza un estado estable donde no hay más cambios significativos en los pesos sinápticos. El ejemplo de entrenamiento aplicado previamente se replica durante la sesión de entrenamiento, pero en diferente orden. La red aprende de los ejemplos al construir un mapeo entrada-salida para el problema.
3. Adaptabilidad: Las Redes Neuronales tienen una capacidad incorporada de adaptar sus pesos sinápticos a cambios en el ambiente que las rodea. Una red neuronal entrenada para operar en un ambiente específico puede ser re-entrenada para lidiar con cambios menores en las condiciones ambientales de operación. Mas aún, cuando opera en un ambiente no estacionario, una red neuronal puede diseñarse para cambiar sus pesos sinápticos en tiempo real.
4. Respuesta Evidencial: En el contexto de clasificación de patrones, una red neuronal puede diseñarse para proveer información no solo sobre que patrón en particular seleccionar, sino también sobre la confianza en la decisión hecha.
5. Información Contextual: El conocimiento es representado por la estructura y el estado de activación de una red neuronal. Cada neurona en la red es afectada potencialmente por la actividad global de todas las otras neuronas en la red.
6. Tolerancia a Fallas: Una red neuronal implementada en forma de hardware, tiene el potencial de ser tolerante a fallas o capaz de un cómputo robusto, en el sentido de que su desempeño se degrada bajo condiciones de operación adversas.

7. Implementabilidad VLSI: La naturaleza paralela masiva de una red neuronal la hace potencialmente rápida para el cómputo de ciertas tareas. Esta característica la hace adecuada para su implementación usando tecnología de *muy grande escala integrada (VLSI)*.
8. Uniformidad de Análisis y Diseño: Las redes neuronales poseen universalidad como procesadores de información. Esta característica se manifiesta de las siguientes maneras:

Las Neuronas, de una forma o de otra, representan un ingrediente común para todas las redes neuronales.

Esta *comunidad* hace posible compartir teorías y algoritmos de aprendizaje en aplicaciones diferentes de redes neuronales.

Las Redes Modulares pueden ser construidas a través de Integración de Módulos.

9. Analogía Neurobiológica: El diseño de Redes Neuronales está motivado por su analogía con el cerebro humano.

## C.1. Modelos de una Neurona

Una neurona es una *unidad de procesamiento de información* que es fundamental para la operación de la Red Neuronal. En la Figura C.1 se muestra el modelo de una neurona, el cual forma una base para el diseño de redes neuronales. Aquí se identifican tres elementos básicos del modelo de una neurona:

1. Un conjunto de sinapsis o enlaces conectados, cada uno de los cuales está caracterizado por un peso sináptico propio. Específicamente una señal  $x_j$  en la entrada de la sinapsis  $j$  conectada a la neurona  $k$  es multiplicada por el peso sináptico  $\omega_{kj}$ . El primer subíndice se refiere a la neurona en cuestión y el segundo subíndice se refiere a la entrada de la sinapsis a la cual el peso es referido. A diferencia de la sinapsis en el cerebro, el peso sináptico de una neurona artificial puede estar en el rango de números positivos y negativos.
2. Un punto suma para sumar las señales de entrada, ponderados por la sinapsis de la respectiva neurona, esto constituye una combinación lineal.
3. Una función de activación para limitar la amplitud de la salida de la neurona.
4. El modelo de la neurona mostrado en la Figura C.1 también incluye un *bias* externo aplicado. Este tiene el efecto de incrementar o decrementar la entrada neta de la función de activación, dependiendo si es positivo o negativo respectivamente.

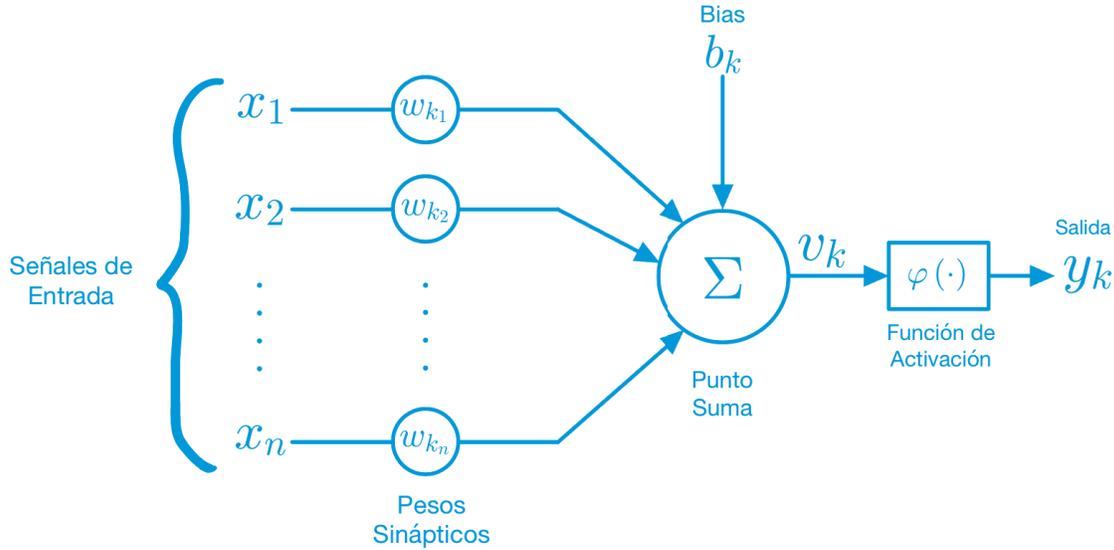


Figura C.1: Modelo No Lineal de una Neurona

En términos matemáticos se describe a la neurona  $k$  mediante el siguiente par de ecuaciones

$$u_k = \sum_{j=1}^m \omega_{kj} x_j$$

$$y_k = \varphi(u_k + b_k)$$

donde  $x_1, x_2, \dots, x_m$  son las señales de entrada;  $\omega_{k1}, \omega_{k2}, \dots, \omega_{km}$  son los pesos sinápticos de la  $k$ -ésima neurona;  $u_k$  es la combinación lineal de la salida debido a las señales de entrada;  $b_k$  es el *bias*;  $\varphi(\cdot)$  es la función de activación; y  $y_k$  es la señal de salida de la neurona. El uso del bias  $b_k$  tiene el efecto de aplicar una transformación afín a la salida  $u_k$  de la combinación lineal en el modelo de la Figura C.1

$$v_k = u_k + b_k$$

## C.2. Tipos de Funciones de Activación

La función de activación denotada por  $\varphi(v)$  define la salida de una neurona en términos del campo local inducido  $v$ . Aquí se identifican tres tipos básicos de funciones de activación:

1. Funciones de Umbral: Para este tipo de funciones de activación, se tiene

$$\varphi(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \geq 0 \\ 0 & \text{si } v < 0 \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

En la literatura a esta función se le llama *Función de Heaviside*. Correspondientemente, se expresa la salida de la neurona  $k$  con tal umbral de función como

$$y_k = \begin{cases} 1 & \text{si } v \geq 0 \\ 0 & \text{si } v < 0 \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

donde  $v_k$  es el campo local inducido de la neurona, esto es

$$v_k = \sum_{j=1}^m \omega_{kj} x_j + b_k \quad (\text{C.3})$$

Tal neurona es llamada en la literatura como el *modelo de McCulloch-Pitts*. En este modelo la salida de la neurona toma el valor de 1 si el campo local inducido de la neurona es positivo, y 0 de otra manera. Este enunciado describe la propiedad todo-o-nada del modelo McCulloch\_Pitts.

2. Funciones Lineales a Pedazos Para este tipo de funciones se tiene

$$\varphi(v) = \begin{cases} 1, & v \geq +\frac{1}{2} \\ v, & +\frac{1}{2} > v > -\frac{1}{2} \\ 0, & v \leq -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

donde el factor de amplificación adentro de la región lineal de operación es asumida como la unidad. Esta forma de función de activación puede ser vista como una aproximación a un amplificador no lineal. Se pueden ver las siguientes dos situaciones como formas especiales de funciones lineales a pedazos:

Una combinación lineal surge si la región lineal de operación se mantiene sin ir a la región de saturación.

La función lineal a pedazos se reduce a la función umbral si el factor de amplificación de la región lineal se hace infinitamente grande.

3. Función Sigmoidal: La función sigmoide, cuya gráfica es en forma de  $S$ , es por mucho la forma más común de función de activación usada en la construcción de redes neuronales artificiales. Se define como una función estrictamente creciente que exhibe un balance entre un comportamiento lineal y no lineal. Un ejemplo de función sigmoide es la función logística definida como

$$\varphi(v) = \frac{1}{1 + e^{(-av)}}$$

donde  $a$  es la pendiente de la sigmoide. Mientras que una función de umbral toma valores de 0 y 1, una función sigmoide toma valores en un rango continuo entre 0 y 1. Nótese también que la función sigmoide es diferenciable. A veces es deseable que el rango de la función de activación esté dentro de  $-1$  a  $1$ . Por la correspondencia en forma con la función sigmoide, se puede usar la función tangente hiperbólica, definida por

$$\varphi(v) = \tanh(v)$$

### C.3. Redes Neuronales Estáticas

Una Red Neuronal Estática no tiene lazos de realimentación ni retrasos; la salida se calcula directamente desde la entrada a través de conexiones hacia adelante [2]. En esta red la salida de cada neurona depende solo de la entrada y los pesos sinápticos asociados a las conexiones entre las neuronas. Este tipo de redes usan un conjunto fijo de pesos sinápticos y bias para procesar la información de la entrada y producir la salida. El tamaño y topología de la capa de entrada son predeterminados y la arquitectura de la red se diseña para adaptarse al tamaño de entrada fijo. En este tipo de redes los parámetros del modelo se quedan fijos una vez que el entrenamiento se completa lo cual limita la eficiencia e interpretabilidad [53]. Ejemplos de redes neuronales estáticas son redes neuronales hacia adelante, redes neuronales convolucionales, etc.

### C.4. Redes Neuronales Dinámicas

Un enfoque común para decodificar información temporal usando redes neuronales estáticas es incluir entradas y salidas retardadas, sin embargo, esta representación es limitada ya que solo se pueden codificar un número finito de mediciones previas. Las Redes Neuronales Dinámicas o Recurrentes se distinguen por tener al menos un lazo de realimentación. Los lazos de realimentación resultan en un comportamiento dinámico no lineal debido a la función de activación de las neuronas. Debido a esto se les llama Redes Neuronales Dinámicas [44].

Una Red Neuronal Dinámica aprende dinámicamente desde la entrada y provee resultados de mayor calidad al agregar más algoritmos de decisión. A través del proceso de aprendizaje, las Redes Neuronales Dinámicas tienen la capacidad de ajustar y modificar su estructura. También, pueden cambiar su topología al agregar o quitar neuronas, conexiones o capas. Esta flexibilidad permite a las Redes Neuronales Dinámicas aprender y adaptarse a nueva información y tareas más efectivamente. En este tipo de redes la salida no solo depende de la entrada actual, sino también de entradas actuales o previas, salidas o estados de la red.

Dado que las Redes Neuronales Dinámicas tienen memoria, se pueden entrenar para aprender patrones secuenciales o variantes en el tiempo. Esto tiene aplicaciones en áreas de predicción de mercados financieros, ecualización de canales en sistemas de comunicación, detección de fase en sistemas de potencia, detección de fallas, reconocimiento de voz e incluso predicción de estructura de proteínas en genética. Una de las principales aplicaciones de las Redes Neuronales Dinámicas es en Sistemas de Control [1].



# Bibliografía

- [1] How dynamic neural networks work - matlab and simulink.
- [2] Introduction to dynamic neural networks - matlab and simulink.
- [3] Muhammad A. Ali, H. Andy Park, and C. S. George Lee. Closed-form inverse kinematic joint solution for humanoid robots. In *2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 704–709, 2010.
- [4] John Baillieul and Tariq Samad. *Encyclopedia of Systems and Control*. Springer-Verlag, 2 edition, 2015.
- [5] Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston Jr., David F. Mazurek, Phillip J. Cornwell, and Elliot R. Eisenberg. *Vector Mechanics for Engineers: Statics and Dynamics*. Mc Graw Hill, 9 edition, 2009.
- [6] Magnus Bjerkgeng and Kristin Y. Pettersen. A new coriolis matrix factorization. In *2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 4974–4979, 2012.
- [7] Samuel Buss. Introduction to inverse kinematics with jacobian transpose, pseudoinverse and damped least squares methods. *IEEE Transactions in Robotics and Automation*, 17, 05 2004.
- [8] Fabrizio Caccavale, Pasquale Chiacchio, Agostino De Santis, Alessandro Marino, Luigi Villani, F. Caccavale, and A. Marino. An experimental investigation on impedance control for dual-arm cooperative systems. In *2007 IEEE/ASME international conference on advanced intelligent mechatronics*, pages 1–6, 2007.
- [9] Georges Bastin Carlos Canudas de Wit, Bruno Siciliano. *Theory of Robot Control*. Springer-Verlag, 1996.
- [10] Sung-Ouk Chang and A.M. Okamura. Impedance-reflecting teleoperation with a real-time evolving neural network controller. In *2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent*

- Robots and Systems (IROS) (IEEE Cat. No.04CH37566)*, volume 3, pages 2241–2246 vol.3, 2004.
- [11] Ryad Chellali. *Tele-operation and Human Robots Interactions*. 03 2010.
- [12] Yushing Cheung and Jae H. Chung. Adaptive transparent force reflecting teleoperation with local force compensators. In Naruo Kano, editor, *Proceedings of the 23rd International Symposium on Automation and Robotics in Construction*, pages 554–559, Tokyo, Japan, October 2006. International Association for Automation and Robotics in Construction (IAARC).
- [13] Yushing Cheung and Jae H. Chung. Adaptive force reflecting teleoperation with local intelligence. *Ind. Robot*, 34:201–210, 2007.
- [14] Rafael Cisneros. Estrategias de modelado cinemático y simulación en robots humanoides. Master’s thesis, CINVESTAV, 03 2009.
- [15] Jian Cui, Sabri Tosunoglu, Rodney G. Roberts, Carl A. Moore, and Daniel W. Repperger. A review of teleoperation system control. 2003.
- [16] Nam Do and Toru Namerikawa. An impedance control based force-reflection algorithm of bilateral teleoperation with communication delay. 11 2008.
- [17] Nam Do and Toru Namerikawa. Impedance control for force - reflecting teleoperation with communication delays based on ios small gain theorem. pages 4079 – 4086, 09 2009.
- [18] Xu Dong, Zhang Shaoguang, Li Xuerong, Liu Min, and Wei Hongxing. Impedance control of robot manipulator with model reference torque observer. In *2013 IEEE 8th Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA)*, pages 994–998, 2013.
- [19] Z. Dougeri and G. Iliadis. Contact task stability and maintenance with a compliant surface using a switched one dof robot model. In *Proceedings 2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2006. ICRA 2006.*, pages 4013–4018, 2006.
- [20] Anca Dragan, K Lee, and Siddhartha Srinivasa. Teleoperation with intelligent and customizable interfaces. *Journal of Human-Robot Interaction (JHRI)*, 2, 06 2013.
- [21] Shervin Eh, Mohit Dave, Michael Kia, Corneliu Rablau, and Mehrdad Zadeh. Providing haptic feedback in robot-assisted minimally invasive surgery: A direct optical force-sensing solution for haptic rendering of deformable bodies 1. *Computer aided surgery : official journal of the International Society for Computer Aided Surgery*, 18:129–41, 09 2013.

- [22] Farid Golnaraghi and Benjamin C. Kuo. *Automatic Control Systems*. McGraw-Hill Education, 10 edition, 2017.
- [23] N. González, J. de León, C. Guerra, and V. Parra. A sliding mode-based impedance control for bilateral teleoperation under time delay. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1):326–331, 2011. 18th IFAC World Congress.
- [24] Y.-L. Gu. Dynamics and control for redundant robots. In *Proceedings. 1988 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 194–199 vol.1, 1988.
- [25] A. Hace, S. Uran, K. Jezernik, and B. Curk. Robust sliding mode based impedance control. In *Proceedings of IEEE International Conference on Intelligent Engineering Systems*, pages 77–82, 1997.
- [26] Debbie Hernández, Wen Yu, and Xiaou Li. Robot pd control with parallel/serial neural network and sliding mode compensations. *2012 IEEE International Conference on Control Applications*, pages 1148–1153, 2012.
- [27] Neville Hogan. Impedance control: An approach to manipulation. In *1984 American Control Conference*, pages 304–313, 1984.
- [28] Peter F. Hokayem and Mark W. Spong. Bilateral teleoperation: An historical survey. *Automatica*, 42(12):2035–2057, 2006.
- [29] Haiying Hu, Jiawei Li, Zongwu Xie, Bin Wang, Hong Liu, and G. Hirzinger. A robot arm/hand teleoperation system with telepresence and shared control. In *Proceedings, 2005 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics.*, pages 1312–1317, 2005.
- [30] Huosheng Hu, Lixiang Yu, Pui Tsui, and Quan Zhou. Internet-based robotic systems for teleoperation. *Assembly Automation*, 21:143–152, 06 2001.
- [31] Aghil Jafari, Jee-Hwan Ryu, Mehdi Rezaei, Reza Monfaredi, Ali Talebi, and Saeed Shiry Ghidary. Sliding mode hybrid impedance control of robot manipulators interacting with unknown environments using vsmrc method. In *IEEE ISR 2013*, pages 1–6, 2013.
- [32] Seul Jung and T.C. Hsia. Neural network impedance force control of robot manipulator. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 45(3):451–461, 1998.
- [33] Negar Kharmandar and Amir A. Khayyat. Force impedance control of a robot manipulator using a neuro-fuzzy controller. In *2011 International Conference on Mechatronic Science, Electric Engineering and Computer (MEC)*, pages 559–563, 2011.

- [34] K.J. Kuchenbecker and G. Niemeyer. Modeling induced master motion in force-reflecting teleoperation. In *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 348–353, 2005.
- [35] D.A. Lawrence. Stability and transparency in bilateral teleoperation. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 9(5):624–637, 1993.
- [36] G.J. Liu and A.A. Goldenberg. Robust hybrid impedance control of robot manipulators. In *Proceedings. 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 287–292 vol.1, 1991.
- [37] L.J. Love and W.J. Book. Force reflecting teleoperation with adaptive impedance control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 34(1):159–165, 2004.
- [38] J.K. Mills and Guang-Jun Liu. Robotic manipulator impedance control of generalized contact force and position. In *Proceedings IROS '91:IEEE/RSJ International Workshop on Intelligent Robots and Systems '91*, pages 1103–1108 vol.2, 1991.
- [39] Sebastian Muszynski, Jörg Stückler, and Sven Behnke. Adjustable autonomy for mobile teleoperation of personal service robots. In *2012 IEEE RO-MAN: The 21st IEEE International Symposium on Robot and Human Interactive Communication*, pages 933–940, 2012.
- [40] A. Nagchaudhuri and D.P. Garg. Adaptive control and impedance control for dual robotic arms manipulating a common heavy load. In *2001 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics. Proceedings (Cat. No.01TH8556)*, volume 2, pages 683–688 vol.2, 2001.
- [41] L. Ni and D.W.L. Wang. Contact transition stability analysis for a bilateral teleoperation system. In *Proceedings 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No.02CH37292)*, volume 3, pages 3272–3277 vol.3, 2002.
- [42] Emmanuel Nuno and Luis Basanez. Nonlinear bilateral teleoperation: Stability analysis. In *2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 3718–3723, 2009.
- [43] Emmanuel Nuño, Romeo Ortega, Nikita Barabanov, and Luis Basañez. A globally stable pd controller for bilateral teleoperators. *IEEE Transactions on Robotics*, 24(3):753–758, 2008.
- [44] A.S. Poznyak, E.N. Sanchez, and W. Yu. *Differential Neural Networks for Robust Nonlinear Control: Identification, State Estimation and Trajectory Tracking*. World Scientific, 2001.

- [45] Asif Sabanovic and Kouhei Ohnishi. *Operational Space Dynamics and Control*, chapter 8, pages 313–336. John Wiley and Sons, Ltd, 2011.
- [46] M. Sha Sadeghi, H. R. Momeni, R. Amirifar, and S. Ganjefar. Robust adaptive inverse controller design for position tracking in teleoperation systems. In *2007 IEEE International Conference on Control Applications*, pages 563–568, 2007.
- [47] Max Schwarz, Jörg Stückler, and Sven Behnke. Mobile teleoperation interfaces for domestic service robots. 01 2014.
- [48] M. Sha Sadeghi, H. R. Momeni, R. Amirifar, and S. Ganjefar. A new adaptive inverse control scheme for teleoperation system with varying time delay. In *2006 IEEE Conference on Computer Aided Control System Design, 2006 IEEE International Conference on Control Applications, 2006 IEEE International Symposium on Intelligent Control*, pages 199–204, 2006.
- [49] T.B. Sheridan. Space teleoperation through time delay: review and prognosis. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 9(5):592–606, 1993.
- [50] Bruno Siciliano and Oussama Khatib. *Springer Handbook of Robotics*. Springer-Verlag, 2008.
- [51] Muhammad Tufail and Clarence W. de Silva. Impedance control schemes for bilateral teleoperation. In *2014 9th International Conference on Computer Science and Education*, pages 44–49, 2014.
- [52] Alaleh Vafaei and Mohammad J. Yazdanpanah. Terminal sliding mode impedance control for bilateral teleoperation under unknown constant time delay and uncertainties. In *2013 European Control Conference (ECC)*, pages 3748–3753, 2013.
- [53] Preeti Raj Verma, Navneet Pratap Singh, and Deepika Pantola. Comparing the performance of static and dynamic neural networks and analyzing their architectures: A comprehensive study.
- [54] II Wampler, C. W. and L. J. Leifer. Applications of Damped Least-Squares Methods to Resolved-Rate and Resolved-Acceleration Control of Manipulators. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 110(1):31–38, 03 1988.
- [55] J.T. Wen and S. Murphy. Stability analysis of position and force control for robot arms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(3):365–371, 1991.

- [56] Zhong Li Xu and Gu Fang. Fuzzy impedance control for robots in complex spatial edge following. In *7th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, 2002. ICARCV 2002.*, volume 2, pages 845–850 vol.2, 2002.