

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
DEPARTAMENTO DE CONTROL AUTOMÁTICO

Observadores Difusos y Control Adaptable Difuso Basado en Observadores

TESIS QUE PRESENTA
Araceli Grande Meza

PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE
CONTROL AUTOMÁTICO

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Wen Yu Liu

México, D.F., octubre del 2003.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Objetivos del trabajo	2
1.2. Método de solución	2
1.3. Estructura del trabajo	3
1.4. Publicaciones	6
2. Lógica difusa y relación difusa	7
2.1. Lógica difusa	7
2.1.1. Conjuntos Difusos y operaciones básicas de los conjuntos difusos	8
2.1.2. Proyecciones y Extensiones Cilíndricas	21
2.2. Variables Lingüísticas y Reglas Difusas SI-ENTONCES (IF-THEN)	23
2.2.1. De las Variables Numéricas a las Variables Lingüísticas	23
2.2.2. Reglas difusas SI-ENTONCES (IF-THEN)	26
2.2.3. La Lógica Difusa y el Razonamiento Aproximado	28
3. Sistemas Difusos y Control Difuso	31
3.1. Sistemas Difusos	31
3.2. Control Difuso	36
3.2.1. Reglas Difusas	39
3.2.2. Dispositivo de Inferencia Difusa	39
3.3. El doble papel de los sistemas difusos	39

3.4.	Los sistemas difusos como aproximadores Universales	40
3.5.	Diseño de sistemas Difusos empleando el Entrenamiento del Gradiente Descendente	41
3.5.1.	Estructura del Sistema Difuso	42
3.5.2.	Diseño de los Parámetros por el Gradiente Descendente	44
4.	Observadores Difusos	49
4.1.	Introducción	49
4.2.	Observadores	50
4.3.	Observadores Difusos	51
4.4.	Observador para un Sistema Difuso Takagi-Sugeno	53
4.5.	Identificador Neuronal Difuso	56
4.6.	Identificador Difuso basado en un Observador	58
4.6.1.	Observador en modo deslizante	59
4.6.2.	Análisis de estabilidad	60
4.6.3.	Identificador Difuso basado en un Observador	63
4.7.	Simulación	70
4.7.1.	Identificación de sistemas no lineales	70
5.	Control Difuso basado en un Observador	101
5.1.	Introducción	101
5.2.	Controladores Difusos	102
5.3.	Retroalimentación a la Salida de Sistemas Difusos TSK	103
5.3.1.	Control con Retroalimentación a la Salida de Sistemas Lineales	104
5.3.2.	Control Difuso de TSK	105
5.3.3.	Control Difuso para TSK basado en un Observador	109
5.4.	Control Difuso con Retroalimentación a la Salida basado en un observador	110
5.5.	Simulación	118
5.5.1.	Control adaptable difuso	118
5.5.2.	Control adaptable difuso basado en un observador en modo deslizante	123

ÍNDICE GENERAL	III
6. Conclusión	131
□Appendix: □diagramas□	141

Capítulo 1

Introducción

En 1965 Lofti A. Zadeh escribió su celebre artículo “Fuzzy Sets” [52] en el que menciona que “Muy comúnmente, las clases de objetos encontradas en el mundo físico real no tienen definido de forma precisa su criterio de pertenencia”. Esta misma ambigüedad crece en el caso de un número, tal como el 10 con relación a la **clase** de todos los números reales que son mucho más grandes que 1. Podemos observar con claridad que "las clases de todos los números reales mucho más grandes que 1", o "la clase de las mujeres altas", o "la clase de los hombres jóvenes", no constituyen clases o conjuntos en el sentido matemático usual. Sin embargo, los datos restantes, imprecisamente llamados **clases**, desempeñan un papel importante en el pensamiento humano, particularmente en el dominio de reconocimiento de patrones, comunicación de información y abstracción. Zadeh estableció en su artículo las bases principales del lenguaje difuso, definiendo el universo de discurso, como el área dónde se atribuyen cualidades o se califican determinadas variables, y llamando a un tipo de conjuntos que encierran una propiedad específica, funciones de pertenencia.

A partir de los primeros resultados presentados por Zadeh [53] y las primeras aplicaciones en los procesos de control realizadas por Mamdani [28], el control difuso ha mostrado ser una aproximación exitosa para los sistemas no lineales complejos.

Desde que las teorías de control clásicas se han combinado dentro de los sistemas difusos, ha surgido un gran número de análisis de estabilidad y resultados de síntesis en el control

difuso. Muchos autores en el campo de esta tecnología proclaman que el control difuso está revolucionando el control, prometiendo mayores y mejores adelantos en la solución de problemas de alta complejidad dentro del área ingenieril, invirtiendo de esta forma menor esfuerzo por parte de la comunidad interesada en encontrar nuevas alternativas.

1.1. Objetivos del trabajo

El objetivo general de esta tesis es proponer una herramienta que resuelva los problemas de identificación y control para cierta clase de sistemas no lineales complejos, empleando los principios de los sistemas difusos.

La motivación principal de este trabajo es que: "Si algunos estados internos de un sistema no lineal no se pueden medir, entonces ¿cómo podemos diseñar un controlador difuso basado en los datos entrada-salida que nos permita estabilizar tal sistema?".

1.2. Método de solución

De acuerdo a la complejidad y a la gran variedad de sistemas no lineales que abundan en la naturaleza, no existe una metodología exacta que nos permita resolver los problemas de identificación y control de estos sistemas, por tanto basándonos en el conocimiento de que las redes neuronales y la lógica difusa son estimadores universales provistos con la capacidad de aproximar cualquier función no lineal a cualquier precisión que se pida [1], [5], [25], podemos emplear estos conceptos como una buena alternativa en la solución a los problemas de identificación y control para la clase de sistemas de nuestro interés.

Hoy en día se ha mostrado que la combinación de nuevas tecnologías tales como las redes neuronales y la lógica difusa han permitido surgir nuevos conceptos como los neuro identificadores difusos, los neuro controladores difusos, los controladores adaptables difusos, etc., que nos proporcionan un medio bastante efectivo en la búsqueda de soluciones para una amplia gama de sistemas con información parcial o ninguna información de sus modelos. Los sistemas de control difuso son una herramienta muy versátil, permitiéndonos de esta forma

encontrar diferentes medios de solución para un mismo problema.

En la figura 1.1 se muestra un panorama general para dar solución al problema que se ha planteado en la tesis; se dan dos diferentes puntos de vista que nos podrían proporcionar la información requerida acerca del sistema no lineal: el primero se basa en la estimación de los estados internos del sistema por medio de un observador difuso tipo TSK y de acuerdo con esta información poder diseñar un controlador de igual forma apoyado en los principios de la lógica difusa [27]. En el segundo caso se emplea la identificación basada en los conceptos de las redes neuronales y los sistemas difusos, y para poder estimar los estados internos del sistema no lineal se utiliza un observador libre de la estructura del sistema como por ejemplo un observador en modo deslizante, así, con la información obtenida poder dar una ley de control para el sistema en cuestión [49]. Este último caso es más general y por lo tanto de mayor interés.

1.3. Estructura del trabajo

Esta tesis está organizada de la siguiente forma:

En el **capítulo 1** se plantea la necesidad de nuevas estrategias de identificación y control que nos permitan hacer frente a problemas de alta complejidad que caracterizan a los sistemas inmersos en el entorno que nos rodea y que se encuentran presentes en muchas aplicaciones del área ingenieril. El problema que se plantea nos permite enfocarnos en nuevas tendencias del control, como son los sistemas de control difuso en combinación con conceptos tales como las redes neuronales artificiales, poderosas herramientas en la identificación y control de sistemas no lineales complejos.

En el **capítulo 2** se revisan los conceptos básicos de la lógica difusa, cuya necesidad se ha extendido en una amplia variedad de aplicaciones; a partir de la publicación de Lofti Zadeh aparecen nuevas definiciones para los conjuntos clásicos. Se enuncia el significado de palabras tales como conjunto difuso, función de pertenencia o inclusión, variable lingüística, operaciones difusas, etc. El propósito de este capítulo es dar de forma breve una introducción teórica al conocimiento tan extenso de la lógica difusa.

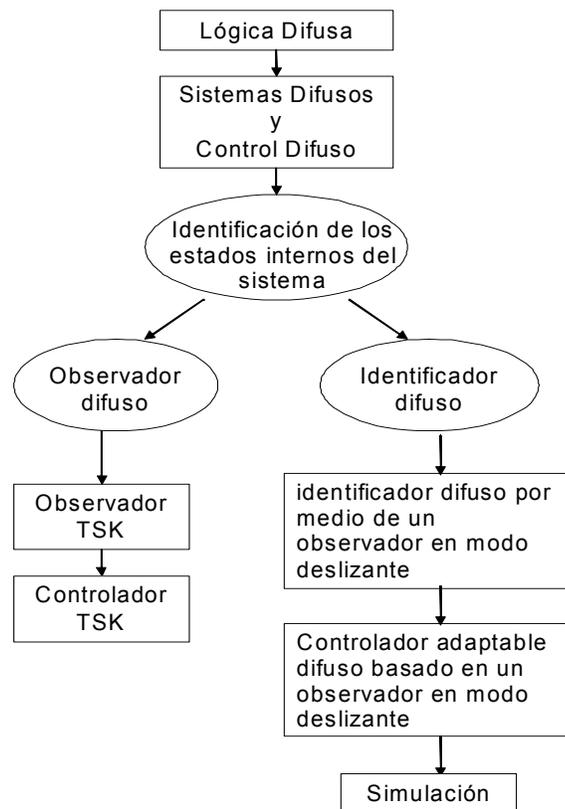


Figura 1.1: Esquema general de la tesis.

En el **capítulo 3** se muestra que la aplicación más importante de la lógica difusa son los sistemas difusos y en especial los sistemas de control difuso. Los sistemas difusos son sistemas basados en el conocimiento o en reglas, existen diferentes tipos de sistemas de control difuso como son los de tipo Mamdani y los del tipo Takagi-Sugeno-Kang (TSK). Se definen las características básicas de estos sistemas. Podemos ver que este tipo de sistemas se pueden emplear muy bien en la identificación y control de sistemas no lineales complejos gracias a la capacidad que tienen de aproximar sistemas no lineales con una buena exactitud.

En el **capítulo 4** se muestra la aplicación de las redes neuronales y de los sistemas difusos dentro del área de la identificación de sistemas no lineales, de los cuales no se cuenta con toda la información y cuyos modelos matemáticos son muy complejos.

Se muestran dos formas para la estimación de los estados internos del sistema no lineal, la primera es por medio de la aplicación de los observadores difusos para sistema tipo Takagi-Sugeno y en el segundo método se introduce un observador en modo deslizante así como su diagrama de diseño, esto es con el fin de estimar los estados internos del sistema no lineal y de esta forma identificar la planta por medio de un neuro identificador difuso, también se muestra el análisis de estabilidad de éste último.

En el **capítulo 5** se plantea el problema de seguimiento para un sistema no lineal, y de igual forma que en el capítulo anterior se presentan dos alternativas, en la primera propuesta se utiliza un sistema de control tipo Takagi-Sugeno que es parte de la continuación a la estimación de los estados internos del sistema por medio de un observador TSK, lo que simplifica el problema mostrándolo como un caso lineal, en el segundo procedimiento se define un error de seguimiento y de esta forma se propone un neuro controlador adaptable difuso, este planteamiento es más general y de mayor interés en la solución para el control de sistemas no lineales complejos.

Las partes de que consta un controlador adaptable son un identificador, un controlador, el modelo de la planta y el modelo de referencia así como un algoritmo de adaptación, que en éste caso podría ser el entrenamiento del gradiente descendente [29].

1.4. Publicaciones

Parte de esta tesis se presentó como el artículo titulado Fuzzy Output Feedback Control via Sliding Mode Observer, *International Symposium on Robotics and Automation*, Toluca, Mexico, 2002

Capítulo 2

Lógica difusa y relación difusa

La mayoría de las definiciones que a continuación se citan son extraídas de [42] y [41], se presentan los conceptos básicos que describen a la lógica difusa y a los sistemas de control difuso.

2.1. Lógica difusa

En la década de los años veinte de este siglo, J. Lukasiewicz desarrolló los principios de la lógica multivaluada, cuyos enunciados pueden tener valores de verdad comprendidos entre el 0 (FALSO) y el 1 (CIERTO) de la lógica binaria clásica.

En 1965, L. Zadeh aplicó la lógica multivaluada a la teoría de conjuntos, estableciendo la posibilidad de que los elementos pudieran tener diferentes grados de pertenencia a un conjunto. Zadeh introdujo el término *fuzzy* (borroso, difuso) y desarrolló un álgebra completa para los conjuntos difusos, aunque estos conjuntos no tuvieron aplicación práctica hasta mediados de los años setenta, cuando E. H. Mamdani diseñó un controlador difuso para un motor de vapor [42].

En la lógica borrosa o difusa se trabaja con conjuntos, que se definen por sus funciones de pertenencia, que se denotan como $\mu_C(x)$ e indican el grado de pertenencia (entre 0 y 1) del elemento con valor x al conjunto C .

La denominada lógica difusa (*fuzzy logic*) permite tratar información imprecisa, como *estatura media*, *temperatura baja* o *mucha fuerza*, en términos de conjuntos borrosos o difusos (imprecisos en definitiva). Estos conjuntos borrosos se combinan en reglas para definir acciones, como por ejemplo, Si la temperatura es alta entonces enfriar mucho. De esta manera, los sistemas de control basados en lógica difusa combinan unas variables de entrada (definidas en términos de conjuntos difusos), por medio de grupos de reglas que producen uno o varios valores de salida.

Los sistemas basados en lógica difusa pueden ser aplicados a problemas similares que las redes neuronales, y resultan interesantes para problemas no lineales o no bien definidos.

Los sistemas difusos permiten modelar cualquier proceso no lineal, y aprender de los datos haciendo uso de determinados algoritmos de aprendizaje (como los de las propias redes neuronales). Estos sistemas permiten utilizar fácilmente el conocimiento de los expertos en un tema, formalizando el conocimiento a veces ambiguo del experto (o el sentido común) de una forma realizable. Y gracias a la simplicidad de los cálculos, normalmente pueden realizarse en sistemas baratos y rápidos.

Desde los resultados presentados por Zadeh y sus primeras aplicaciones en procesos de control demostrados por Mamdani, el control difuso ha probado ser una excelente aproximación para sistemas no lineales complejos. Debido a que muchas teorías del control clásico se combinan en los sistemas difusos, han aparecido análisis de estabilidad y resultados de síntesis en control difuso.

A continuación se presentan los aspectos básicos de la lógica difusa.

2.1.1. Conjuntos Difusos y operaciones básicas de los conjuntos difusos

De los Conjuntos Clásicos a los Conjuntos difusos

Sea U el *universo de discurso*, o *conjunto universal* que contiene todos los elementos posibles que concierne a cada contexto en particular o aplicación. Recordando que *un conjunto clásico (crisp) A*, o simplemente el conjunto A , en el universo de discurso U se puede definir

o estando todos sus miembros o especificando las propiedades que pueden satisfacer los elementos del conjunto. Podemos enlistar los elementos del conjunto, esto sólo para conjuntos finitos. De forma más general podemos establecer una regla que cumplan los elementos que pertenezcan al conjunto A y que podemos representar como

$$A = \{x \in U \mid \text{cumple ciertas condiciones}\} \quad (2.1)$$

Podemos citar otro método para definir el conjunto A , *el método de pertenencia*, que introduce una función de pertenencia (también llamada función característica, función discriminante, o función indicador) para A , denotado por $\mu_A(x)$, tal que

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \quad (2.2)$$

El conjunto A es equivalente matemáticamente a su función de pertenencia $\mu_A(x)$ en el sentido que conociendo $\mu_A(x)$ conocemos al propio A .

Si queremos definir un conjunto en U de acuerdo a si el auto es un auto americano o no, nos presentamos con una dificultad. Una perspectiva es que un auto es un auto americano si tiene el nombre de auto manufacturado en Estados Unidos de América; (EUA) de otra forma no es un auto americano. Sin embargo, mucha gente siente que la distinción entre un auto americano y uno no americano no es como en un conjunto **crisp**, debido a que muchos componentes de los autos que se consideran americanos (por ejemplo, Ford, GM, Chryslers) son producidos fuera de Estados Unidos de América. Además, algunos autos "no americanos" son manufacturados en los EUA. ¿Qué se puede hacer para enfrentar este problema?

Esencialmente, la dificultad del ejemplo anterior muestra que *algunos conjuntos no tienen fronteras claras*. La teoría de conjuntos clásica requiere que un conjunto debe tener una propiedad bien definida, por tanto es incapaz de definir el conjunto como "todos los autos americanos en Los Angeles". Para afrontar esta limitación de la teoría de conjuntos clásica, se introdujo el concepto de **conjunto difuso**. El resultado de esa limitación es fundamental y es necesaria una nueva teoría: **la teoría de conjuntos difusos**.

Definición 2.1 *Un conjunto difuso en el universo de discurso U se caracteriza por una función de pertenencia $\mu_A(x)$ que toma valores en el intervalo $[0, 1]$.*

Notación Los conjuntos difusos se denotan por letras mayúsculas normales, por ejemplo los conjuntos difusos A, B, C, L , etc. Las matrices se denotan por letras mayúsculas oscuras como la matriz $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$, etc. Los elementos de un conjunto difuso se denotan por letras minúsculas normales como x, u, y , etc., para las variables lingüísticas se utilizarán letras normales con gorro, como \hat{x}, \hat{y} , etc.

Por tanto, un conjunto difuso es una generalización de un conjunto clásico permitiendo que la función de pertenencia tome cualquier valor en el intervalo de $[0, 1]$. En otras palabras la función de pertenencia de un conjunto clásico puede tomar solo dos valores -cero y uno-, mientras que la función de pertenencia de un conjunto difuso es una función continua con rango entre $[0, 1]$. Podemos ver de la definición que no existe nada incierto de la definición de conjunto difuso; es simplemente un conjunto con una función de pertenencia continua. Un conjunto difuso A en U puede representarse como un conjunto de pares ordenados de un elemento genérico x y de su valor de pertenencia,

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in U\} \quad (2.3)$$

Cuando U es continuo (por ejemplo, $U = R$), A es comúnmente escrito como

$$A = \int_U \mu_A(x) / x \quad (2.4)$$

donde el signo de integral no denota integración; denota la colección de todos los puntos $x \in U$ con la función de pertenencia asociada $\mu_A(x)$. Cuando U es discreto, A es comúnmente escrito como

$$A = \sum_U \mu_A(x) / x \quad (2.5)$$

donde el signo de sumatoria no representa adición aritmética; denota la colección de todos los puntos $x \in U$ con la función de pertenencia asociada $\mu_A(x)$. Regresando al ejemplo anterior y empleando el concepto de conjunto difuso se pueden definir el conjunto de autos americanos

y no americanos. Para definir el conjunto de **autos americanos en Los Angeles** denotado por D , como un conjunto difuso de acuerdo al porcentaje de las partes del auto hechas en EUA. Específicamente, D se define por la función de pertenencia

$$\mu_D(x) = p(x) \quad (2.6)$$

donde $p(x)$ es el porcentaje de las partes del auto x hechas en EUA y toma valores entre 0% y 100%. Por ejemplo, si un auto en particular x_0 tiene el 60% de sus partes hechas en EUA, entonces decimos que el auto x_0 pertenece al conjunto D en el grado de 0.6. Similarmente, podemos definir el conjunto de **autos no americanos en Los Angeles**, denotado por F , como el conjunto difuso con la función de pertenencia

$$\mu_F(x) = 1 - p(x) \quad (2.7)$$

donde $p(x)$ es lo mismo que en (2.6). De esta manera, si un auto particular x_0 tiene el 60% de todas sus partes hechas en EUA, entonces podemos decir que el auto x_0 pertenece al conjunto difuso F en un grado de $1-0.6=0.4$. La figura 2.1 muestra (2.6) y (2.7). Por supuesto, un elemento puede pertenecer a diferentes conjuntos difusos en el mismo o en diferente grado.

Podemos definir a Z como el conjunto nombrado *números cercanos al cero*. Por tanto una posible función de pertenencia para Z es

$$\mu_Z(x) = e^{-x^2} \quad (2.8)$$

donde $x \in R$. Esta es una función Gaussiana con media igual a cero y desviación estándar igual a uno. De acuerdo a esta función de pertenencia, los números 0 y 2 pertenecen al conjunto difuso Z en un grado de $e^0 = 1$ y e^{-4} , respectivamente.

También podemos definir la función de pertenencia para Z como

$$\mu_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ x + 1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \quad (2.9)$$

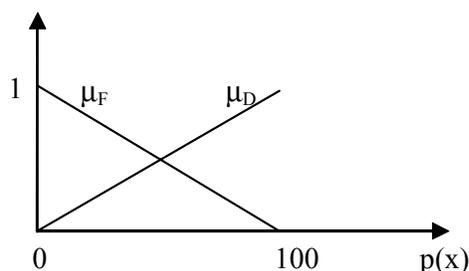


Figura 2.1: Función de pertenencia para autos americanos (μ_D) y no americanos (μ_F) basados en el porcentaje de las partes del auto hechas en EUA ($p(x)$).

De acuerdo a esta función de pertenencia, los números 0 y 2 pertenecen al conjunto difuso Z en un grado de 1 y 0, respectivamente. (2.8) y (2.9) se pueden observar en las figuras (2.2) y (2.3), respectivamente. Se pueden elegir muchas otras funciones de pertenencia que caractericen a *números cercanos a cero*.

Podemos señalar tres observaciones importantes sobre los conjuntos difusos:

Comentario 2.1 *Las propiedades empleadas para caracterizar conjuntos difusos usualmente son difusas, por ejemplo, números cercanos al cero, lo cual no es una descripción precisa. De esta forma, podemos usar diferentes funciones de pertenencia para caracterizar la misma descripción. Sin embargo, las funciones de pertenencia por sí solas no son difusas - en realidad son funciones matemáticas precisas -. Una vez que una propiedad difusa es representada por una función de pertenencia, por ejemplo, "números cercanos al cero" se representa por la función de pertenencia (2.8) o (2.9), nada será difuso después. Así, caracterizando una descripción difusa con una función de pertenencia, esencialmente se le quita lo difuso a la descripción difusa. Un malentendido común de la teoría de conjuntos difusos es que la teoría de conjuntos difusos trata de hacer difuso al mundo. Por el contrario, estos conjuntos difusos son usados para no ver al mundo de forma difusa.*

Comentario 2.2 *La observación anterior es una cuestión importante: ¿cómo determinar las*

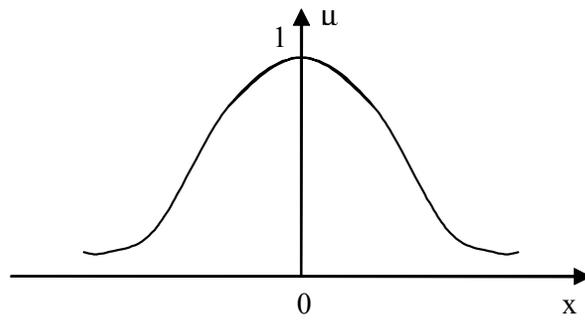


Figura 2.2: Función de pertenencia posible para caracterizar "números cercanos al cero".

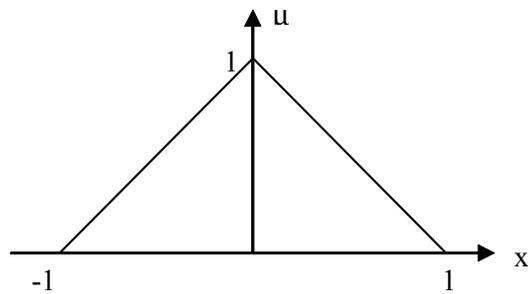


Figura 2.3: Otra posible función de pertenencia para caracterizar "números cercanos al cero".

funciones de pertenencia? Debido a que existe una variedad de elecciones para las funciones de pertenencia, ¿cómo podemos elegir una de estas opciones? Conceptualmente, existen dos aproximaciones para determinar una función de pertenencia. La primera aproximación es usar el conocimiento humano de los expertos, es decir, preguntar a los expertos del campo para especificar las funciones de pertenencia. Ya que los conjuntos difusos son en ocasiones empleados para formular el conocimiento humano, las funciones de pertenencia representan una parte del conocimiento humano. Usualmente, esta aproximación puede darnos una fórmula rígida de la función de pertenencia; se necesita un ajuste más fino. Para la segunda aproximación, empleamos una colección de datos provenientes de varios sensores para determinar las funciones de pertenencia. Específicamente, primero se definen las estructuras de las funciones de pertenencia y de esta forma se ajustan los parámetros de las funciones de pertenencia basadas en los datos.

Comentario 2.3 *Finalmente, debería enfatizarse que aunque (2.8) y (2.9) son usadas para caracterizar la misma descripción de "números cercanos al cero", estos son diferentes conjuntos difusos. Hablando rigurosamente, podríamos emplear diferentes etiquetas para representar los conjuntos difusos (2.8) y (2.9); por ejemplo, podríamos usar $\mu_{Z_1}(x)$ en (2.8) y $\mu_{Z_2}(x)$ en (2.9). Un conjunto difuso tiene una correspondencia uno a uno con su función de pertenencia. Esto es, cuando decimos un conjunto difuso, existe una función de pertenencia única asociada con éste; recíprocamente, cuando damos una función de pertenencia, ésta representa un conjunto difuso.*

Conceptos Básicos asociados con los Conjuntos Difusos

Muchos de estos conceptos son una extensión de los conceptos básicos de un conjunto clásico (crisp), sin embargo algunos de ellos son únicos dentro del marco de los conjuntos difusos.

Definición 2.2 *A continuación se definen los conceptos de soporte, singleton difuso, centro, punto de cruce, punto elevado, conjunto difuso normal, α -corte, conjunto difuso convexo y proyecciones.*

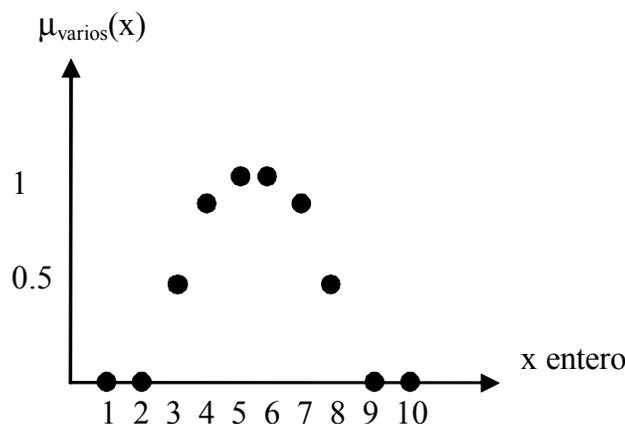


Figura 2.4: Función de pertenencia para el conjunto difuso "varios".

El **soporte** (*support*) de un conjunto difuso A en el universo de discurso U es un conjunto crisp que contiene todos los elementos de U que no tienen valores de pertenencia igual a cero en A , esto es,

$$\text{supp}(A) = \{x \in U \mid \mu_A(x) > 0\} \quad (2.10)$$

donde $\text{supp}(A)$ denota el soporte del conjunto difuso A . Por ejemplo, el soporte del conjunto difuso "varios" en la figura 2.4 es el conjunto de enteros $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Si el soporte de un conjunto difuso está vacío, se le llama **conjunto difuso vacío**. Un **singleton difuso** es un conjunto difuso cuyo soporte es un único punto en U .

El **centro** de un conjunto difuso se define como: si el valor medio de todos los puntos en el cuál la función de pertenencia del conjunto difuso alcanza su máximo valor es finito, por tanto se define este valor medio como el centro del conjunto difuso, si el valor medio es igual a un infinito positivo (negativo), entonces el centro se define como el más grande (más pequeño) entre todos los puntos que alcanzan el valor de pertenencia máximo. La figura 2.5 muestra los centros de algunos conjuntos difusos típicos. El **punto de cruce** de un conjunto difuso es el punto en U cuyo valor de pertenencia en A es igual a 0,5.

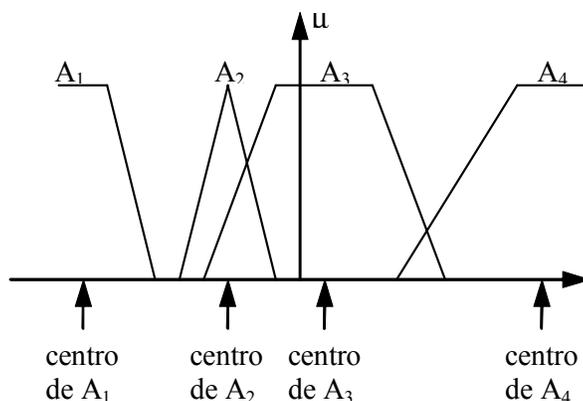


Figura 2.5: Centros de algunos conjuntos difusos típicos.

El **punto elevado** de un conjunto difuso es el valor de pertenencia más grande obtenido por cualquier punto. Por ejemplo, los puntos elevados de todos los conjuntos difusos en las Figuras 2.1-2.3 son iguales a uno. Si el punto elevado de un conjunto difuso es igual a uno, se le llama conjunto difuso normal. Todos los conjuntos difusos en las Figuras 2.1-2.3 son por tanto conjuntos difusos normales.

Un α -**corte** de un conjunto difuso A es un conjunto crisp A_α , que contiene todos los elementos en U que tienen valores de pertenencia en A mayores o iguales a α , esto es,

$$A_\alpha = \{x \in U \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad (2.11)$$

Por ejemplo, para $\alpha = 0.3$ el α -corte del conjunto difuso (2.9) (figura 2.3) es el conjunto crisp $[-0.7, 0.7]$, y para $\alpha = 0.9$, es $[-0.1, 0.1]$.

Cuando el universo de discurso U es el espacio Euclidiano n -dimensional R^n , el concepto de convexidad se puede generalizar al conjunto difuso. Un conjunto difuso A se dice convexo si y solo si α -corte A_α es un conjunto convexo para cualquier α en el intervalo $(0, 1]$.

Los conceptos básicos de las secciones anteriores conciernen a un sólo conjunto difuso. Se asume que A y B son conjuntos difusos definidos en el mismo universo de discurso U .

Definición 2.3 *La igualdad, contención complemento, unión e intersección de dos conjuntos difusos A y B se definen a continuación*

Decimos que A y B son iguales si y sólo si $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ para todo $x \in U$. Se dice que B contiene a A , denotado por $A \subset B$ si y sólo si $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ para todo $x \in U$. El complemento de A es un conjunto difuso \bar{A} en U cuya función de pertenencia es definida por

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad (2.12)$$

*La **unión** de A y B es un conjunto difuso en U , denotado por $A \cup B$ cuya función de pertenencia esta definida como*

$$\mu_{A \cup B}(x) = \text{máx} [\mu_A(x), \mu_B(x)] \quad (2.13)$$

La intersección de A y B es un conjunto difuso $A \cap B$ en U con función de pertenencia

$$\mu_{A \cap B}(x) = \text{mín} [\mu_A(x), \mu_B(x)] \quad (2.14)$$

La unión de A y B es el conjunto difuso más pequeño que contiene a A y B . Si C es cualquier conjunto difuso que contiene a A y B , entonces también contiene la unión de A y B . $A \cup B$ definido como en (2.13) contiene a ambos A y B ya que $\text{máx} [\mu_A(x), \mu_B(x)] \geq \mu_A(x)$ y $\text{máx} [\mu_A(x), \mu_B(x)] \geq \mu_B(x)$. Además, si C es cualquier conjunto difuso conteniendo a A y B , entonces $\mu_C(x) \geq \mu_A(x)$ y $\mu_C(x) \geq \mu_B(x)$. Por tanto, $\mu_C(x) \geq \text{máx} [\mu_A(x), \mu_B(x)] = \mu_{A \cup B}$, lo que significa que $A \cup B$ definido como en (2.13) es el conjunto difuso más pequeño que contiene a ambos A y B . La intersección se justifica de igual manera.

Las funciones que definen la unión y la intersección pueden generalizarse a condición de cumplir ciertas restricciones. Las funciones que cumplen estas condiciones se conocen respectivamente como Conorma Triangular (T-Conorma) y Norma Triangular (T-Norma). Algunas de las más usadas son:

Conomas	Normas
MAX(a,b)	MIN(a,b)
(a+b-ab)	(ab)
MIN(1,a+b)	MAX(0, a+b-1)

Como en la lógica clásica, las Conormas y Normas cumplen las leyes de Morgan que las relacionan.

Particiones Difusas

Dada una variable difusa A , definida en un rango entre u_1 y u_2 , es posible establecer en ella diversas particiones. Se conoce por **partición** a un conjunto de los conjuntos difusos que se han definido para la variable A . Una partición de A es uno de los subconjuntos que pueden formarse con los elementos (términos) de $T(A)$. Así, para la variable "*estatura*" una posible partición sería la correspondiente a la figura 2.6, con tres subconjuntos difusos, cada uno identificado por una etiqueta, {Bajo, Medio, Alto}, y una función de inclusión o pertenencia, $\{\mu_{Bajo}(t), \mu_{Medio}(t), \mu_{Alto}(t)\}$. Se dice que una **partición es completa** si para todos los valores posibles de U existe en la partición un conjunto con pertenencia no nula (es decir, los conjuntos definidos cubren todo U); así, completitud es el porcentaje de los elementos de U para los que existe en la partición un conjunto con pertenencia no nula frente al total de elementos de U . Se dice que dos conjuntos difusos están **solapados** si su intersección es no nula; de este modo, el solapamiento de un conjunto difuso es la relación del número de elementos que comparte con otros conjuntos de la misma partición, respecto del número total de elementos que lo forman.

Para la realización de controladores basados en lógica difusa se han de definir particiones de las variables del controlador. Normalmente se recomienda que estas particiones sean completas, con un solapamiento del 20 % al 50 %, y en número impar. Normalmente se emplean particiones de 3 o 7 conjuntos, pues la complejidad no es excesiva y permiten una precisión suficiente en la descripción de los valores de la variable. Además, se recomienda definir conjuntos de tipo T (triangulares) en torno a puntos singulares, como el cero. Los nombres de los conjuntos difusos que forman una partición se suelen expresar en forma abreviada por sus iniciales; así, una partición típica como {Negativo Grande, Negativo Pequeño, Cero, Positivo Pequeño, Positivo Grande} se representa como {NG, NP, CE, PP, PG} o, en inglés, {NL, NS, ZE, PS, PL} (Negative Large, Negative Small, Zero, Positive Small, Positive Large).

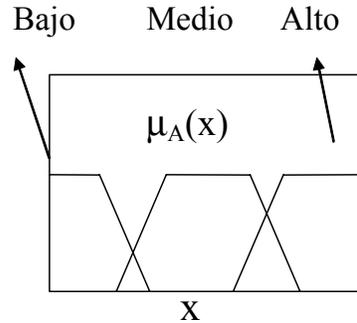


Figura 2.6: Conjuntos difusos para la variable Estatura.

Inferencia Difusa

También como en el caso de la lógica clásica, la lógica difusa se ocupa del razonamiento formal con proposiciones, pero a diferencia de ésta, los valores de las proposiciones pueden tomar valores intermedios entre verdadero y falso.

De la misma forma que se define un isomorfismo entre la lógica y la teoría de conjuntos clásica, es posible también definir un isomorfismo entre la lógica y la teoría de conjuntos difusos, y de éstas a su vez con un Álgebra de Boole. De esta forma, los conjuntos difusos también representan predicados en la lógica proposicional. El objeto de la lógica difusa es proporcionar un soporte formal al razonamiento basado en el lenguaje natural, que se caracteriza por tratarse de un razonamiento de tipo aproximado, que hace uso de unas proposiciones que a su vez expresan información de carácter impreciso.

Relaciones Difusas y el Principio de Extensión

Sean U y V dos conjuntos clásicos arbitrarios. El producto Cartesiano de U y V , denotado por $U \times V$, es el conjunto no difuso de todos los pares ordenados (u, v) tal que $u \in U$ y $v \in V$,

$$U \times V = \{(u, v) \mid u \in U \text{ y } v \in V\} \quad (2.15)$$

El orden en que aparecen U y V es importante, ya que si $U \neq V$, entonces $U \times V \neq V \times U$. En general el producto Cartesiano de n conjuntos no difusos arbitrarios U_1, U_2, \dots, U_n denotado por $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$, es el conjunto no difuso de todas las n -tuplas (u_1, u_2, \dots, u_n) tales que $u_i \in U_i$ para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$; esto es,

$$U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, \dots, u_n \in U_n\} \quad (2.16)$$

Una *relación* (no difusa) entre conjuntos (no difusos) U_1, U_2, \dots, U_n es un subconjunto del producto Cartesiano $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$, esto es, si empleamos $Q(U_1, U_2, \dots, U_n)$ para denotar una relación entre U_1, U_2, \dots, U_n entonces

$$Q(U_1, U_2, \dots, U_n) \subset U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \quad (2.17)$$

Como un caso especial, una relación binaria entre conjuntos (no difusos) U y V es un subconjunto del producto Cartesiano $U \times V$.

Definición 2.4 *Una relación difusa es un conjunto difuso definido en el producto Cartesiano de conjuntos crisp U_1, U_2, \dots, U_n . Con el esquema de representación*

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in U\} \quad (2.18)$$

una relación difusa Q en $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ es definida como el conjunto difuso

$$Q = \{((u_1, u_2, \dots, u_n), \mu_Q(u_1, u_2, \dots, u_n)) \mid (u_1, u_2, \dots, u_n) \in U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n\} \quad (2.19)$$

donde $\mu_Q : U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \rightarrow [0, 1]$.

Como un caso especial, una relación binaria difusa es un conjunto difuso definido en el producto Cartesiano de dos conjuntos crisp. Una relación binaria sobre un producto Cartesiano finito es representado usualmente por una matriz relacional difusa, esto es, una matriz cuyos elementos son los valores de pertenencia de los pares correspondientes a la relación difusa.

El **principio de extensión** permite convertir conceptos no difusos en difusos, siendo además la base de la inferencia en los sistemas difusos. Sean U y V dos universos de discurso,

y f una función de U a V . En general, para un conjunto difuso A en U el principio de extensión define un conjunto difuso B en V dado por

$$\mu_B(v) = \sup_{u \in f^{-1}(v)} [\mu_A(u)] \quad (2.20)$$

es decir $\mu_B(v)$ es el máximo de $\mu_A(u)$ para todos los $u \in U$ que cumplen que $f(u) = v$, donde $v \in V$ y suponiendo que $f^{-1}(v)$ no es vacío. Si $f^{-1}(v)$ es vacío para algún $v \in V$, se definirá $\mu_B(v) = 0$.

2.1.2. Proyecciones y Extensiones Cilíndricas

Se definen estos conceptos ya que una relación crisp está definida en el espacio producto de dos o más conjuntos. Por ejemplo, considerando el conjunto

$$A = \{(x, y) \in R^2 \mid (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$$

que es una relación en $U \times V = R^2$. La proyección de A sobre U es $A_1 = [0, 1] \subset U$ y la proyección de A sobre V es $A_2 = [0, 1] \subset V$; ver la figura 2.7. La extensión de A_1 sobre $U \times V = R^2$ es $A_{1E} = [0, 1] \times (-\infty, \infty) \subset R^2$. Estos conceptos se pueden extender a las relaciones difusas.

Definición 2.5 Sea Q una relación difusa en $U_1 \times \dots \times U_n$ y $\{i_1, \dots, i_k\}$ una subsecuencia de $\{1, 2, \dots, n\}$, entonces la proyección de Q sobre $U_{i_1} \times \dots \times U_{i_k}$ es una relación difusa Q_P definida por la función de pertenencia

$$\mu_{Q_P}(u_{i_1}, \dots, u_{i_k}) = \max_{u_{j_1} \in U_{j_1}, \dots, u_{j_{(n-k)}} \in U_{j_{(n-k)}}} \mu_Q(u_1, \dots, u_n) \quad (2.21)$$

donde $\{u_{j_1}, \dots, u_{j_{(n-k)}}\}$ es el complemento de $\{u_{i_1}, \dots, u_{i_k}\}$ con respecto a $\{u_1, \dots, u_n\}$.

Como un caso especial, si Q es una relación binaria difusa en $U \times V$, entonces la proyección de Q sobre V , denotada por Q_1 , es el conjunto difuso en V definido por:

$$\mu_{Q_1}(x) = \max_{y \in V} \mu_Q(x, y) \quad (2.22)$$

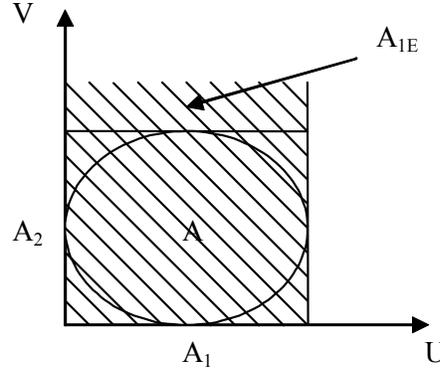


Figura 2.7: Proyecciones y Extensiones Cilíndricas de una relación.

Definición 2.6 Sea Q_P una relación difusa en $U_{i_1} \times \dots \times U_{i_k}$ y $\{i_1, \dots, i_k\}$ es una subsecuencia de $\{1, 2, \dots, n\}$, entonces la extensión cilíndrica de Q_P a $U_1 \times \dots \times U_n$ es una relación difusa Q_{PE} en $U_1 \times \dots \times U_n$ definida por

$$\mu_{Q_{PE}}(u_1, \dots, u_n) = \mu_{Q_P}(u_{i_1}, \dots, u_{i_k}) \quad (2.23)$$

Como un caso especial, si Q_1 es un conjunto difuso en U , entonces la extensión cilíndrica de Q_1 a $U \times V$ es una relación difusa Q_{1E} en $U \times V$ definida por

$$\mu_{Q_{1E}}(x, y) = \mu_{Q_1}(x) \quad (2.24)$$

La definición (2.23) también es válida para relaciones crisp.

Sean $P(U, V)$ y $Q(V, W)$ dos relaciones binarias crisp que compartan un conjunto V . La composición de P y Q , denotada por $P \circ Q$ se define como una relación en $U \times W$ tal que $(x, z) \in P \circ Q$ si y solo si existe una $y \in V$ tal que $(x, y) \in P$ y $(y, z) \in Q$.

$P \circ Q$ es la composición de $P(U, V)$ y $Q(V, W)$ si y solo si

$$\mu_{P \circ Q}(x, z) = \max_{y \in V} t[\mu_P(x, y), \mu_Q(y, z)] \quad (2.25)$$

para cualquier $(x, z) \in U \times W$, donde t es cualquier t-norma.

Definición 2.7 *La composición de las relaciones difusas $P(U, V)$ y $Q(V, W)$, denotada por $P \circ Q$, está definida como una relación difusa en $U \times W$ cuya función de pertenencia está dada por (2.25) .*

Debido a que la t-norma en (2.25) puede tomar una variedad de fórmulas, para cada t-norma podemos obtener una composición en particular. Las dos composiciones más usadas comúnmente son la composición $\text{máx} - \text{mín}$ y la composición $\text{máx} - \text{product}$, que se definen a continuación:

- La *composición* $\text{máx} - \text{mín}$ de relaciones difusas $P(U, V)$ y $Q(V, W)$ es una relación difusa $P \circ Q$ en $U \times W$ definida por la función de pertenencia

$$\mu_{P \circ Q}(x, z) = \max_{y \in V} \min t [\mu_P(x, y), \mu_Q(y, z)] \quad (2.26)$$

donde $(x, z) \in U \times W$.

- La *composición* $\text{máx} - \text{product}$ de relaciones difusas $P(U, V)$ y $Q(V, W)$ es una relación difusa $P \circ Q$ en $U \times W$ definida por la función de pertenencia

$$\mu_{P \circ Q}(x, z) = \max_{y \in V} t [\mu_P(x, y), \mu_Q(y, z)] \quad (2.27)$$

donde $(x, z) \in U \times W$.

2.2. Variables Lingüísticas y Reglas Difusas SI-ENTONCES (IF-THEN)

2.2.1. De las Variables Numéricas a las Variables Lingüísticas

En nuestra vida diaria, las palabra en ocasiones sirven para describir variables. Por ejemplo, cuando decimos "hoy hace calor", o de forma equivalente, "la temperatura de hoy es alta", usamos la palabra **alta** para describir la variable de "la temperatura de hoy". De esta

forma, la variable "la temperatura de hoy", toma la palabra **alta** para describir su valor. Claramente, la variable "la temperatura de hoy" puede tomar los números $25^{\circ}C$, $19^{\circ}C$, etc., como sus valores. Cuando una variable toma números como sus valores, tenemos un marco matemático bien establecido para formularlo. Pero cuando una variable toma palabras como sus valores, no tenemos un marco formal para expresarlo en la teoría matemática clásica. Para proporcionar un marco formal, se introdujo el concepto de variables lingüísticas. Si una variable puede tomar palabras en un lenguaje natural como sus valores, se le llama *variable lingüística*.

Definición 2.8 *Si una variable puede tomar palabras en lenguajes naturales como sus valores, se le llama variable lingüística, donde las palabras son caracterizadas como conjuntos difusos definidos en el universo de discurso en el que la variable es definida.*

Definición 2.9 [54] y [55] *Una variable lingüística se caracteriza por (\hat{X}, T, U, M) , donde*

- \hat{X} es el nombre de la variable lingüística; por ejemplo, \hat{X} podría ser la velocidad del auto, cuya representación se muestra en la figura 2.8.
- T es el conjunto de valores lingüísticos que \hat{X} puede tomar; en el ejemplo anterior $T = \{\text{lenta, media, rápida}\}$
- U es el dominio físico actual en el que la variable lingüística \hat{X} toma valores (crisp) cuantitativos; en el ejemplo anterior $U = [0, V_{\text{máx}}]$.
- M es la regla semántica que relaciona cada valor lingüístico en T con un conjunto difuso en U ; en el ejemplo anterior M relaciona lenta, media y rápida con la función de pertenencia que se muestra en la figura 2.8.

De estas definiciones vemos que las variables lingüísticas son extensiones de las variables numéricas en el sentido de que permiten tomar conjuntos difusos como sus valores; ver la figura 2.9.

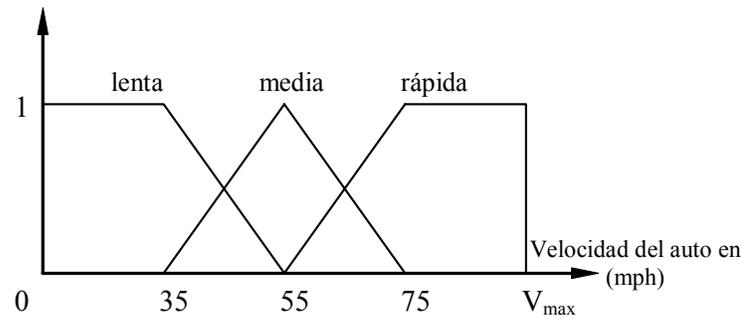


Figura 2.8: La velocidad de un auto como una variable lingüística puede tomar tres conjuntos difusos.

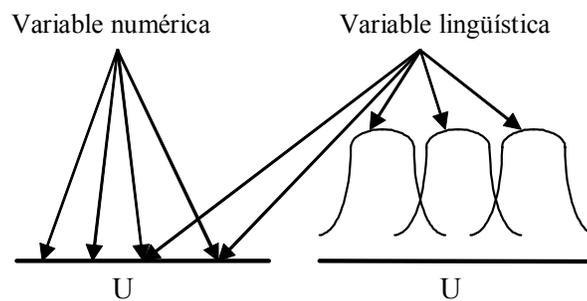


Figura 2.9: De la variable numérica a la variable lingüística.

Introduciendo el concepto de variables lingüísticas, podemos formular descripciones vagas del lenguaje natural en términos matemáticos precisos. Este es el primer paso para incorporar el conocimiento humano dentro de los sistemas de ingeniería en una manera sistemática y eficiente.

2.2.2. Reglas difusas SI-ENTONCES (IF-THEN)

En los sistemas difusos y de control, el conocimiento humano se representa en términos de reglas SI-ENTONCES. Una regla difusa SI-ENTONCES es una declaración expresada como

$$\text{SI } \langle \text{proposición difusa} \rangle, \text{ ENTONCES } \langle \text{proposición difusa} \rangle \quad (2.28)$$

Proposiciones Difusas

Existen dos tipos de proposiciones: las proposiciones difusas atómicas y las proposiciones difusas compuestas. Una proposición difusa atómica es una declaración simple

$$\hat{x} \text{ es } A \quad (2.29)$$

donde \hat{x} es una variable lingüística, y A es un valor lingüístico de \hat{x} (esto es, A es un conjunto difuso definido en el dominio físico de \hat{x}). Por ejemplo, si \hat{x} representa la velocidad del auto del ejemplo anterior, se tienen las siguientes proposiciones difusas (las primeras tres son proposiciones atómicas difusas y las últimas tres son proposiciones compuestas difusas):

$$\hat{x} \text{ es } L \quad (2.30)$$

$$\hat{x} \text{ es } M \quad (2.31)$$

$$\hat{x} \text{ es } R \quad (2.32)$$

$$\hat{x} \text{ es } L \text{ o } \hat{x} \text{ no es } M \quad (2.33)$$

$$\hat{x} \text{ no es } L \text{ y } \hat{x} \text{ no es } R \quad (2.34)$$

$$(\hat{x} \text{ es } L \text{ y } \hat{x} \text{ no es } R) \text{ o } \hat{x} \text{ es } M \quad (2.35)$$

donde L, M y R denotan los conjuntos difusos "lento", "medio" y "rápido", respectivamente.

Se puede notar que en una proposición compuesta difusa, las proposiciones atómicas difusas son independientes, esto es, las x 's en la misma proposición de (2.33)-(2.35) pueden ser diferentes variables. En realidad, las variables lingüísticas en una proposición difusa son en general diferentes. Por ejemplo sea x la velocidad de un auto y $y = \dot{x}$ la aceleración del auto, entonces si se define el conjunto alta (A) para la aceleración, se tiene la siguiente proposición difusa compuesta

$$\hat{x} \text{ es } R \text{ y } \hat{y} \text{ es } A$$

Por consiguiente, las proposiciones difusas deben entenderse como *relaciones difusas*. Se pueden determinar las funciones de pertenencia para estas relaciones.

Las reglas difusas combinan uno o más conjuntos difusos de entrada, llamados **antecedentes o premisas**, y les asocian un conjunto difuso de salida, llamado **consecuente o consecuencia**. Los conjuntos difusos de la premisa se asocian mediante conjuntivas lógicas como y, o, etc. Una regla típica, de tipo IF-THEN, para un sistema de control sería "*Si error es positivo_pequeño y derivada_de_error es negativo_pequeño Entonces acción es positiva_pequeña*", que se suele expresar abreviadamente mediante expresiones del tipo *Si E es PP y dE es NP Entonces U es PP*.

Las reglas difusas permiten expresar el conocimiento que se dispone sobre la relación entre antecedentes y consecuentes. Para expresar este conocimiento de forma completa normalmente se precisa de varias reglas, que se agrupan formando lo que se conoce como una **base de reglas**, es decir, el conjunto de reglas que expresan las relaciones conocidas entre antecedentes y consecuentes.

La base de reglas se puede representar bien como una tabla de las reglas que la forman, o bien como una **memoria asociativa difusa o FAM** (*Fuzzy Associative Memory*). Las FAM son matrices que representan la consecuencia de cada regla definida para cada combinación de dos entradas. Las FAM permiten realizar una representación gráfica clara de las relaciones entre dos variables lingüísticas de entrada y la variable lingüística de salida, pero requiere que se indique explícitamente todas las reglas que se pueden formar con estas dos variables

de entrada. Cuando el número de conjuntos de cada una de las particiones de entrada crece las FAM se hacen difícilmente manejables. Es posible también definir FAM de más de dos dimensiones, pero su tamaño se hace rápidamente excesivo y son más difíciles aún de manejar. En su lugar se suele trabajar con varias FAM de dimensión dos, para así definir subconjuntos de reglas que asocien las entradas de dos en dos en la base de reglas general [41].

Formalmente, una **base de reglas difusa** es una colección de reglas $R^{(l)}$ con el formato

$$R^{(l)}: \text{IF } \hat{x}_1 \text{ is } F_1^l \text{ and...and } \hat{x}_n \text{ is } F_n^l \text{ THEN } \hat{y} \text{ is } G^l \quad (2.36)$$

donde F_1^l y G^l son conjuntos difusos en $U_i \subset \mathfrak{R}$ y $V \subset \mathfrak{R}$, respectivamente, y $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)^T \in U_1 \times \dots \times U_n$ e $\hat{y} \in V$ son variables lingüísticas. Este formato de reglas se conoce como **difuso puro o de tipo Mamdani**, por ser quien primero las propuso en 1974 para realizar un controlador difuso que estabiliza un sistema en torno a su punto de trabajo. Otro formato frecuente para las reglas es el llamado de tipo Sugeno. En este caso, la función de salida es una combinación lineal de las variables de entrada, o en un caso más general, una función genérica de las variables de entrada.

$$R^{(l)}: \text{IF } \hat{x}_I \text{ is } F_1^l \text{ and...and } \hat{x}_n \text{ is } F_n^l \text{ THEN } \hat{y}^l = f^l(\mathbf{x}) \quad (2.37)$$

Si llamamos M al número de reglas IF- THEN (SI-ENTONCES) de la base de reglas entonces $l = 1, 2, \dots, M$ en las ecuaciones (2.36) y (2.37). El vector \mathbf{x} representa el conjunto de las entradas, mientras que y es la salida del sistema difuso. Los sistemas difusos descritos con n entradas x_i , y una sola salida y , se conocen como **MISO** (Multiple Input Single Output), mientras que los que tienen varias salidas (de 1 hasta k) se conocen como **MIMO** (Multiple Input Multiple Output). Para estos últimos sistemas, se puede generalizar el formato anterior de las reglas, o bien descomponerlo en k sistemas de tipo MISO.

2.2.3. La Lógica Difusa y el Razonamiento Aproximado

La lógica es el estudio de los métodos y principios del razonamiento donde el razonamiento significa obtener nuevas proposiciones de las ya existentes.

En la lógica clásica las proposiciones pueden ser ciertas o falsas, es decir, el valor real de una proposición es 0 o 1.

La lógica difusa generaliza la lógica clásica de dos valores permitiendo que los valores de una proposición sea cualquier número en el intervalo $[0,1]$.

Esta generalización nos permite realizar un razonamiento aproximado, esto es, deducir conclusiones imprecisas (proposiciones difusas) a partir de una colección de premisas imprecisas (proposiciones difusas).

Modus Ponens Generalizado y Modus Tollens Generalizado

Las **reglas difusas** son básicamente de tipo IF-THEN (SI-ENTONCES) y expresan una relación o proposición difusa. En lógica difusa el razonamiento no es preciso, sino aproximado, lo cual quiere decir que se puede inferir de una regla una conclusión aunque el antecedente (premisa) no se cumpla plenamente. Existen dos métodos básicos de inferencia entre reglas o **leyes de inferencia**, el **modus ponens generalizado (GMP)** y el **modus tollens generalizado (GMT)**, que representan extensiones o generalizaciones del razonamiento clásico. El **GMP** se conoce como **razonamiento directo** y puede resumirse de la forma siguiente:

(Conocimiento): Si x es A Entonces y es B

(Hecho): \hat{x} es A'

(Consecuencia): \hat{y} es B'

Donde A , A' , B Y B' son conjuntos difusos. Esta relación se expresa también como $B' = A' \circ R$.

El **GMT** se conoce como **razonamiento inverso** y puede resumirse de la forma siguiente:

(Conocimiento): Si \hat{x} es A Entonces \hat{y} es B

(Hecho): \hat{y} es B'

(Consecuencia): \hat{x} es A'

Lo que se expresa como $A' = B' \circ R$

Las matemáticas difusas proporcionan un punto de inicio y un lenguaje para los sistemas difusos y el control difuso. Las matemáticas difusas son un campo enorme donde sus principios se han desarrollado para reemplazar los conjuntos de la teoría matemática clásica por conjuntos difusos. De esta forma la teoría de la matemática clásica se puede transformar en matemática difusa, observando el nacimiento de palabras como topología difusa, álgebra difusa, análisis difuso, etc. Estos principios y conceptos son muy útiles dentro de los sistemas difusos y del control difuso.

En el siguiente capítulo se citan algunos conceptos básicos de los sistemas difusos y del control difuso.

Capítulo 3

Sistemas Difusos y Control Difuso

Podemos observar que los principios de la lógica y de la matemática difusa son usados para desarrollar los sistemas de control difuso, de estos principios se derivan fórmulas matemáticas compactas que nos ayudan a representar los diferentes tipos de sistemas difusos.

3.1. Sistemas Difusos

Una de las principales aplicaciones de la lógica difusa es el diseño de sistemas de control que, a partir de unas entradas, deben generar unas salidas para actuar sobre determinados mecanismos. Un ejemplo podría ser el sistema de control para regular la velocidad de un ventilador en función de la temperatura ambiente. En este caso, la única entrada del sistema sería el valor de la temperatura, por ejemplo en grados centígrados, y la única salida, el valor, en revoluciones por minuto (rpm), de la velocidad necesaria del ventilador para conseguir una temperatura ideal.

En años recientes el campo de los sistemas difusos y el control ha tenido un progreso acelerado. Motivados por el éxito del control difuso en productos de consumo y en el control de procesos industriales, ha habido un incremento en la cantidad de trabajos sobre los estudios de los sistemas difusos y el control difuso.

Los sistemas difusos son sistemas basados en el conocimiento o en reglas. El corazón de un

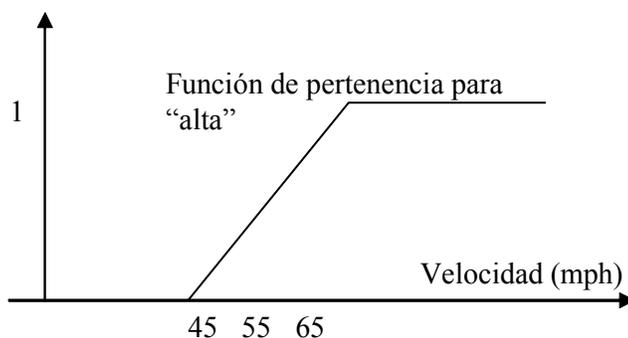


Figura 3.1: Función de pertenencia para "alta", donde el eje horizontal representa la velocidad del auto y el eje vertical representa el valor miembro para "alta".

sistema difuso es la base del conocimiento que consiste de las llamadas reglas SI-ENTONCES (IF-THEN rules). Una regla SI-ENTONCES es una declaración SI-ENTONCES en la cual algunas palabras son caracterizadas por funciones de pertenencia continuas. Por ejemplo, la siguiente es una regla difusa SI-ENTONCES.

$$\begin{aligned} \text{SI la velocidad de un auto es alta,} \\ \text{ENTONCES se aplica menor fuerza al acelerador} \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde las palabras "alta" y "menor" son caracterizadas por las funciones de pertenencia mostradas en la figura 3.1 y 3.2 respectivamente. Un sistema difuso es construido de una colección de reglas difusas SI-ENTONCES.

El punto de inicio para construir un sistema difuso es obtener una colección de reglas difusas basadas en el conocimiento humano de los expertos. El siguiente paso es combinar estas reglas en un sistema simple. Los diferentes sistemas difusos emplean diferentes principios de esta combinación.

Existen tres tipos de sistemas difusos empleados comúnmente:

1. sistemas difusos puros o de Mamdani,
2. sistemas difusos Takagi-Sugeno-Kang (TSK), y

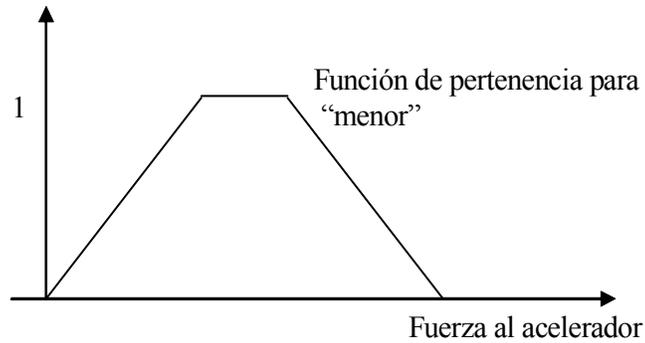


Figura 3.2: Función de pertenencia para "menor", donde el eje horizontal representa la fuerza aplicada al acelerador y el eje vertical representa el valor miembro para "menor".

3. sistemas difusos con fuzzyficador y defuzzyficador.

La configuración básica de un sistema difuso puro se muestra en la figura 3.3. La base de reglas difusas representa la colección de reglas SI-ENTONCES. Por ejemplo, para el controlador de un auto, la base de reglas difusas consiste de las siguientes tres reglas:

$$\begin{array}{l} \text{SI la velocidad es baja,} \\ \text{ENTONCES se aplica más fuerza al acelerador} \end{array} \quad (3.2)$$

$$\begin{array}{l} \text{SI la velocidad es media,} \\ \text{ENTONCES se aplica una fuerza normal al acelerador} \end{array} \quad (3.3)$$

$$\begin{array}{l} \text{SI la velocidad es alta,} \\ \text{ENTONCES se aplica menor fuerza al acelerador} \end{array} \quad (3.4)$$

el dispositivo de inferencia difusa combina las reglas difusas SI-ENTONCES dentro de un mapeo de conjuntos difusos en el espacio de entrada $U \subset R^n$ a conjuntos difusos en el espacio de salida $V \subset R$ basado en principios de la lógica difusa. Si existiera una línea de retroalimentación en la figura 3.3, el sistema se transforma en un sistema dinámico difuso.

El principal problema con el sistema difuso puro es que sus entradas y salidas son conjuntos difusos (palabras en lenguajes naturales), por el contrario en los sistemas de ingeniería

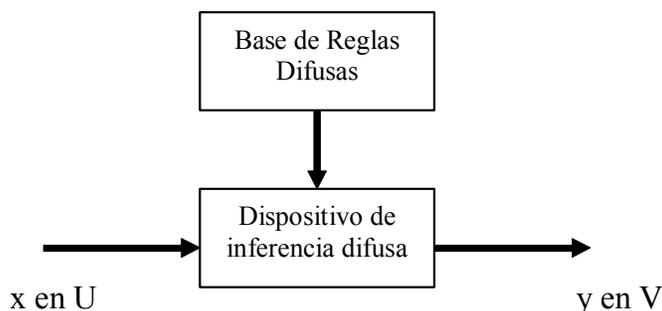


Figura 3.3: Configuración básica de los sistemas difusos puros.

las entradas y las salidas son variables valuadas en la realidad. Para resolver este problema, Takagi, Sugeno y Kang propusieron otro sistema difuso cuyas entradas y salidas son variables valuadas en la realidad.

Para considerar las reglas difusas SI-ENTONCES en la forma de 3.1, el sistema Takagi-Sugeno-Kang (TSK) utiliza reglas en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{SI la velocidad } \hat{x} \text{ de un auto es alta,} \\ \text{ENTONCES la fuerza del acelerador es } \hat{y} = cx \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde la palabra "alta" tiene el mismo significado que en 3.1, y c es una constante. Comparando 3.5 y 3.1 podemos ver que la parte ENTONCES de la regla cambia de una descripción utilizando palabras en lenguajes naturales a una fórmula matemática simple. Este cambio hace más fácil combinar las reglas. En realidad, el sistema difuso Takagi-Sugeno-Kang es una media ponderada tomada de los valores en las partes ENTONCES de las reglas. La configuración básica del sistema difuso Takagi-Sugeno-Kang se muestra en la figura 3.4.

Los problemas principales con el sistema difuso Takagi-Sugeno-Kang son: (i) su parte ENTONCES es una fórmula matemática y por tanto no puede proporcionar un marco natural que represente el conocimiento humano, y (ii) no hay mucha libertad para aplicar diferentes principios en lógica difusa, debido a esto la versatilidad de los sistemas difusos no está muy bien representada en este marco. Para resolver estos problemas empleamos los sistemas difusos con fuzzificador y defuzzificador, su configuración se muestra en la figura 3.5.

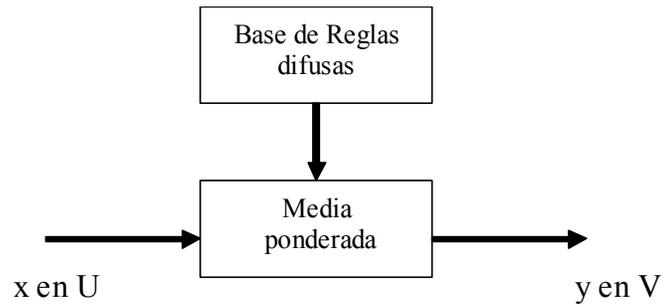


Figura 3.4: Configuración básica del sistema difuso Takagi-Sugeno-Kang.

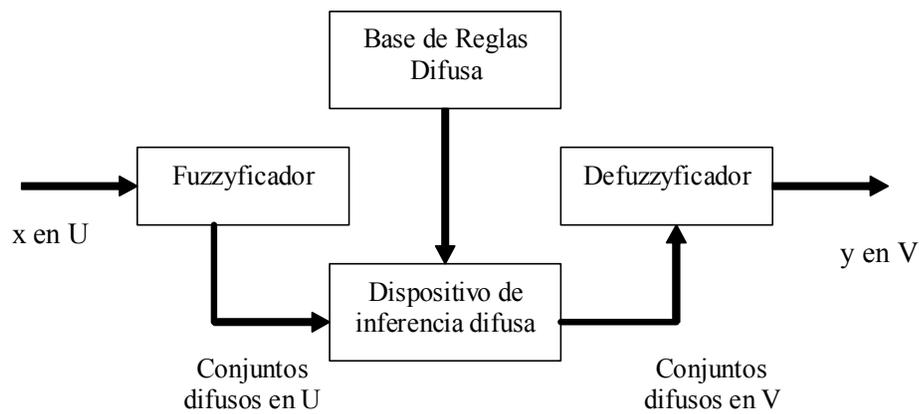


Figura 3.5: Configuración básica de los sistemas difusos con fuzzyficador y defuzzyficador.

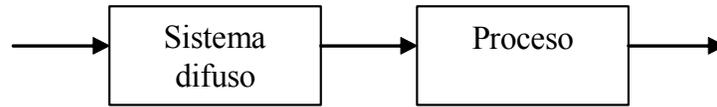


Figura 3.6: Sistema difuso como controlador en lazo abierto.

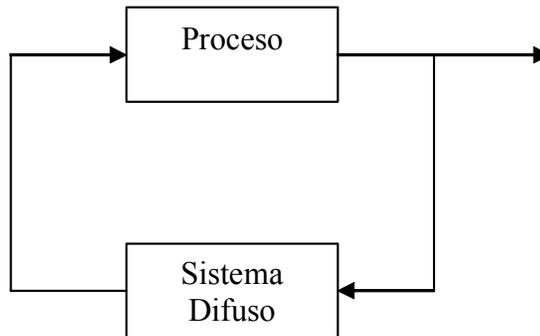


Figura 3.7: Sistema Difuso como controlador en lazo cerrado.

Los sistemas difusos mostrados en la figura 3.5 pueden ser usados como controladores en lazo abierto o controladores en lazo cerrado mostrados en las figuras 3.6 y 3.7.

3.2. Control Difuso

Los sistemas expertos de control difuso basados en reglas, conocido como **controladores difusos** o FLC (Fuzzy Logic Controllers), son sin duda la aplicación más extendida de la lógica difusa. De forma general, podemos observar en la figura 3.8, que para controlar un proceso o sistema se emplea un módulo controlador, que recibe como entradas una o varias variables de control llamadas generalmente referencias, \bar{R} , y una o varias variables de salida del propio proceso, \bar{S} , produciendo como salidas una o varias variables, que se conocen como actuadores \bar{A} . Normalmente el objetivo del control es mantener $\bar{R} = \bar{S}$.

La estructura típica de un controlador basado en un sistema difuso puede verse en la

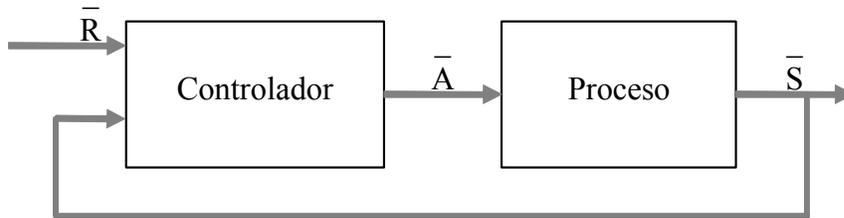


Figura 3.8: Control directo de un proceso o sistema.

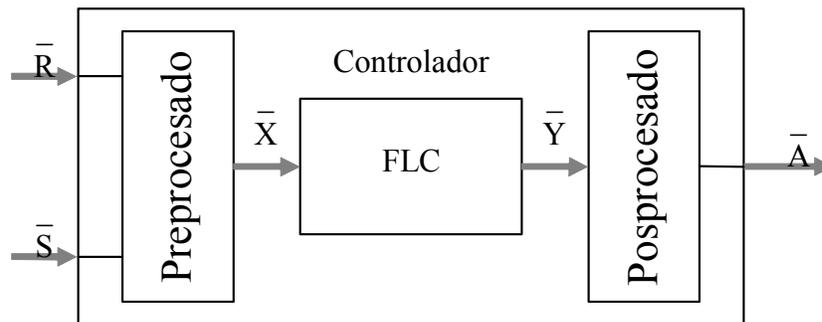


Figura 3.9: Estructura de un controlador (el núcleo FLC es el controlador difuso).

figura 3.9.

Es de destacar que el control difuso, que es la principal aplicación de los sistemas difusos, aparte de ser un tema de investigación, resulta muy importante desde el punto de vista industrial, en cuyo campo existen desde hace tiempo infinidad de aplicaciones para estos sistemas en funcionamiento.

La arquitectura del controlador a utilizar depende de la aplicación concreta a llevar a cabo. No resulta fácil realizar una clasificación genérica de todas las arquitecturas posibles de controladores basados en lógica difusa, sin embargo, existen grandes grupos dentro de los cuales podemos mencionar los controladores difusos directos sin optimización y los con-

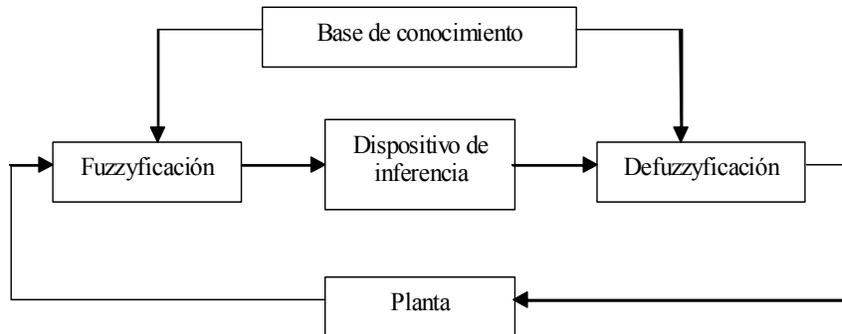


Figura 3.10: Esquema representativo de un control difuso.

troladores difusos directos con optimización, controladores difusos híbridos en los cuáles se incluyen los formados por la combinación de lógica difusa con redes neuronales y sistemas expertos. Actualmente, existe una gran cantidad de propuestas dentro de la combinación de la capacidad de aprendizaje de las redes neuronales y del procesamiento de información imprecisa de la lógica difusa.

En el área del control inteligente [25], la lógica difusa se ha utilizado para resolver de forma exitosa una gran variedad de problemas de diversa complejidad, en general las etapas más importantes utilizadas por un control difuso son las mostradas en la figura 3.10.

Las etapas mostradas en la figura 3.10 son:

- a) La fuzzyficación toma valores de la planta y los interpreta como valores lingüísticos.
- b) El dispositivo de inferencia realiza los planteamientos lógicos necesarios para la toma de decisiones.
- c) La defuzzyficación consiste en la conversión de datos lingüísticos a datos numéricos, mediante una ponderación y normalización de las sentencias lógicas antecedentes.
- d) La base de conocimiento, incluye los parámetros necesarios para la fuzzyficación, inferencia y defuzzyficación, los cuales pueden ser de naturaleza heurística u optimizados mediante alguna técnica particular.

3.2.1. Reglas Difusas

Las reglas difusas combinan uno o más conjuntos difusos de entrada, llamados **antecedentes o premisas**, y les asocian un conjunto difuso de salida, llamado **consecuente o consecuencia**. Los conjuntos difusos de la premisa se asocian mediante conjuntivas lógicas como y, o, etc. Una regla típica, de tipo SI-ENTONCES, para un sistema de control sería "Si error es positivo_pequeño y derivada _de_error es negativo_pequeño Entonces acción es positiva_pequeña", que suele expresar abreviadamente mediante expresiones de tipo Si E es PP y dE es NP Entonces U es PP.

Las reglas difusas permiten expresar el conocimiento que se dispone sobre la relación entre antecedentes y consecuentes. Para expresar este conocimiento de forma completa normalmente se precisa de varias reglas, que se agrupan formando lo que se conoce como una base de reglas.

La base de reglas se puede representar como una tabla de las reglas que la forma, o bien como una memoria asociativa difusa o FAM (fuzzy Associative Memory), que son matrices representando la consecuencia de cada regla definida para cada combinación de dos entradas.

3.2.2. Dispositivo de Inferencia Difusa

Se llaman **dispositivos de inferencia difusa** a los sistemas que interpretan las reglas de tipo IF-THEN de una base de reglas, con el fin de obtener los valores de salida a partir de los actuales valores de las variables lingüísticas de entrada al sistema. En un sistema difuso las reglas del tipo $R^{(l)} : IF \hat{x}_1 \text{ is } F_1^l \text{ and...and } \hat{x}_n \text{ is } F_n^l \text{ THEN } \hat{y} \text{ is } G^l$ donde F_1^l y G^l son conjuntos difusos en $U_i \subset R$ y $V \subset R$ $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)^T \in U_1 \times \dots \times U_n$ e $\hat{y} \in V$ son variables lingüísticas. Se interpreta como una implicación difusa de $F_1^l \times \dots \times F_n^l \rightarrow G^l$ en $U \times V$.

3.3. El doble papel de los sistemas difusos

Por una parte, los sistemas difusos son sistemas basados en reglas construidas a partir de una colección de reglas lingüísticas, y por otra parte, los sistemas difusos son mapeos no

lineales que en muchos casos se pueden representar por fórmulas precisas y compactas como en [41]:

$$f(x) = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l (\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x))}{\sum_{l=1}^M (\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x))}$$

la cuál representa un sistema de lógica difusa con defuzzyficador por media de centros, implicación difusa por la regla del producto y fuzzyficador singleton.

Una contribución importante de la teoría de sistemas difusos es proporcionar un procedimiento sistemático para transformar un conjunto de reglas lingüísticas a un mapeo no lineal.

Debido a que los mapeos no lineales son fáciles de implementar los sistemas difusos han encontrado su camino dentro de una variedad de aplicaciones en la Ingeniería.

3.4. Los sistemas difusos como aproximadores Universales

Como se ha mencionado, ciertos tipos de sistemas difusos se pueden escribir como fórmulas no lineales compactas [41]. Por una parte estas fórmulas no lineales compactas simplifican los cálculos de los sistemas; y por otra parte, nos proporcionan una oportunidad para analizar los sistemas difusos con más detalle. Podemos ver que los sistemas difusos son tipos particulares de funciones no lineales, por tanto, no hay ningún problema si los sistemas difusos son usados como controladores, ejecutor de decisiones, procesadores de señales o cualquier otro sistema, es interesante conocer la capacidad de los sistemas difusos desde un punto de vista de aproximación de función. Por ejemplo, ¿qué tipos de funciones no lineales pueden representar o aproximar los sistemas difusos y con qué grado de aproximación? Pero si los sistemas difusos pueden aproximar cualquier función no lineal en una aproximación arbitraria, por tanto podrían ser muy útiles en una amplia variedad de aplicaciones.

El decir que los sistemas difusos son aproximadores universales, nos indica que pueden aproximar cualquier función sobre un conjunto compacto a una aproximación arbitraria. Este

resultado muestra la existencia de un sistema difuso óptimo, sin embargo, no nos provee de métodos para encontrarlo. De hecho, encontrar el sistema difuso es más difícil que probar su existencia. Dependiendo de la información proporcionada, podemos o no encontrar el sistema difuso.

Para responder la pregunta de cómo encontrar el sistema difuso óptimo, primero es necesario ver qué información está disponible para la función no lineal $g(x) : U \subset R^n \rightarrow R$, que se nos pide aproximar. En general, podemos encontrar tres situaciones:

1. La fórmula analítica de $g(x)$ es conocida.
2. La fórmula analítica de $g(x)$ es desconocida, pero para cualquier $x \in U$ podemos determinar la $g(x)$ correspondiente. Esto es, $g(x)$ es una caja negra -conocemos el comportamiento entrada-salida de $g(x)$ pero no conocemos los detalles internos.
3. La fórmula analítica de $g(x)$ es desconocida y sólo se proporciona un número limitado de pares entrada-salida $(x^j, g(x^j))$, donde $x^j \in U$ no se pueden elegir arbitrariamente.

Para el diseño de los sistemas difusos existen diferentes métodos, de acuerdo a la información que se dispone.

3.5. Diseño de sistemas Difusos empleando el Entrenamiento del Gradiente Descendente

Hasta ahora se han establecido las bases de la lógica y sistemas difusos y se han presentado los sistemas difusos de control, quizá la aplicación más importante, especialmente a nivel industrial. Lejos de ser entes estáticos los sistemas difusos pueden ser entrenados para optimizar su buen funcionamiento. Los sistemas difusos de control son aproximadores funcionales genéricos, es decir, dado cierto nivel de error, se puede encontrar un controlador difuso que aproxime cualquier función con un error menor al establecido, y para ello se pueden emplear diversas técnicas, algunas procedentes del campo de las redes neuronales (sistemas neuroborrosos), y otras de otros campos, como los algoritmos genéticos [19], [40].

Existen numerosos algoritmos de aprendizaje que se pueden aplicar a los sistemas difusos, algunos de los más importantes son:

- Entrenamiento del gradiente descendente.
- Algoritmos genéticos
- Mínimos cuadrados.
- Tablas de búsqueda.

A continuación se presenta el algoritmo de aprendizaje del gradiente descendente.

3.5.1. Estructura del Sistema Difuso

Se ha observado que en el esquema de tablas de búsqueda, las funciones de pertenencia se fijan en el primer paso y no dependen de los pares entrada-salida; es decir, las funciones de pertenencia no se optimizan de acuerdo a los pares entrada-salida. Desde un punto de vista conceptual, el diseño de sistemas difusos a partir de los pares entrada-salida podrían ser clasificados dentro de dos tipos de aproximación. En la primera aproximación, las reglas difusas SI-ENTONCES (IF-THEN) se generan primero de los pares entrada-salida, y el sistema difuso se construye a partir de estas reglas de acuerdo a cierta elección del dispositivo de inferencia difusa, el fuzzyficador y defuzzyficador. En la segunda aproximación, la estructura del sistema difuso se especifica primero de algunos parámetros en la estructura libres de cambio, y así, estos parámetros se determinan de acuerdo con los pares entrada-salida [41].

Primero, se especifica la estructura del sistema difuso que se diseñará. Si elegimos un sistema difuso con un dispositivo de inferencia de producto, un fuzzyficador singleton, defuzzyficador de promedio de centros y función de pertenencia Gaussiana. De esta forma asumimos que el sistema a diseñar tiene la siguiente forma:

$$f(x) = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l \left[\prod_{i=1}^n \exp \left(- \left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l} \right)^2 \right) \right]}{\sum_{l=1}^M \left[\prod_{i=1}^n \exp \left(- \left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l} \right)^2 \right) \right]} \quad (3.6)$$

donde M es fija, \bar{y}^l , \bar{x}_i^l y σ_i^l son parámetros libres (elegimos $a_i^l = 1$). Aunque la estructura del sistema difuso se elige como en (3.6) el sistema difuso no se ha podido diseñar debido a que

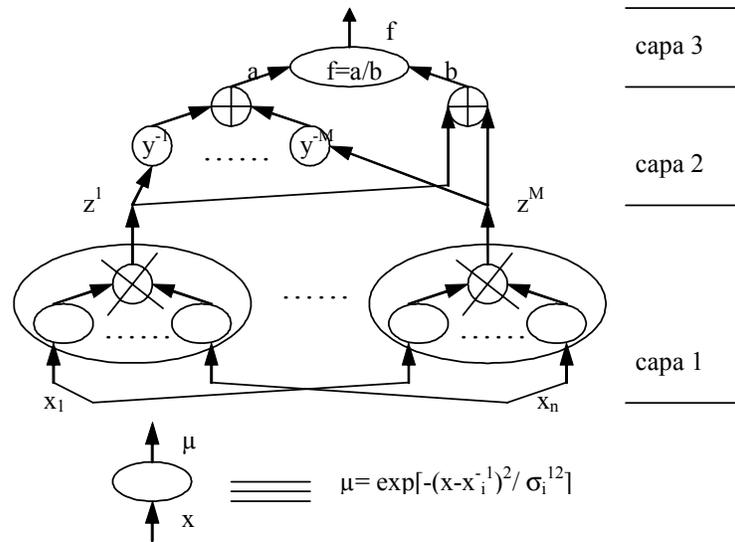


Figura 3.11: Representación de una red para el sistema difuso.

los parámetros \bar{y}^l , \bar{x}_i^l y σ_i^l no se han especificado. Una vez elegidos los parámetros \bar{y}^l , \bar{x}_i^l y σ_i^l , podemos obtener el sistema difuso diseñado; esto es, el diseñar el sistema difuso equivale ahora a determinar los parámetros \bar{y}^l , \bar{x}_i^l y σ_i^l .

Para determinar estos parámetros de forma óptima, podemos representar el sistema difuso $f(x)$ de (3.6) como una red con alimentación hacia adelante. Específicamente, el mapeo de la entrada $x \in U \subset R^n$ a la salida $f(x) \in V \subset R$ puede ser implementado de acuerdo a las siguientes operaciones, primero, la entrada x pasa a través de un operador producto Gaussiano para ser $z^l = \prod_{i=1}^n \exp\left(-\left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l}\right)^2\right)$ así, z^l pasa a través de un operador suma y un operador suma de promedios para obtener $b = \sum_{l=1}^M z^l$ y $a = \sum_{l=1}^M \bar{y}^l z^l$ finalmente, la salida del sistema difuso se obtiene como $f(x) = a/b$. Estas tres operaciones se muestran en la figura 3.11 como una red de tres capas con alimentación hacia adelante.

3.5.2. Diseño de los Parámetros por el Gradiente Descendente

- **Paso 1. Determinación de la Estructura y colocación de los parámetros iniciales.** Elegir el sistema difuso en la forma de (3.6) y determina M . M más grande produce más parámetros y más cálculos, pero proporciona una mejor exactitud de la aproximación. Especificar los parámetros iniciales $\bar{y}^l(0)$, $\bar{x}_i^l(0)$ y $\sigma_i^l(0)$. Estos parámetros iniciales se pueden determinar de acuerdo a las reglas lingüísticas de los expertos, o se eligen de tal manera que las funciones de pertenencia correspondientes cubren uniformemente los espacios de entrada y salida. Para aplicaciones particulares se pueden emplear métodos especiales.
- **Paso 2. La entrada presente y cálculo de la salida del sistema difuso.** Para un par entrada-salida dado $(x_0^p; y_0^p)$, $p = 0, 1, 2, \dots$, y en la q -ésima etapa de entrenamiento $q = 0, 1, 2, \dots$, el presente x_0^p a la capa de entrada del sistema difuso en la figura 3.11 y calcula las salidas de las Capas 1-3. Esto es, calcula

$$z^l = \prod_{i=1}^n \exp\left(-\left(\frac{x_{0i}^p - \bar{x}_i^l(q)}{\sigma_i^l(q)}\right)^2\right) \quad (3.7)$$

$$b = \sum_{l=1}^M z^l \quad (3.8)$$

$$a = \sum_{l=1}^M \bar{y}^l(q) z^l \quad (3.9)$$

$$f = a/b \quad (3.10)$$

- **Paso 3. Actualización de parámetros.** Usar el algoritmo de entrenamiento (3.11), (3.12), y (3.13) para calcular los parámetros $\bar{y}^l(q+1)$, $\bar{x}_i^l(q+1)$ y $\sigma_i^l(q+1)$, donde $y = y_0^p$, y z^l, b, a y f se calculan como en el paso 2.
- **Paso 4.** Repetir yendo al Paso 2 con $q = q + 1$, hasta que el error $|f - y_0^p|$ es menor al número pre especificado ϵ , o hasta que q sea igual al número especificado.

- **Paso 5.** Repetir yendo al Paso 2 con $p = p + 1$; es decir, actualizar los parámetros usando el siguiente par entrada-salida $(x_0^{p+1}; y_0^{p+1})$.
- **Paso 6.** Si es deseable y factible, fijar $p = 1$ y hacer los Pasos 2-5 nuevamente hasta que el sistema difuso diseñado sea satisfactorio. Para el control en línea y la identificación del sistema dinámica, este paso no es factible porque los pares de entrada-salida se proporcionan uno-por-uno en una forma de tiempo-real. Para problemas de reconocimiento de patrones donde los pares entrada-salida se proporcionan fuera de línea, este paso es usualmente deseable.

Siguiendo estos pasos se puede diseñar un sistema difuso $f(x)$ en la forma (3.6) tal que el error $e^p = \frac{1}{2} [f(x_0^p) - y_0^p]^2$ sea mínimo. De esta forma se obtienen los parámetros \bar{y}^l , \bar{x}_i^l y σ_i^l , tal que e^p se minimice.

$$\bar{y}^l(q+1) = \bar{y}^l(q) - \alpha(f-y) \frac{1}{b} z^l \quad (3.11)$$

donde $l = 1, 2, \dots, M, q = 0, 1, 2, \dots$

$$\bar{x}_i^l(q+1) = \bar{x}_i^l(q) - \alpha \frac{(f-y)}{b} (\bar{y}^l(q) - f) z^l \frac{2(x_{0i}^p - \bar{x}_i^l(q))}{\sigma_i^{l2}(q)} \quad (3.12)$$

donde $i = 1, 2, \dots, n, l = 1, 2, \dots, M, q = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \sigma_i^l(q+1) &= \sigma_i^l(q) - \alpha \frac{\partial e}{\partial \sigma_i^l} \Big|_q \\ &= \sigma_i^l(q) - \alpha \frac{(f-y)}{b} (\bar{y}^l(q) - f) z^l \frac{2(x_{0i}^p - \bar{x}_i^l(q))^2}{\sigma_i^{l3}(q)} \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde $i = 1, 2, \dots, n, l = 1, 2, \dots, M, q = 0, 1, 2, \dots$

Debido a que el algoritmo de entrenamiento (3.11), (3.12), y (3.13) es un algoritmo del gradiente descendente, la opción de los parámetros iniciales es crucial para el éxito del algoritmo. Si los parámetros iniciales son cercanos a los parámetros óptimos, el algoritmo tiene una oportunidad buena para converger a la solución óptima; por otra parte, el algoritmo puede converger a una solución no óptima o incluso diverja. La ventaja de usar el sistema difuso es que los parámetros \bar{y}^l , \bar{x}_i^l y σ_i^l , tienen un significado físico claro y tenemos los métodos

para escoger los valores iniciales adecuados para ellos. Tener en mente que los parámetros \bar{y}^l son los centros de los conjuntos difusos en las partes ENTONCES de las reglas y, los parámetros \bar{x}_i^l y σ_i^l son los centros y anchuras de los conjuntos difusos Gaussianos en las partes SI de las reglas. Por consiguiente, dado un sistema difuso diseñado en la forma de (3.6), podemos recuperar las reglas difusas SI-ENTONCES que constituyen al sistema difuso. Estas reglas difusas SI-ENTONCES pueden ayudar para explicar el diseño del sistema difuso de una manera amigable.

Este método se puede aplicar al problema de identificación de sistemas dinámicos no lineales.

Identificación de sistemas dinámicos no lineales

El problema de identificación consiste en encontrar un modelo conveniente de identificación y ajustar los parámetros del modelo para optimizar una función de rendimiento basado en el error entre la planta y la salida del modelo de identificación. La Identificación de sistemas es un proceso de determinación de un modelo apropiado para el sistema basado en mediciones proporcionadas por los sensores. La Identificación es un proceso importante ya que muchas aproximaciones en ingeniería dependen del modelo del sistema. Debido a que los sistemas difusos son poderosos aproximadores universales, es razonable usarlos como modelos de identificación para sistemas no lineales. Podemos emplear al sistema difuso (3.6) provisto con el algoritmo de entrenamiento (3.11), (3.12) y (3.13) para aproximar componentes no lineales desconocidas en sistemas dinámicos.

Considerando el sistema dinámico no lineal en tiempo discreto

$$y(k+1) = f(y(k), \dots, y(k-n+1); u(k), \dots, u(k-m+1))$$

donde f es una función desconocida que queremos identificar, u e y son la entrada y salida del sistema, respectivamente, n y m son enteros positivos. La tarea es identificar la función f desconocida basada en los sistemas difuso.

Haciendo $\hat{f}(x)$ el sistema difuso en la forma (3.6). Reemplazamos $f(x)$ por $\hat{f}(x)$ se

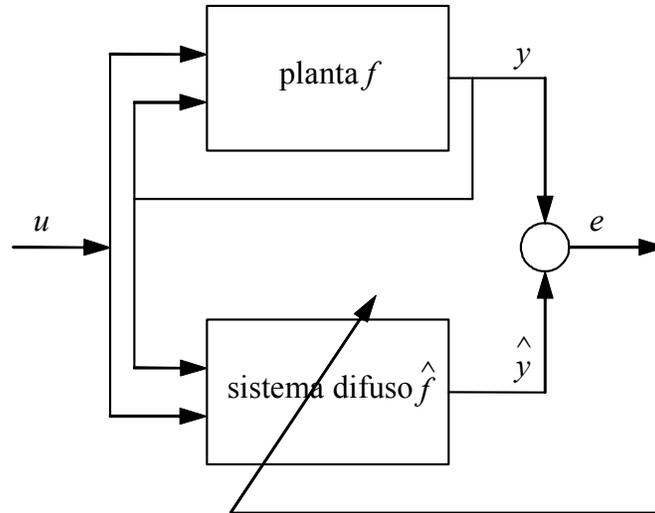


Figura 3.12: Esquema básico de identificación de un modelo para un sistema dinámico no lineal usando el sistema difuso.

obtiene el modelo de identificación siguiente:

$$\hat{y}(k+1) = \hat{f}(y(k), \dots, y(k-n+1); u(k), \dots, u(k-m+1))$$

Ahora se deben ajustar los parámetros en $\hat{f}(x)$ tal que la salida del modelo de identificación $\hat{y}(k+1)$ converja a la salida del sistema $y(k+1)$ conforme k tiende a infinito. La figura 3.12 muestra este esquema de identificación.

Los pares entrada-salida son $(x_0^{k+1}; y_0^{k+1})$, donde $x_0^{k+1} = (y(k), \dots, y(k-n+1); u(k), \dots, u(k-m+1))$ y $y_0^{k+1} = y(k+1)$, y $k = 0, 1, 2, \dots$. Debido a que el sistema es dinámico, estos pares entrada-salida se recolectan cada momento. La operación del proceso de identificación es el mismo que en los pasos de 1 a 5.

En este capítulo hemos visto que los sistemas difusos consisten de cuatro componentes, base de reglas difusa, dispositivo de inferencia difusa, fuzzyficador y defuzzyficador como lo muestra la figura 3.10, para poder desarrollar los sistemas de control difuso son necesarios los

conceptos de la matemática difusa, y de esta forma se pueden derivar fórmulas matemáticas compactas que nos representen sistemas complejos con bastante aproximación.

En este capítulo se han presentado los conceptos fundamentales de los sistemas difusos, que son necesarios para el diseño de controladores difusos. Hoy en día la tecnología avanza de forma acelerada, incorporándose nuevas estrategias de control de sistemas, de esta forma se han fusionado técnicas de control como son las redes neuronales y los conceptos de los sistemas difusos, pudiendo mezclar la capacidad de procesamiento de información de las redes neuronales y la sencillez de expresión de los sistemas difusos, de esta forma han surgido conceptos como las redes neuronales difusas o redes neuro difusas, identificadores difusos, etc. En el siguiente capítulo se pretende mostrar algunas alternativas en la identificación de sistemas no lineales complejos empleando los principios de los sistemas difusos de control.

Capítulo 4

Observadores Difusos

Hoy en día uno de los retos principales del ser humano es crear computadoras más inteligentes capaces de pensar por sí mismas, que puedan aprender de la experiencia y no simplemente de la repetición de ciertas instrucciones que un programador de sistemas le asigne. El afán de encontrar nuevas oportunidades de solución a este y otros problemas interesantes le ha permitido crear modelos de procesamiento de información que sean capaces de imitar el comportamiento del cerebro humano, prueba de ello son las redes neuronales y los sistemas difusos. Estos sistemas se han fusionado con el fin de crear nuevos medios para la identificación de sistemas no lineales complejos [25]. En este capítulo se proponen diferentes formas para la estimación de los estados internos de un sistema no lineal en base a los observadores e identificadores difusos.

4.1. Introducción

Para el diseño de los sistemas de control, en ocasiones hacemos la consideración de que todas las variables están disponibles para la retroalimentación. En la realidad esta suposición no es muy cierta, debido a que las variables de estado no son accesibles para una medición directa o debido a que no se cuenta con los sensores o transductores adecuados, resultan ser muy caros o el número de ellos es limitado.

Es importante señalar que debemos evitar diferenciar una variable de estado para generar otra. En el diseño de los sistemas de control se pueden usar diferentes métodos para estimar e identificar los estados internos de un sistema cuando sólo se tiene información de los datos de entrada y salida de la planta, ejemplo de ello pueden ser los identificadores basados en redes neuronales y sistemas difusos (identificadores neuronales difusos); otra opción son los estimadores de estado como los observadores, en este caso los observadores difusos. Ambas herramientas son adecuadas para encontrar los estados internos de un sistema que carece de esta información.

En este capítulo se presentan dos formas diferentes para la estimación de los estados internos de un sistema no lineal, el primero de ellos es por medio de la observación, en este caso empleando un observador difusos tipo Takagi-Sugeno cuya salida es una combinación lineal de las entradas del sistema, lo que simplifica la complejidad del problema [27]. El segundo método que se utiliza para la estimación de los estados internos del sistema se realiza empleando un observador libre de la estructura del modelo en combinación con una red neuronal difusa, lo que permite identificar los estados internos del sistema, en este caso se emplean los sistemas difusos tipo Mamdani que expresan el conocimiento previo disponible sobre el sistema, expresando así el conocimiento adquirido durante el proceso de optimización.

4.2. Observadores

Existen métodos para estimar las variables de estado que no se miden sin un proceso de diferenciación. La estimación de semejantes variables de estado por lo general se denomina *observación*. En este caso, para aplicar la retroalimentación de estado, podemos diseñar un dispositivo, llamado *estimador de estado* u **observador de estado**, así, la salida del dispositivo generará un estimador del estado. Si el observador de estado capta todas las variables de estado del sistema, sin importar si algunas de ellas están disponibles para una medición directa, se denomina *observador de estado de orden completo*. Hay ocasiones en las que un observador tal no es necesario, sólo se requiere de la observación de las variables de estado que no se miden, pero no de aquellas que también se miden directamente. Por

ejemplo, dado que las variables de salida son observables y se relacionan en forma lineal con las variables de estado, no es necesario observar todas las variables de estado, sino sólo las $n - m$ variables de estado en donde n es la dimensión del vector de estado y m es la dimensión del vector de salida.

Un observador que estima menos de n variables de estado, en donde n es la dimensión del vector de estado, se denomina *observador de estado de orden reducido* o, simplemente, *observador de orden reducido*. Si el observador de estado de orden reducido tiene el orden mínimo posible, se denomina *observador de estado de orden mínimo*, u *observador de orden mínimo* [34].

4.3. Observadores Difusos

Desde sus inicios hasta la actualidad el control difuso está ganando una increíble madurez. Es muy conocido que muchos investigadores en el campo del control han realizado estudios sobre los observadores lineales y no lineales, en cambio, los observadores difusos aún no han atraído suficiente la atención de los expertos.

En [10] se puede ver una de las pocas investigaciones que existen con respecto a los observador difusos. Se presenta un observador difuso para procesos no lineales, obtenido a través de la "interconectividad difusa" de observadores tipo Luenberger lineales locales. La aproximación emplea técnicas de estabilidad robusta en particular la cuadrática para mostrar la estabilidad cuadrática global del observador difuso. En esta aproximación no se asume la linealidad de los procesos no lineales con respecto a las entradas, que generalmente se asume para los observadores no lineales convencionales.

Las técnicas difusas han demostrado tener una efectividad exitosa en el control de procesos complejos, donde se han presentado resultados teóricos importantes.

Sin embargo, a pesar de los impresionantes resultados en modelado y control el problema dual y muy importante de los observadores difusos no ha tenido suficiente atracción para realizar los debidos estudios que merecen.

Los problemas relacionados con los observadores difusos podrían ser dirigidos por lo

menos desde dos puntos de vista:

1. Estimar las funciones de pertenencia asociadas con diferentes variables de estado fijando valores difusos y ;
2. Construir en la línea de los modelos Takagi-Sugeno, observadores difusos globales no lineales por medio de conectividad difusa de observadores locales lineales.

De acuerdo con la segunda opción, primero el espacio de estados es dividido en subespacios difusos. Así, en cada subespacio difuso se define un modelo local lineal o afín y un observador correspondiente tipo Luenberger. Finalmente, se da una "interconectividad difusa" de los modelos lineales locales usando el método de inferencia estándar Sugeno para obtener el modelo global. Los modelos locales interconectados, generan modelos lineales inciertos con incertidumbres correspondientes y no correspondientes. Estas incertidumbres representan la interacción entre los modelos locales y dependen de la elección de las funciones de pertenencia. Asumiendo algunas cotas en estas incertidumbres, se emplean técnicas de estabilización cuadrática y funciones de Lyapunov suaves y continuas por tramos para deducir estabilidad de las dinámicas globales del error.

Como sabemos los modelos Takagi-Sugeno se representan por un conjunto finito de reglas [10]:

$$\begin{aligned}
 R_p^i : \quad & \text{Si } x_1(t) \in L_i^1, \dots, x_n(t) \in L_n^i \\
 \text{Entonces } P_i : & \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_i(t) + \mathbf{B}_i(t) \\ \mathbf{y} = \mathbf{H}_i(t) \end{array} \right\} \\
 & i = 1, \dots, M
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^p$ son respectivamente el estado, la entrada y las variables de salida medibles. L_j^i es un valor lingüístico de las variables difusas X_j que representan las variables de estado x_j . Para cada valor lingüístico, L_j^i , se asocia a un conjunto difuso \widetilde{LX}_j^i . Aquí se considera una subsecuencia I (con $\text{card}(I) = \tilde{n} \leq n$) de $1, \dots, n$ y reescribiendo

(4.1):

$$R_p^i : \quad \left. \begin{array}{l} \text{Si } x_{k_1}(t) \in L_{k_1}^i, \dots, x_{k_n}(t) \in L_{k_n}^i \\ \text{Entonces } P_i : \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_i(t) + \mathbf{B}_i(t) \\ \mathbf{y} = \mathbf{H}_i(t) \end{array} \right\} \\ i = 1, \dots, M \end{array} \right\} \quad (4.2)$$

con $k_1, k_2, \dots, k_n \in I$ y suponemos que $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}$ están disponibles para las mediciones y permiten la partición (4.2). La tarea del observador es estimar $n - I$ estados remanentes. En base a los modelos locales P_i , se pueden construir observadores locales tipo Luenberger como:

$$R_O^i : \quad \left. \begin{array}{l} \text{Si } x_{k_1}(t) \in L_{k_1}^i, \dots, x_{k_n}(t) \in L_{k_n}^i \\ \text{Entonces } O_i : \left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{L}_i \mathbf{H}_i (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) \\ \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{H}_i \hat{\mathbf{x}}(t) \end{array} \right\} \\ i = 1, \dots, M \end{array} \right\} \quad (4.3)$$

donde O_i representa un observador local asociado con el modelo local i -ésimo de (4.2) y L_i la ganancia del i -ésimo observador. $\hat{\mathbf{x}} \in \mathfrak{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}$, $\hat{\mathbf{y}} \in \mathfrak{R}$. Se puede notar que para la definición de observadores locales O_i , la partición difusa, en la parte "Si", está basada en la variable del proceso x y no en \hat{x} .

4.4. Observador para un Sistema Difuso Takagi-Sugeno

Un observador de estado estima las variables de estado con base en las mediciones de las variables de salida y de control. Aquí tiene una función importante el concepto de observabilidad. De hecho los observadores de estado pueden diseñarse si y sólo si satisfacen la condición de observabilidad [34].

El vector de estado observado $\tilde{\mathbf{x}}$ se usa en la retroalimentación del estado para generar el vector de control deseado. Considere el sistema definido mediante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (4.5)$$

Suponiendo que el estado \mathbf{x} se aproximará mediante el estado $\tilde{\mathbf{x}}$ del modelo dinámico

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{K}_e(\mathbf{y} - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}) \quad (4.6)$$

que representa el observador de estado. El observador de estado tiene \mathbf{y} y \mathbf{u} como entradas y $\tilde{\mathbf{x}}$ como salida. El último término del segundo miembro de esta ecuación es un término de corrección que contiene la diferencia entre la salida \mathbf{y} medida y la salida $\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}$ estimada. La matriz \mathbf{K}_e funciona como una matriz de ponderación. El término de corrección vigila el estado $\tilde{\mathbf{x}}$. Ante la presencia de una discrepancia entre las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} usadas en este modelo y las del sistema real, la adición del término de corrección ayuda a reducir los efectos producidos por la diferencia entre el modelo dinámico y el sistema real.

El orden del observador de estado es igual al del sistema. Suponiendo que el sistema se define mediante las ecuaciones (4.4) y (4.5) y que el modelo del observador se define mediante la ecuación (4.6).

Para obtener la ecuación de error del observador, se resta la ecuación (4.6) de la ecuación (4.4).

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} - \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{K}_e(\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Definiendo la diferencia entre \mathbf{x} y $\tilde{\mathbf{x}}$ como el vector de error \mathbf{e} , o

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$$

así, la ecuación (4.7) se convierte en

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\mathbf{e} \quad (4.8)$$

A partir de (4.8) el comportamiento dinámico del vector de error se determina mediante los valores característicos de la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$. Si la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}$ es estable, el vector de

error convergerá a cero para cualquier vector de error inicial $\mathbf{e}(\mathbf{0})$. Es decir que $\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{t})$ convergerá a $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ sin considerar los valores de $\mathbf{x}(\mathbf{0})$ y $\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{0})$. Si se eligen los valores característicos de la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C}$ en tal forma que el comportamiento dinámico del vector de error sea asintóticamente estable y suficientemente rápido, cualquier vector de error tenderá a 0 (el origen) con una velocidad adecuada.

Para un sistema no lineal

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ y &= g(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{4.9}$$

Asumimos que (4.9) puede ser representado o aproximado de forma suficiente por un sistema difuso Takagi-Sugeno. El sistema TS consiste de una base de reglas difusa, donde cada regla i es de la forma

La regla i -ésima:

$$\begin{aligned}SI \alpha_1(t) \text{ es } \mathbf{F}_{i1} \text{ y } \dots \text{ y } \alpha_r(t) \text{ es } \mathbf{F}_{ir} \\ ENTONCES \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) + a_i \\ \mathbf{y}_i(t) = \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t) + c_i, \quad i = 1, 2, \dots, r\end{aligned}\tag{4.10}$$

donde

$$\begin{aligned}a_i &= f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - [\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t)] \\ c_i &= g(\mathbf{x}) - \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{A}_i &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(x_i, u_i)} \quad \mathbf{B}_i = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{(x_i, u_i)} \quad \mathbf{C}_i = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(x_i, u_i)}\end{aligned}$$

Definición 4.1 Si los pares $(\mathbf{A}_i, \mathbf{C}_i)$, $i = 1, 2, \dots, r$; son observables, el sistema difuso (5.5) se dice localmente observable.

Para el diseño del **observador Takagi-Sugeno**, se asume que el sistema difuso (5.5) es localmente observable. Primero, los observadores locales de estado son diseñados a continuación, basados en la tripleta $(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i)$:

La regla i -ésima del observador:

$$\begin{aligned}SI z_1(t) \text{ es } \mathbf{F}_{i1} \text{ y } \dots \text{ y } z_g(t) \text{ es } \mathbf{F}_{ig} \\ ENTONCES \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) + \mathbf{G}_i [\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)] \\ \hat{\mathbf{y}}_i(t) = \mathbf{C}_i \hat{\mathbf{x}}(t), \quad i = 1, 2, \dots, r\end{aligned}\tag{4.11}$$

donde \mathbf{G}_i ($i = 1, 2, \dots, r$) son matrices del error de observación. $\mathbf{y}(t)$ e $\hat{\mathbf{y}}(t)$ son la salida final del sistema (5.5) y el observador difuso, respectivamente. Por tanto el estado final estimado del observador difuso es

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}(t) + \sum_{i=1}^r \mu_i \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) + \sum_{i=1}^r \mu_i \mathbf{G}_i [\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)] \quad (4.12)$$

la salida final del observador difuso es

$$\hat{\mathbf{y}}_i(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i \mathbf{C}_i \hat{\mathbf{x}}(t) \quad (4.13)$$

donde se usa el mismo peso μ_i igual al peso de la i -ésima regla del sistema difuso (5.6). Los parámetros del observador son \mathbf{G}_i en cada regla.

4.5. Identificador Neuronal Difuso

El problema de la determinación de un modelo matemático para un sistema desconocido por medio de la observación de los datos entrada-salida generalmente se refiere a la **identificación del sistema**. El propósito de la identificación del sistema es, entre otras cosas, -Predecir el comportamiento del sistema, -Explicar la interacción y relación entre la entrada y la salida de un sistema, -Diseñar un controlador basado en el modelo de un sistema. Para realizar simulaciones del sistema bajo control, es necesario un modelo del sistema.

La identificación del sistema generalmente involucra dos pasos: la identificación de la estructura del sistema y la identificación de los parámetros del sistema.

La identificación es uno de los problemas esenciales en la teoría del control, especialmente cuando no tenemos información completa del modelo. Un método efectivo es utilizar redes neuronales, debido a que una red neuronal es un identificador libre del modelo del sistema [16], [32], es decir, la planta puede ser considerada como una "caja negra" [38]. Las Redes Neuronales Difusas (RND), son sistemas que incorporan aspectos de las redes neuronales como es la capacidad de aprender a partir de ciertos datos, y aspectos de los sistemas

difusos ya que trabajan con razonamientos lógicos basados en reglas de inferencia y variables lingüísticas.

Los neuro identificadores se pueden clasificar como estático (alimentación hacia adelante) y dinámico (recurrente) [32], [30]. Los perceptrones multicapa son implementados por la aproximación de la función no lineal en el lado derecho de la ecuación diferencial [18]. Se ha empleado una versión continua de la red neuronal multicapa para estimar las no linealidades de cierto robot manipulador [24]. La desventaja principal de las redes neuronales estáticas es que las reglas de actualización de pesos utilizan información en las estructuras locales de datos y la función de aproximación es sensible a datos de entrenamiento que se presentan [11].

Las redes neuronales dinámicas superan de forma exitosa estas desventajas debido a la estructura de retroalimentación [16]. Las redes neuronales dinámicas fueron introducidas primero por Hopfield [14] y después estudiadas por otros [8], [11], [35], [46], etc. Existen dos conceptos generales del entrenamiento recurrente. El aprendizaje de un punto fijo está dirigido para hacer que las redes neuronales logren el equilibrio preestablecido [36]. El aprendizaje de la trayectoria entrena a la red para seguir la trayectoria deseada en el tiempo [37]. Muchas de las redes neuronales dinámicas no tienen capas ocultas [35], [47]. Como en los perceptrones de una sola capa, las capacidades de aproximación de estas redes son limitadas. Para afrontar estas limitaciones, se propusieron redes neuronas dinámicas de mayor orden [21]. Esto contiene funciones no lineales múltiples para aproximar las dinámicas no lineales complejas, la regla de entrenamiento es similar al caso de una sola capa [35]. Otro método es emplear múltiples capas en las redes neuronales dinámicas, como con los perceptrones multicapa, la habilidad de identificación podría ser mejorada exitosamente.

Muchos de los trabajos sobre identificación difusa emplean la consideración de accesibilidad completa de los estados, sin embargo, en la realidad esto no siempre es válido. En el caso de que sólo la entrada y la salida son medibles, un sistema difuso complejo puede muy bien hacer corresponder los pares entrada-salida. Si el sistema no lineal tiene demasiados estados internos, el mapeo entrada-salida no será suficiente para modelar todo el sistema no lineal. Para enfrentar este inconveniente, existen al menos dos métodos:

- Emplear el sistema difuso que contenga un observador tipo Luenberger [20], [48]. La dimensión del sistema difuso es la misma que la de la planta. Debido a que sólo está disponible el error a la salida, los parámetros correspondientes a los estados internos no pueden cambiar cuando se aplica la regla de aprendizaje. Debido a esto es necesario adicionar otros términos, tales como retardos [48] o términos lineales [20].
- Utilizar el "principio de separación", es decir, el observador de estados y el sistema de identificación son tratados separadamente. La dificultad es que los observadores basados en un modelo no se pueden usar, debido a que no se dispone de un conocimiento exacto de la planta. Los observadores no lineales libres de la estructura del sistema, tales como los observadores de alta ganancia [33] y los observadores en modo deslizante [2] pueden ser muy útiles, pero son adecuados para plantas especiales. Por ejemplo, los observadores de alta ganancia requieren que las plantas no lineales tengan una forma linealizable, esta condición no es aceptable cuando se trata de identificar un sistema que se considera como una *caja negra*, por lo que el observador en modo deslizante [13] es más adecuado, además es muy utilizado en las dinámicas de los robots manipuladores.

La combinación de observadores no lineales con identificadores basados en los sistemas difusos es una buena dirección para mejorar la aproximación en la identificación. En esta sección se aplicará el observador en modo deslizante para estimar los estados internos del sistema.

4.6. Identificador Difuso basado en un Observador

Un modelo neurodifuso puede ser interpretado como una clase especial de red neuronal con parámetros difusos, la red neuronal modifica estos parámetros [23]. Se han desarrollado redes neuronales difusas basadas en las redes neuronales tradicionales, en particular el Perceptrón Multicapa, en el que se han ido haciendo difusas algunas partes como por ejemplo las neuronas o la función de costo.

En el caso cuando sólo la entrada y la salida son medibles, las redes neuronales complejas pueden relacionar muy bien los pares entrada-salida. Si el sistema no lineal tiene muchos estados internos, el mapeo entrada-salida no es suficiente para modelar totalmente al sistema [17], por lo tanto en este caso podemos utilizar un observador para estimar los estados internos y de esta forma emplear todos los estados para identificar al sistema no lineal. Sin embargo, muchos observadores se basan en la estructura de la planta, lo que significa un gran problema cuando sólo se cuenta con información de los datos de entrada-salida [49]. A continuación se presenta un observador libre de la estructura del sistema, como es un observador en modo deslizante en combinación con una red neuronal difusa, esto nos permite aplicarlo al problema de identificación del sistema no lineal el cuál carece de información completa de sus estados internos.

4.6.1. Observador en modo deslizante

Generalmente un sistema no lineal MIMO puede ser escrito como

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_t &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t), \\ \mathbf{y}_t &= \mathbf{C}\mathbf{x}_t\end{aligned}\tag{4.14}$$

donde $\mathbf{x}_t \in \mathfrak{R}^n$ es el estado de la planta. $\mathbf{u}_t \in \mathfrak{R}^m$ es determinada entrada de control que puede estabilizar al sistema no lineal (4.14), $|\mathbf{u}_t| \leq \bar{u}$. $\mathbf{y}_t \in \mathfrak{R}^m$ es la salida medible, \mathbf{C} es la matriz de salida conocida. Transformando el sistema (4.14) en una forma normal:

$$\dot{\mathbf{x}}_t = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{F}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t), \quad \mathbf{y}_t = \mathbf{C}\mathbf{x}_t\tag{4.15}$$

donde $\mathbf{F}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t) := \mathbf{f}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t) - \mathbf{A}\mathbf{x}_t$, \mathbf{A} es una matriz especial en la que el par (\mathbf{A}, \mathbf{C}) es observable.

Construyendo el observador en modo deslizante como:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{x}}}_t &= \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}_t + \mathbf{S}(\bar{\mathbf{x}}_t, \mathbf{e}) - \mathbf{K}\mathbf{e}_t \\ \bar{\mathbf{y}}_t &= \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}_t\end{aligned}\tag{4.16}$$

donde \mathbf{e}_t es el error de salida definido como:

$$\mathbf{e}_t := \bar{\mathbf{y}}_t - \mathbf{y}_t = \mathbf{C}\bar{\Delta}_t = \mathbf{C}(\bar{\mathbf{x}}_t - \mathbf{x}_t),$$

$\bar{\Delta}_t$ es definido como el error del observador. El término de modo deslizante $\mathbf{S}(\bar{\mathbf{x}}_t, \mathbf{e}_t)$ es elegido como:

$$\mathbf{S}(\bar{\mathbf{x}}_t, \mathbf{e}_t) = -\frac{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{C}\bar{\Delta}_t}{\|\mathbf{C}\bar{\Delta}_t\|} = -\rho\mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}^T\text{sign}(\mathbf{e}_t) \quad (4.17)$$

donde ρ es una constante positiva.

Claramente el observador en modo deslizante (4.16) no es dependiente de la planta no lineal (4.14).

La derivada del error del observador es

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\Delta}}_t &= \mathbf{A}\bar{\Delta}_t + \mathbf{S}(\bar{\mathbf{x}}_t, \mathbf{e}_t) - \mathbf{K}\mathbf{C}\bar{\Delta}_t - \mathbf{F}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})\bar{\Delta}_t + \mathbf{S}(\bar{\mathbf{x}}_t, \mathbf{e}_t) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t) \\ &= \mathbf{A}_0\bar{\Delta}_t + \mathbf{S}(\bar{\mathbf{x}}_t, \mathbf{e}_t) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t) \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde $\mathbf{A}_0 := \mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C}$. Debido a que (\mathbf{A}, \mathbf{C}) es observable, existe \mathbf{K} tal que \mathbf{A}_0 es estable. Así la siguiente ecuación de Lyapunov tiene una solución positiva \mathbf{P}

$$\mathbf{A}_0^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_0 = -\mathbf{Q}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > 0$$

para alguna matriz definida positiva \mathbf{Q} .

Asumiendo que la función no lineal $\mathbf{f}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t)$ satisface la siguiente suposición

A1:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t) - \mathbf{A}\mathbf{x}_t = -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{h}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t)$$

donde $\mathbf{h}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t)$ es determinada una función como:

$$\|\mathbf{h}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t)\| < \rho, \quad \rho > 0.$$

4.6.2. Análisis de estabilidad

Teorema 4.1 *Bajo la suposición A1, el error del observador entre el observador en modo deslizante (4.16) y el sistema no lineal (4.14) es asintóticamente estable*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\Delta}_t = 0 \quad (4.19)$$

Demostración. Considerando la siguiente función de Lyapunov candidata:

$$V_t = \overline{\Delta}_t^T \mathbf{P} \overline{\Delta}_t$$

Calculando su derivada

$$\dot{V}_t = \overline{\Delta}_t^T (\mathbf{A}_0^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_0) \overline{\Delta}_t + 2 \overline{\Delta}_t^T \mathbf{P} [\mathbf{S}(\overline{\mathbf{x}}_t, \mathbf{e}_t) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t)].$$

Empleando **A1**

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t) = -\mathbf{P}^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t), \quad \|\mathbf{h}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t)\| < \rho.$$

Si elegimos $\mathbf{S}(\overline{\mathbf{x}}_t, \mathbf{e}_t)$ como (4.17), tenemos

$$\begin{aligned} \dot{V}_t &= -\overline{\Delta}_t^T \mathbf{Q} \overline{\Delta}_t + 2 \overline{\Delta}_t^T \mathbf{C}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t) - 2 \frac{\overline{\Delta}_t^T \mathbf{C}^T \mathbf{C} \overline{\Delta}_t}{\|\mathbf{C} \overline{\Delta}_t\|} \rho \\ &= -\overline{\Delta}_t^T \mathbf{Q} \overline{\Delta}_t + 2 \overline{\Delta}_t^T \mathbf{C}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t) - 2 \|\mathbf{C} \overline{\Delta}_t\| \rho \\ &\leq -\overline{\Delta}_t^T \mathbf{Q} \overline{\Delta}_t + 2 \|\mathbf{C} \overline{\Delta}_t\| (\|\mathbf{h}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t)\| - \rho) < 0 \end{aligned}$$

Con $\dot{V}_t < 0$, $\overline{\Delta}_t \in L_\infty$. De la ecuación de error (4.18) también concluimos que $\dot{\overline{\Delta}}_t \in L_\infty$. Debido a $\dot{V}_t \leq -\overline{\Delta}_t^T \mathbf{Q} \overline{\Delta}_t$ y V_t es el proceso determinado, $\overline{\Delta}_t$ es cuadráticamente integrable y determinado $\Delta_t \in L_2$. Empleando el lema de Barbalat [32] obtenemos que el error del observador $\overline{\Delta}_t$ es asintóticamente estable, así $\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{\Delta}_t = 0$. ■

Comentario 4.1 La suposición **A1** es fácil de satisfacer si $\mathbf{f}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t)$ se determina, ya que \mathbf{A} , \mathbf{P} y $\mathbf{h}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t)$ son seleccionados por el usuario. Muchos sistemas tienen funciones no lineales establecidas $\mathbf{f}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t)$, por ejemplo, los sistemas mecánicos. El procedimiento de diseño del observador en modo deslizante (4.16) se muestra en la figura 4.1.

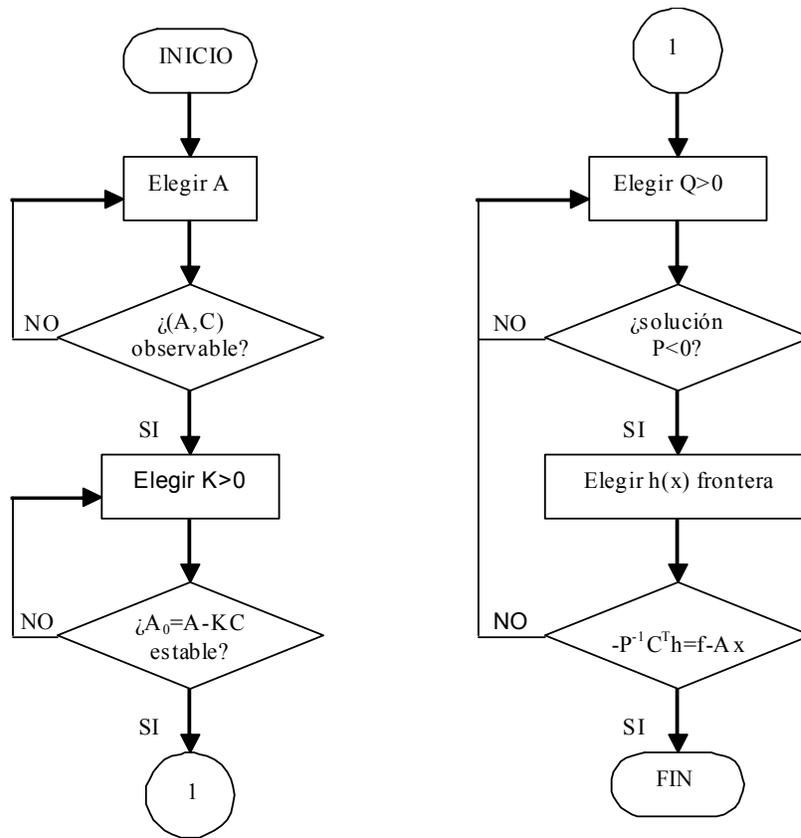


Figura 4.1: Procedimiento de diseño del observador en modo deslizante.

4.6.3. Identificador Difuso basado en un Observador

Redes Neuronales Difusas Tipo Mamdani

Un modelo difuso genérico se presenta como una colección de reglas difusas en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 R^i: & \text{ SI } \hat{x}_1 \text{ es } A_{1i} \text{ y } \hat{x}_2 \text{ es } A_{2i} \text{ y } \cdots \hat{x}_n \text{ es } A_{ni} \\
 & \text{ ENTONCES } \hat{x}_1 \text{ es } B_{1i} \text{ y } \cdots \hat{x}_n \text{ es } B_{ni} \\
 & \text{ O } \hat{x}_1 \text{ es } u_1 C_{1i} \text{ y } \cdots \hat{x}_m \text{ es } u_m C_{mi} \cdots \hat{x}_n \text{ es } C_{ni} \\
 & \text{ O } \hat{x}_1 \text{ es } a_1 \hat{x}_1 \text{ y } \cdots \hat{x}_n \text{ es } a_{ni} \hat{x}_n
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Esta regla se puede escribir de tres forma para las reglas:

$$\begin{aligned}
 R_1^i: & \text{ SI } \hat{x}_1 \text{ es } A_{1i} \text{ y } \hat{x}_2 \text{ es } A_{2i} \text{ y } \cdots \hat{x}_n \text{ es } A_{ni} \\
 & \text{ ENTONCES } \frac{1}{3} \hat{x}_1 \text{ es } B_{1i} \text{ y } \cdots \frac{1}{3} \hat{x}_n \text{ es } B_{ni} \\
 R_2^i: & \text{ SI } \hat{x}_1 \text{ es } A_{1i} \text{ y } \hat{x}_2 \text{ es } A_{2i} \text{ y } \cdots \hat{x}_n \text{ es } A_{ni} \\
 & \text{ ENTONCES } \frac{1}{3} \hat{x}_1 \text{ es } u_1 C_{1i} \text{ y } \cdots \hat{x}_m \text{ es } u_m C_{mi} \text{ y } \cdots \hat{x}_n \text{ es } C_{ni} \\
 R_3^i: & \text{ SI } \hat{x}_1 \text{ es } A_{1i} \text{ y } \hat{x}_2 \text{ es } A_{2i} \text{ y } \cdots \hat{x}_n \text{ es } A_{ni} \\
 & \text{ ENTONCES } \frac{1}{3} \hat{x}_1 \text{ es } a_1 \hat{x}_1 \text{ y } \cdots \frac{1}{3} \hat{x}_n \text{ es } a_{ni} \hat{x}_n
 \end{aligned}$$

Empleamos l ($i = 1, 2, \dots, l$) reglas difusas SI-ENTONCES para realizar un mapeo de un vector lingüístico de entradas $\hat{X} = [\hat{x}_1 \cdots \hat{x}_n] \in \mathfrak{R}^n$ a un vector lingüístico de salidas $\hat{Y}(k) = \left[\hat{x}_1 \cdots \hat{x}_m \right]^T$.

$A_{1i}, \dots, A_{ni}, B_{1i}, \dots, B_{ni}$ y C_{1i}, \dots, C_{ni} son conjuntos difusos estándar [41]. Para una variable de entrada x_i existen l_i conjuntos difusos. En el caso de una conexión completa $l = l_1 \times l_2 \times \cdots \times l_n$. De [41] sabemos que, usando la inferencia del producto, media de centros y fuzzyficador singleton, la p -ésima salida del sistema lógico difuso se puede expresar de la

siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\dot{\widehat{x}}_p &= \left(\sum_{i=1}^l w_{1pi} \left[\prod_{j=1}^n \mu_{A_{ji}} \right] \right) / \left(\sum_{i=1}^l \left[\prod_{j=1}^n \mu_{A_{ji}} \right] \right) = \sum_{i=1}^l w_{1pi} \phi_i \\
\frac{1}{3}\dot{\widehat{x}}_p &= \left(\sum_{i=1}^l u_i w_{2pi} \left[\prod_{j=1}^n \mu_{A_{ji}} \right] \right) / \left(\sum_{i=1}^l \left[\prod_{j=1}^n \mu_{A_{ji}} \right] \right) = \sum_{i=1}^l u_i w_{2pi} \phi_i \\
\frac{1}{3}\dot{\widehat{x}}_p &= \sum_{i=1}^l a_i \widehat{x}_i
\end{aligned} \tag{4.21}$$

donde $\mu_{A_{ji}}$ son las funciones de pertenencia de los conjuntos difusos A_{ji} , w_{pi} es el punto en el que $\mu_{B_{pi}} = 1$. Si se define

$$\phi_i = \prod_{j=1}^n \mu_{A_{ji}} / \sum_{i=1}^l \prod_{j=1}^n \mu_{A_{ji}}$$

Podemos considerar la siguiente red neuronal para identificar al sistema no lineal.

$$\dot{\widehat{\mathbf{x}}}_t = \mathbf{A}_n \widehat{\mathbf{x}}_t + \mathbf{W}_{1,t} \boldsymbol{\sigma}(\widehat{\mathbf{x}}_t) + \mathbf{W}_{2,t} \boldsymbol{\phi}(\widehat{\mathbf{x}}_t) \mathbf{u}_t \tag{4.22}$$

donde

$$\text{el parámetro } W_k = \begin{bmatrix} w_{11} & & w_{1l} \\ & \ddots & \\ w_{n1} & & w_{nl} \end{bmatrix},$$

el vector de datos $\boldsymbol{\sigma}(\widehat{\mathbf{x}}_t) = [\phi_1 \cdots \phi_l]^T$, $\mathbf{u}_t = [u_1, u_2 \cdots u_m, 0, \cdots 0]^T$, el vector $\widehat{\mathbf{x}}_t \in \mathfrak{R}^n$ es el estado de la red neuronal. $\mathbf{A}_n \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ es una matriz estable que se especifica posteriormente.

Las matrices $\mathbf{W}_{1,t} \in \mathfrak{R}^{n \times m}$, $\mathbf{W}_{2,t} \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ son los pesos que describen las conexiones de las capas de salida.

$\boldsymbol{\sigma}(\cdot) \in \mathfrak{R}^m$ es el vector sigmoidal de funciones, $\boldsymbol{\phi}(\cdot)$ is $\mathfrak{R}^{m \times m}$ la matriz diagonal

$$\boldsymbol{\phi}(\cdot) = \text{diag}[\phi_1(\mathbf{V}_{2,t} \widehat{\mathbf{x}}_t)_1 \cdots \phi_m(\mathbf{V}_{2,t} \widehat{\mathbf{x}}_t)_m].$$

Los elementos de $\sigma_i(\cdot)$ (así como el $\phi_i(\cdot)$) se eligen como funciones sigmoidales

$$\sigma_i(x) = a_i / \left(1 + e^{-b_i^T \mathbf{x}} \right) - c_i.$$

Ahora el objetivo del observador difuso es hacer que los estados del modelo neuronal (4.22) puedan seguir los estados completos de la planta real (4.14) o (4.15), de esta forma se plantea el siguiente criterio:

$$J_{\min} = \underset{\mathbf{W}}{\text{mín}} J, \quad J = \|\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}}\|_{\mathbf{R}}^2 \quad (4.23)$$

Así, para cualquiera $\eta > 0$, tenemos

$$J \leq (1 + \eta) \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|_{\mathbf{R}_1}^2 + (1 + \eta^{-1}) \|\bar{\mathbf{x}} - \widehat{\mathbf{x}}\|_{\mathbf{R}_1}^2. \quad (4.24)$$

El mínimo del término $\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|_{\mathbf{R}}^2$ ya se ha resuelto en la sección para el observador. Si seleccionamos $\mathbf{R} = (1 + \eta^{-1}) \mathbf{R}_1$, podemos reformular el objetivo de identificación como: minimizar el término $\|\bar{\mathbf{x}} - \widehat{\mathbf{x}}\|_{\mathbf{R}}^2$. De hecho, éste es el **Principio de Separación**.

Podemos definir el error de identificación como

$$\Delta_t := \bar{\mathbf{x}}_t - \widehat{\mathbf{x}}_t \quad (4.25)$$

Debido a que σ y ϕ son elegidos como las funciones sigmoideas, las condiciones de Lipschitz generales siguientes se cumplen:

$$\tilde{\sigma}_t^T \Lambda_1 \tilde{\sigma}_t \leq \Delta_t^T \Lambda_\sigma \Delta_t, \quad \left(\tilde{\phi}_t \mathbf{u}_t \right)^T \Lambda_2 \left(\tilde{\phi}_t \mathbf{u}_t \right) \leq \bar{\mathbf{u}}^2 \Delta_t^T \Lambda_\phi \Delta_t \quad (4.26)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_t &:= \sigma(\mathbf{x}_t) - \sigma(\widehat{\mathbf{x}}_t), & \tilde{\phi}_t &:= \phi(\mathbf{x}_t) - \phi(\widehat{\mathbf{x}}_t) \\ \widetilde{\mathbf{W}}_{1,t} &:= \mathbf{W}_1^* - \mathbf{W}_{1,t}, & \widetilde{\mathbf{W}}_{2,t} &:= \mathbf{W}_2^* - \mathbf{W}_{2,t} \end{aligned}$$

Generalmente la red neuronal (4.22) no puede igualar al sistema no lineal (4.14) exactamente, el sistema no lineal (4.14) puede representarse como

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_t = \mathbf{A}_n \bar{\mathbf{x}}_t + \mathbf{W}_1^* \sigma(\bar{\mathbf{x}}_t) + \mathbf{W}_2^* \phi(\bar{\mathbf{x}}_t) \mathbf{u}_t + \tilde{\mathbf{f}}_t. \quad (4.27)$$

donde $\tilde{\mathbf{f}}_t$ es el error del modelado, \mathbf{W}_1^* , \mathbf{W}_2^* son matrices constantes dadas .

Si una entrada de control acotada \mathbf{u}_t puede estabilizar al sistema no lineal (4.14), la dinámica no modelada $\tilde{\mathbf{f}}_t$ es acotada [24]. Ahora asumiendo que

A2: Existe una constante positiva $\bar{\eta}$ tal que

$$\left\| \tilde{\mathbf{f}}_t \right\|_{\Lambda_f}^2 = \tilde{\mathbf{f}}_t^T \Lambda_f \tilde{\mathbf{f}}_t \leq \bar{\eta}, \quad \Lambda_f = \Lambda_f^T > 0$$

Es bien sabido [45] que si la matriz \mathbf{A}_n es estable, el par $(\mathbf{A}_n, \mathbf{R}^{1/2})$ es controlable, el par $(\mathbf{Q}^{1/2}, \mathbf{A}_n)$ es observable, y la condición de frecuencia local especial o su equivalente de la matriz

$$\mathbf{A}_n^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}_n - \mathbf{Q} \geq \frac{1}{4} [\mathbf{A}_n^T \mathbf{R}^{-1} - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}_n] \mathbf{R} [\mathbf{A}_n^T \mathbf{R}^{-1} - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}_n]^T \quad (4.28)$$

se cumple, de esta forma la ecuación de la matriz de Riccati

$$\mathbf{A}_n^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_n + \mathbf{P} \mathbf{R} \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (4.29)$$

tiene una solución definida positiva \mathbf{P} . Por lo tanto es razonable introducir la siguiente suposición:

A3: Para una matriz estable dada \mathbf{A}_n existen una matriz estrictamente definida positiva \mathbf{Q}_1 tal que la matriz de la ecuación de Riccati (4.29) con

$$\mathbf{R} = 2\overline{\mathbf{W}}_1 + 2\overline{\mathbf{W}}_2 + \Lambda_f^{-1}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 + \Lambda_\sigma + \bar{u}^2 \Lambda_\phi \quad (4.30)$$

donde $\overline{\mathbf{W}}_1 := \mathbf{W}_1^{*T} \Lambda_1^{-1} \mathbf{W}_1^*$, $\overline{\mathbf{W}}_2 := \mathbf{W}_2^{*T} \Lambda_2^{-1} \mathbf{W}_2^*$, tiene una solución positiva \mathbf{P} .

La otra contribución principal de este documento es que se da una nueva regla de aprendizaje en línea para la red neuronal dinámica multicapa (4.22):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{W}}_{1,t} &= -2s_t \mathbf{K}_1 \mathbf{P} \Delta_t \sigma^T \\ \dot{\mathbf{W}}_{2,t} &= -2s_t \mathbf{K}_2 \mathbf{P} \Delta_t (\phi \mathbf{u}_t)^T \end{aligned} \quad (4.31)$$

donde

$$s_t = \begin{cases} 0 & \text{si } \|\Delta_t\|_{\mathbf{Q}_1}^2 \leq \bar{\eta} \\ 1 & \text{isi } \|\Delta_t\|_{\mathbf{Q}_1}^2 > \bar{\eta} \end{cases} \quad (4.32)$$

$\mathbf{K}_i \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ($i = 1 \dots 4$) son matrices definidas positivas, \mathbf{P} es la solución de la ecuación de la matriz de Riccati dada por (4.29). Debido a que \mathbf{W}_1^* , \mathbf{W}_2^* pueden ser matrices constantes, las seleccionamos como las condiciones iniciales:

$$\mathbf{W}_{1,0} = \mathbf{W}_1^*, \quad \mathbf{W}_{2,0} = \mathbf{W}_2^*, \quad (4.33)$$

El teorema siguiente declara el hecho que la regla de aprendizaje sugerida anteriormente resulta ser globalmente estable.

Análisis de estabilidad

Teorema 4.2 *Se considera un sistema no lineal (4.14) y la red neuronal dinámica multicapa (4.22) cuyos pesos son ajustados con (4.31). Si las suposiciones **A2** y **A3** se cumplen,, se puede concluir que*

- (I) *Los pesos de las redes neuronales $\mathbf{W}_{i,t}$ y el error de identificación Δ_t están acotados.*
- (II) *Para cualquiera $T \in (0, \infty)$ el error de identificación Δ_t converge al conjunto residual*

$$D_{\Delta_t} = \left\{ \Delta_t \mid \|\Delta_t\|_{\mathbf{Q}_1}^2 \leq \bar{\eta} \right\} \quad (4.34)$$

Demostración. Usando (4.22) y (4.27), la dinámica del error de identificación es

$$\dot{\Delta}_t = \mathbf{A}_n \Delta_t + \widetilde{\mathbf{W}}_{1,t} \sigma + \widetilde{\mathbf{W}}_{2,t} \phi \mathbf{u}_t + \mathbf{W}_1^* \tilde{\sigma}_t + \mathbf{W}_2^* \tilde{\phi}_t \mathbf{u}_t + \tilde{\mathbf{f}}_t \quad (4.35)$$

Definiendo una función de Lyapunov candidata como

$$V_t = \begin{cases} V_{1,t} := \lambda_{\max}(\mathbf{P}\mathbf{Q}_1^{-1}) \bar{\eta} + \frac{1}{2} \text{tr} \left[\widetilde{\mathbf{W}}_{1,t}^T \mathbf{K}_1^{-1} \widetilde{\mathbf{W}}_{1,t} \right] + \frac{1}{2} \text{tr} \left[\widetilde{\mathbf{W}}_{2,t}^T \mathbf{K}_2^{-1} \widetilde{\mathbf{W}}_{2,t} \right] & \text{si } \|\Delta_t\|_{\mathbf{Q}_1}^2 \leq \bar{\eta} \\ V_{2,t} := \Delta_t^T \mathbf{P} \Delta_t + \frac{1}{2} \text{tr} \left[\widetilde{\mathbf{W}}_{1,t}^T \mathbf{K}_1^{-1} \widetilde{\mathbf{W}}_{1,t} \right] + \frac{1}{2} \text{tr} \left[\widetilde{\mathbf{W}}_{2,t}^T \mathbf{K}_2^{-1} \widetilde{\mathbf{W}}_{2,t} \right] & \text{si } \|\Delta_t\|_{\mathbf{Q}_1}^2 > \bar{\eta} \end{cases} \quad (4.36)$$

Debido a que $\dot{\widetilde{\mathbf{W}}}_{i,t} = \dot{\mathbf{W}}_{i,t}$, de la zona muerta de la regla de aprendizaje (4.31), la derivada de V_t es

$$\dot{V}_t = \begin{cases} \dot{V}_{1,t} = 0 & \text{si } \|\Delta_t\|_{\mathbf{Q}_1}^2 \leq \bar{\eta} \\ \dot{V}_{2,t} = 2\Delta_t^T \mathbf{P} \dot{\Delta}_t + \text{tr} \left[\dot{\widetilde{\mathbf{W}}}_{1,t}^T \mathbf{K}_1^{-1} \widetilde{\mathbf{W}}_{1,t} \right] + \text{tr} \left[\dot{\widetilde{\mathbf{W}}}_{2,t}^T \mathbf{K}_2^{-1} \widetilde{\mathbf{W}}_{2,t} \right] & \text{si } \|\Delta_t\|_{\mathbf{Q}_1}^2 > \bar{\eta} \end{cases} \quad (4.37)$$

Ahora se puede discutir el término $2\Delta_t^T \mathbf{P} \dot{\Delta}_t$, de acuerdo con:

$$2\Delta_t^T \mathbf{P} \dot{\Delta}_t = 2\Delta_t^T \mathbf{P} \mathbf{A}_n \Delta_t + 2\Delta_t^T \mathbf{P} \left(\mathbf{W}_1^* \tilde{\sigma}_t + \mathbf{W}_2^* \tilde{\phi}_t \mathbf{u}_t + \tilde{\mathbf{f}}_t \right) + 2\Delta_t^T \mathbf{P} \left(\widetilde{\mathbf{W}}_{1,t} \sigma + \widetilde{\mathbf{W}}_{2,t} \phi \mathbf{u}_t \right) \quad (4.38)$$

La desigualdad de la matriz siguiente [47] es usada para estimar el lado derecho de (4.38)

$$\mathbf{X}^T \mathbf{Y} + (\mathbf{X}^T \mathbf{Y})^T \leq \mathbf{X}^T \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{X} + \mathbf{Y}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{Y} \quad (4.39)$$

- Si sólo se tienen tiempos finitos, $\|\Delta_t\|_{\mathbf{Q}_1}^2$ permanece fuera del círculo de radio $\bar{\eta}$ (y entonces vuelve a entrar), $\|\Delta_t\|_{\mathbf{Q}_1}^2$ eventualmente permanecerá dentro de este círculo.
- Si $\|\Delta_t\|_{\mathbf{Q}_1}^2$ deja el círculo infinitas veces, como el tiempo total en que $\|\Delta_t\|_{\mathbf{Q}_1}^2$ deja el círculo es finito,

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k < \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} T_k = 0 \quad (4.44)$$

Así $\|\Delta_t\|_{\mathbf{Q}_1}^2$ es acotada por medio de un argumento del conjunto invariante. De (4.43) $\dot{\Delta}$ también es acotada. Teniendo $\|\Delta_t\|_{\mathbf{Q}_1}^2$ denota el error de seguimiento más grande durante el intervalo T_k . Entonces (4.44) y $\|\Delta_{t,k}\|_{\mathbf{Q}_1}^2$ acotado implica que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\|\Delta_{t,k}\|_{\mathbf{Q}_1}^2 - \bar{\eta} \right] = 0$$

Así $\|\Delta_{t,k}\|_{\mathbf{Q}_1}^2$ convergerá a $\bar{\eta}$. Por lo tanto se logra obtener (II). ■

Comentario 4.2 *Muchos documentos han presentado la prueba de estabilidad del neuro identificador a través de la teoría de Lyapunov (ver [21], [35] y [47]). La existencia del error de modelado requiere la técnica adaptable robusta como en [32]. Para los ejemplos, [21] usa σ -modificación para evitar que el error de identificación sea infinito en presencia de una perturbación acotada pequeña. En este documento usamos la técnica de zona-muerta. Esto significa que cuando la norma del error de identificación es pequeña comparado con el error de modelado, se detiene la regla de adaptación para asegurar que el peso y el error de identificación sean acotados. Esta técnica se ha usado con éxito en las redes neuronales estáticas como en [4]. Si la red neuronal (4.22) puede igualar al sistema no lineal exactamente ($\tilde{\mathbf{f}} = 0, \bar{\eta} = 0$), se alcanza la estabilidad asintótica, es decir.*

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\Delta_t\|_{\mathbf{Q}_1}^2 dt = 0, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \|\Delta_t\| = 0.$$

Comentario 4.3 *El procedimiento de aprendizaje (4.31) de las redes neuronales multicapa dinámicas (4.58) es similar con la propagación hacia atrás de las redes neuronales multicapa estáticas [26]. $(\mathbf{K}_i \mathbf{P})$ es el índice de aprendizaje. $(\mathbf{K}_i \mathbf{P} \Delta_t \sigma^T)$ y $(\mathbf{K}_i \mathbf{P} \mathbf{W}_{i,t} \Delta_t \hat{\mathbf{x}}_t^T)$ son exactamente las mismas como en el esquema de propagación hacia atrás [12], [45].*

Comentario 4.4 *Aún cuando la regla de aprendizaje propuesta se parece a los algoritmos de propagación hacia atrás con un término adicional, la estabilidad del error asintótica global es garantizada debido al hecho que es derivado basado en la aproximación de Lyapunov. Así, el problema mínimo local (que es una preocupación mayor en el aprendizaje estático) no es alcanzado en este caso.*

Comentario 4.5 *Ninguna condición inicial especial se requiere, por lo tanto no es necesario el aprendizaje off-line. El objetivo de la regla de actualización (4.31) es para minimizar (4.23). Así los pesos en este algoritmo on-line no puede converger a los valores óptimos, pero éstos son acotados.*

4.7. Simulación

4.7.1. Identificación de sistemas no lineales

Se emplea un sistema no lineal para ilustrar como diseñar un sistema difuso empleando el algoritmo del gradiente descendente. Se desea diseñar un sistema difuso para identificar el siguiente sistema no lineal:

$$y(k+1) = \frac{y(k)}{1+y(k)^2} + u(k)^3 \quad (4.45)$$

Se tienen 2 reglas difusas

R_1 : Si $y(k)$ es A_{11} y $u(k)$ es A_{12} entonces $y(k+1)$ es B_1

R_2 : Si $y(k)$ es A_{21} y $u(k)$ es A_{22} entonces $y(k+1)$ es B_2

donde los 6 conjuntos difusos A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} , B_1 y B_2 son desconocidos, asumimos que sus funciones de pertenencia se eligen como funciones Gaussianas

$$\mu(x) = \exp\left(-\frac{(x-c)^2}{\sigma^2}\right)$$

función con forma de campana, centrada en el valor c , de anchura σ y amplitud 1.

1) Fuzzyficador tipo singleton

$$\mu = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x^* \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

por lo tanto para una declaración difusa se tiene

$$(x \text{ es } A) \rightarrow \mu_A(x^*)$$

2) La operación difusa:

$\{y(k) \text{ es } A_{11} \text{ y } u(k) \text{ es } A_{12}\}$ es

$$\mu_{A_{11}}\mu_{A_{12}}$$

Empleando implicaciones difusas de la forma:

$\{\text{Si } y(k) \text{ es } A_{11} \text{ y } u(k) \text{ es } A_{12} \text{ entonces } y(k+1) \text{ es } B_1\}$ produce

$$\mu_{A_{11}}\mu_{A_{12}}\mu_{B_1}$$

La relación de 2 reglas difusas R_1 y R_2 es la operación O

$$\mu = \text{máx} [(\mu_{A_{11}}\mu_{A_{12}})\mu_{B_1}, (\mu_{A_{21}}\mu_{A_{22}})\mu_{B_2}]$$

3) Defuzzyficador,

suponiendo que el centro del conjunto difuso B_1 es \bar{y}^1 , el conjunto difuso es un conjunto difuso normal $\mu_{B_1}(\bar{y}^1) = 1$

suponiendo que el centro del conjunto difuso B_2 es \bar{y}^2 , el conjunto difuso es un conjunto difuso normal $\mu_{B_2}(\bar{y}^2) = 1$

la altura del primer conjunto difuso es $\mu_{A_{11}}\mu_{A_{12}}\mu_{B_1}$

la altura del segundo conjunto difuso es $\mu_{A_{21}}\mu_{A_{22}}\mu_{B_2}$

Empleando un defuzzyficador por media de centros, la salida del sistema difuso es

$$\hat{y}(k+1) = \frac{\bar{y}^1 (\mu_{A_{11}}\mu_{A_{12}}) + \bar{y}^2 (\mu_{A_{21}}\mu_{A_{22}})}{\mu_{A_{11}}\mu_{A_{12}} + \mu_{A_{21}}\mu_{A_{22}}} \quad (4.46)$$

El objetivo de identificación es encontrar 4 funciones de pertenencia $\mu_{A_{11}}$, $\mu_{A_{12}}$, $\mu_{A_{21}}$, $\mu_{A_{22}}$ (cada función de pertenencia tiene dos parámetros \bar{y}^1 (que corresponde al conjunto difuso B_1) y \bar{y}^2 (que corresponde al conjunto difuso B_2) por lo que se considera minimizar el siguiente criterio (4.47):

$$J = [y(k+1) - \hat{y}(k+1)]^2 \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} \bar{y}^1(k+1) &= \bar{y}^1(k) - \eta \frac{(\hat{y}-y)}{b} z_1 \\ \bar{y}^2(k+1) &= \bar{y}^2(k) - \eta \frac{(\hat{y}-y)}{b} z_2 \\ c_{11}(k+1) &= c_{11}(k) - 2\eta(\hat{y}-y) z_1 \frac{(\bar{y}^1-\hat{y})(y(k)-c_{11})}{b\sigma_{11}^2} \\ &\vdots \quad c_{12} \quad c_{21} \\ c_{22}(k+1) &= c_{22}(k) - 2\eta(\hat{y}-y) z_2 \frac{(\bar{y}^2-\hat{y})(u(k)-c_{22})}{b\sigma_{22}^2} \\ \sigma_{11}(k+1) &= \sigma_{11}(k) - 2\eta(\hat{y}-y) z_1 \frac{(\bar{y}_1-\hat{y})(y(k)-c_{11})^2}{b\sigma_{11}^3} \end{aligned} \quad (4.48)$$

donde

$$\begin{aligned} z_1 &= \exp\left(-\frac{(y(k)-c_{11})^2}{\sigma_{11}^2}\right) \exp\left(-\frac{(u(k)-c_{12})^2}{\sigma_{12}^2}\right) \\ z_2 &= \exp\left(-\frac{(y(k)-c_{21})^2}{\sigma_{21}^2}\right) \exp\left(-\frac{(u(k)-c_{22})^2}{\sigma_{22}^2}\right) \\ a &= \bar{y}_1 z_1 + \bar{y}_2 z_2 \\ b &= z_1 + z_2 \\ \eta &= \frac{1}{1 + \|z_1\|^2 + \|z_2\|^2} \end{aligned}$$

De las condiciones iniciales aleatorias $[0, 1]$, los resultados de identificación se muestran en la figura 4.2:

Problema 4.1 *En este caso se desea identificar un sistema no lineal empleando un sistema difuso.*

Solución 4.1 *Los sistemas difusos son muy útiles cuando los modelos no están disponibles o se tiene información parcial del sistema, en este problema se conoce el modelo matemático.*

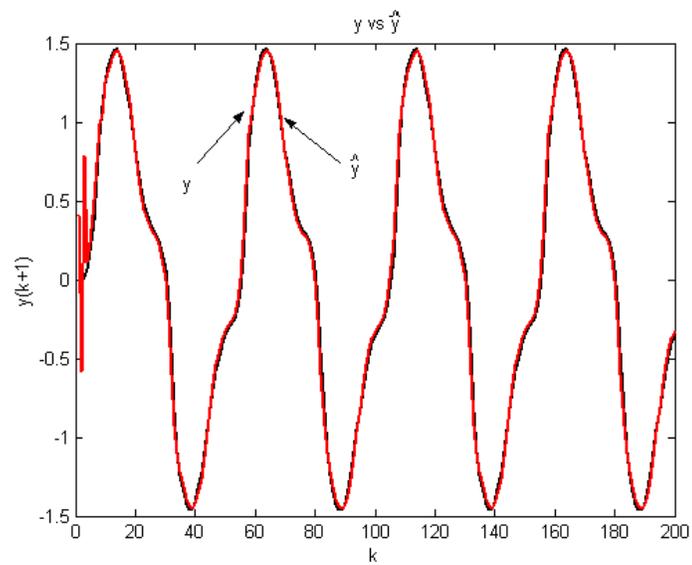
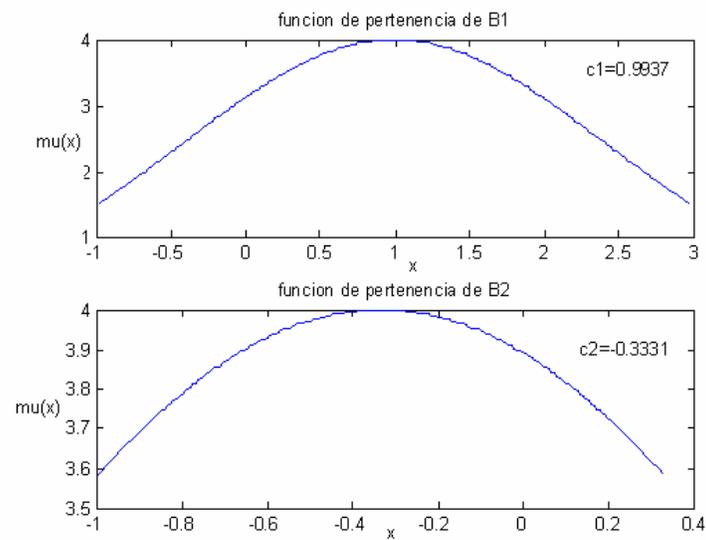


Figura 4.2: Identificación de sistemas no lineales.

Figura 4.3: Funciones de pertenencia para B_1 y B_2 .

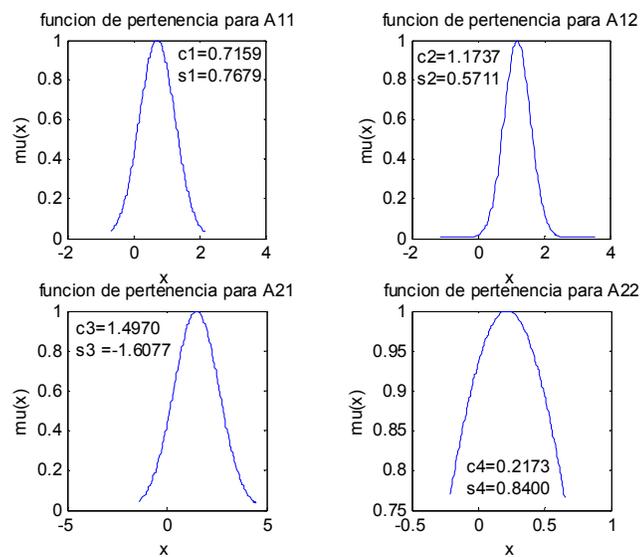


Figura 4.4: Funciones de pertenencia para A_{11} , A_{12} , A_{21} y A_{22} .

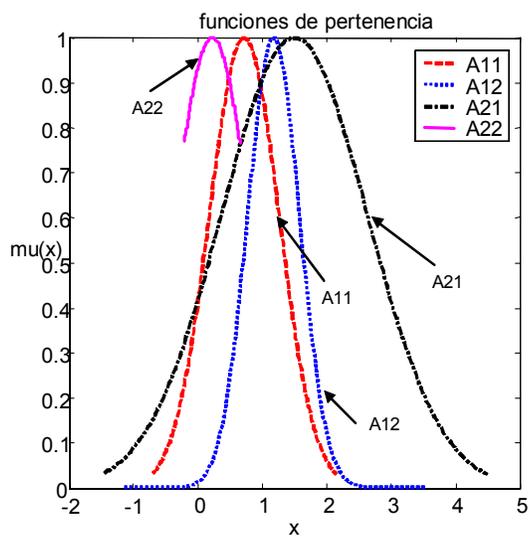


Figura 4.5: Comparación de las funciones de pertenencia de A_{11} , A_{12} , A_{21} y A_{22} .

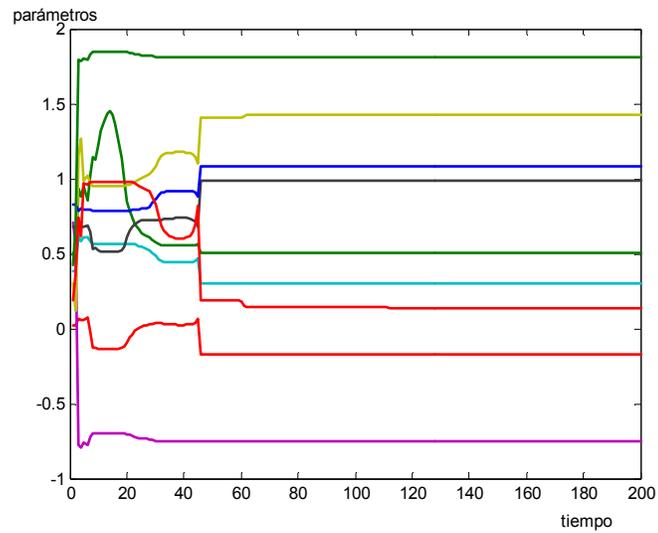


Figura 4.6: Convergencia de parámetros para las funciones de pertenencia A_{11} , A_{12} , A_{21} y A_{22} .

		y(k)	
		$A_{11}(0.7159)$	$A_{21}(1.4970)$
u(k)	$A_{12}(1.1737)$	$B_1(0.9937)$	
	$A_{22}(0.2173)$		$B_2(-0.3331)$

Figura 4.7: A cada combinación de las variables de entrada, se asocia una consecuencia.

Conclusión 4.1 *Para este caso se utilizaron dos reglas difusas, con este valor fue posible obtener un buen resultado en la identificación del sistema; en realidad el número de reglas ideal que nos permita hacer una aproximación adecuada del sistema es aún un tema de investigación, este dato se establece de acuerdo a los resultados que mejor se adecuen al problema.*

La aproximación que se obtiene del sistema no lineal es adecuada en términos generales, se determina a partir de un sistema difuso, con dos reglas difusas y cuatro conjuntos difusos A_{11} , A_{12} , A_{21} y A_{22} (figura 4.4) para la parte de la premisa y B_1 y B_2 (figura 4.3) en la parte de la consecuencia de estas reglas SI-ENTONCES (IF-THEN). Se utilizan funciones del tipo Gaussianas, con parámetros variables: la posición del centro y ancho de cada función (c y σ). El propósito del algoritmo de optimización es cambiar estos parámetros de tal forma que el sistema difuso aproxime lo mejor posible al sistema no lineal. En la figura 4.6 podemos observar que por medio del algoritmo empleado se alcanza la convergencia de cada parámetro establecido permitiendo al sistema difuso identificar a la planta no lineal. En la figura 4.7 se muestra que para una combinación de las variables de entrada se da un valor en la consecuencia de las reglas difusas como parte de la aplicación del algoritmo de optimización, así, para este caso:

$$R_1 : \text{Si } y(k) \text{ es } 0,7159 \text{ y } u(k) \text{ es } 1,1737 \text{ entonces } y(k+1) \text{ es } 0,9937$$

$$R_2 : \text{Si } y(k) \text{ es } 1,4970 \text{ y } u(k) \text{ es } 0,2173 \text{ entonces } y(k+1) \text{ es } -0,331$$

Este mismo conocimiento se puede emplear en la identificación y control de sistemas no lineales prácticos tales como los robots manipuladores. A continuación se presenta el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1 *Se aplicará el algoritmo de diseño establecido anteriormente a un problema de un robot manipulador de dos grados de libertad [31].*

Expresando las dinámicas de un robot manipulador de dos grados de libertad de la siguiente forma:

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + f_D(\dot{q}) = \tau(t)$$

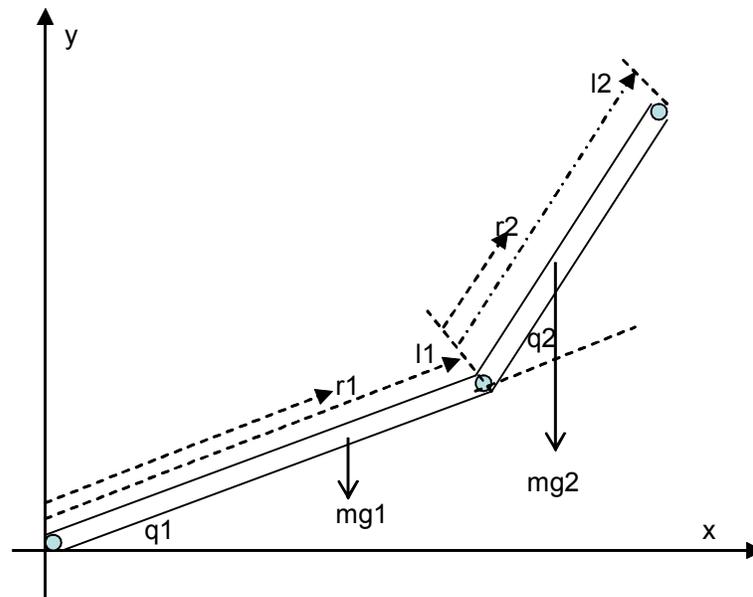


Figura 4.8: Robot Manipulador de dos grados de libertad.

donde $q = [q_1, q_2]^T$ es la posición de los eslabones del robot, $\tau(t) \in R^2$ es la entrada de control, $M(q)$ es la matriz de inercia, $V(q, \dot{q})$ es la matriz centrípeta y de Coriolis, $G(q)$ es el vector de la gravedad, $f_D(\dot{q})$ es el vector de la fricción.

En la figura 4.8 se muestra un esquema de un robot manipulador de dos grados de libertad. Para el caso de los dos eslabones, los elementos se pueden representar como

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
M_{11} &= m_1 (r_1^2/4 + l_1^2/3) + m_2 (l_1^2 + r_2^2/4 + l_2^2/3 + l_1 l_2 \cos q_2) \\
&\quad + m_2 (l_1^2 + 3/4 l_2^2 + l_1 l_2 \cos q_2) \\
M_{12} &= m_2 (r_2^2/4 + l_2^2/3 + \frac{1}{2} l_1 l_2 \cos q_2) + m_L l_2^2 = M_{21} \\
M_{22} &= m_2 (r_2^2/4 + l_2^2/3) + m_L l_2^2 \\
C(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} -V_m \dot{q}_2 \sin q_2 & -V_m \sin q_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ V_m \dot{q}_1 \sin q_2 & 0 \end{bmatrix} \\
V_m &= (\frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 + m_L l_1 l_2), \\
G(q) &= \begin{bmatrix} (\frac{1}{2} m_1 + m_2) g l_1 \cos q_1 + \frac{1}{2} m_2 g l_2 \cos (q_1 + q_2) \\ \frac{1}{2} m_2 g l_2 \cos (q_1 + q_2) \end{bmatrix} \\
F_d(\dot{q}) &= \begin{bmatrix} \nu_1 \dot{q}_1 + \kappa_1 \text{sign}(\dot{q}_1) \\ \nu_2 \dot{q}_2 + \kappa_2 \text{sign}(\dot{q}_2) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Los parámetros del robot son: $m_1 = 4,8\text{Kg}$, $m_2 = 5,3\text{Kg}$, $l_1 = l_2 = 1\text{m}$. $r_1 = l_1/2$, $r_2 = l_2/2$, $m_L = 0$. Los coeficientes de fricción son 0,4 y 0,7. Por lo tanto las matrices reales de (4.49) son:

$$\begin{aligned}
M &= \begin{bmatrix} 9,3 + 5,3 \cos(q_2) & 2,1 + 2,65 \cos q_2 \\ 2,1 + 2,65 \cos q_2 & 2,1 \end{bmatrix}, \\
C &= \begin{bmatrix} -2,65 \dot{q}_2 \sin q_2 & -2,65 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin q_2 \\ 2,65 \dot{q}_1 \sin q_2 & 0 \end{bmatrix} \\
G(q) &= \begin{bmatrix} 75,4 \cos q_1 + 25,97 \cos (q_1 + q_2) \\ 25,97 \cos (q_1 + q_2) \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

Para realizar las simulaciones, se considera un robot manipulador planar de dos grados de libertad. Se asume que cada eslabón tiene su masa concentrada en un punto al final. El manipulador está en posición vertical, con gravedad y fricción.

Los parámetros del robot son: $m_1 = m_2 = 1$, $l_1 = 1$, $l_2 = 2$.

Los dos coeficientes de fricción son 0,3, y la gravedad es 9,8.

(4.49) se puede escribir como:

$$\dot{x} = f(x_t, t) + g(x_t, t)u_t \quad (4.50)$$

donde

$$\begin{aligned} x_t &= [q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2]^T, \\ f(x_t, t) &= [\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, -M^{-1}(V\dot{q} + G + F_d)]^T, \\ g(x_t, t)u &= [0, 0, M^{-1}(q)\tau]^T. \end{aligned}$$

Asumimos que sólo la posición del ángulo q es medible, la velocidad \dot{q} será estimada por el observador en modo deslizante (4.16).

Para el robot manipulador de dos grados de libertad se utilizan dos observadores, observador (a):

$$\begin{aligned} \dot{\bar{q}}_a &= A\bar{q}_a + S(\bar{q}_a, e) - Ke_t \\ \bar{y}_a &= C\bar{q}_a, \quad \bar{q}_a := [q_1, \dot{q}_1] \end{aligned} \quad (4.51)$$

observador (b):

$$\begin{aligned} \dot{\bar{q}}_b &= A\bar{q}_b + S(\bar{q}_b, e) - Ke_t \\ \bar{y}_b &= C\bar{q}_b, \quad \bar{q}_b := [q_2, \dot{q}_2] \end{aligned} \quad (4.52)$$

Siguiendo los pasos de diseño de la figura 4.1.

1.- Como tenemos la matriz C

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

podemos elegir $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ para hacer que el par (A, C) sea observable.

2.- Ahora se verifica que el par (A, C) sea observable, esto lo podemos hacer calculando la matriz siguiente la cuál debe ser de rango completo

$$\text{rango} \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = n$$

$$\text{Si } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad CA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se tiene que

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

De aquí se obtiene que el par (A, C) efectivamente es observable, por lo tanto podemos encontrar K tal que $A_0 = A - KC$ sea estable.

3.- Si elegimos $K > 0$ para que A_0 sea estable tenemos

$$K = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} > 0,$$

4.- Entonces $A_0 = A - KC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se obtiene el polinomio característico de A_0 y sus raíces, se verifica si son raíces reales negativas:

$$\det |sI - A_0| = \det \left| s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right| = \det \left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right| = \det \left| \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} \right|$$

$$\det |sI - A_0| = (s+2)s - (-1) = s^2 + 2s + 1 = (s+1)(s+1)$$

$$\text{polinomio característico} = s^2 + 2s + 1$$

raíces $s_1 = -1$, $s_2 = -1$ tienen parte real negativa, por lo tanto A_0 es estable.

5.- Seleccionar $Q > 0$

si empleamos $Q = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$, la solución de la ecuación de Lyapunov

$$A_0 P + P A_0^T = -Q \tag{4.53}$$

6.- Debemos obtener $P > 0$, de (4.53) se tiene:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$$

por lo tanto $P = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.25 \\ 3.25 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}$

Para verificar que $P > 0$ es definida positiva, sus menores principales deben ser positivos.

$$P_1 = 1.5 > 0$$

$$\det |P| = P_1 P_4 - P_2 P_3 = (1.5)(0) - (0.25)(3.25) = 0 + 0.8125 = 0.8125 > 0$$

de esta forma la matriz P es definida positiva.

7.- Se elije $h(x)$ acotada

Por tanto las matrices reales de (4.49): donde $q = [q_1, q_2]^T$ (rad).

Para estabilizar al robot manipulador se emplea un control PD

$$\begin{aligned} \tau &= -K_p (q - q_D) - K_d (\dot{q} - \dot{q}_D) \\ \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} &= -K_p \begin{bmatrix} q_1 - q_1^d \\ q_2 - q_2^d \end{bmatrix} - K_d \begin{bmatrix} \dot{q}_1 - \dot{q}_1^d \\ \dot{q}_2 - \dot{q}_2^d \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.54)$$

donde

$$K_p = \begin{bmatrix} 600 & 0 \\ 0 & 600 \end{bmatrix}, K_d = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Por tanto todos los estados del manipulador son acotados. De las definiciones de M , V , G y F_d sabemos que $f(x_t, t) + g(x_t, t)u$ en (4.50) es acotada, de modo que existe una función $h(x)$ tal que

$$-P^{-1}C^T h = f - Ax$$

Sin perder generalidad, elegimos $\|h(x_t, u_t)\| < \rho$, $\rho = 10$. Para eliminar el chattering, se puede usar el siguiente compensador de capa acotada

$$S(\bar{x}_t, e_t) = -\frac{P^{-1}C^T C \Delta_t}{\|C \Delta_t\|} \rho = \begin{cases} -\rho P^{-1}C^T \text{sign}(C \Delta_t) & |C \Delta_t| \geq \delta \\ -\rho P^{-1}C^T C \Delta_t / \delta & |C \Delta_t| < \delta \end{cases} \quad (4.55)$$

El controlador de capa acotada anterior ofrece una aproximación continua para el modo deslizante discontinuo dentro de la capa acotada y garantiza que el error del observador esté

dentro de cualquier vecindad cercana al origen [6]. El valor de δ es un dato importante que permite establecer el modo deslizante para el observador, en este caso se ha seleccionado un dato de $\delta = 0.01$; de esta forma se proporciona la característica para el observador en modo deslizante.

Un modelo difuso genérico se representa como una colección de reglas difusas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
R^i: & \text{SI } \hat{x}_1 \text{ es } A_{1i} \text{ y } \hat{x}_2 \text{ es } A_{2i} \text{ y } \cdots \hat{x}_n \text{ es } A_{ni} \\
& \text{ENTONCES } \dot{\hat{x}}_1 \text{ es } B_{1i} \text{ y } \cdots \dot{\hat{x}}_n \text{ es } B_{ni} \\
& \text{O } \dot{\hat{x}}_1 \text{ es } u_1 C_{1i} \text{ y } \cdots \dot{\hat{x}}_m \text{ es } u_m C_{mi} \cdots \dot{\hat{x}}_n \text{ es } C_{ni} \\
& \text{O } \hat{x}_1 \text{ es } a_1 \hat{x}_1 \text{ y } \cdots \hat{x}_n \text{ es } a_{ni} \hat{x}_n
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Esta regla se puede escribir de tres forma para las reglas:

$$\begin{aligned}
R_1^i: & \text{SI } \hat{x}_1 \text{ es } A_{1i} \text{ y } \hat{x}_2 \text{ es } A_{2i} \text{ y } \cdots \hat{x}_n \text{ es } A_{ni} \\
& \text{ENTONCES } \frac{1}{3} \dot{\hat{x}}_1 \text{ es } B_{1i} \text{ y } \cdots \frac{1}{3} \dot{\hat{x}}_n \text{ es } B_{ni} \\
R_2^i: & \text{SI } \hat{x}_1 \text{ es } A_{1i} \text{ y } \hat{x}_2 \text{ es } A_{2i} \text{ y } \cdots \hat{x}_n \text{ es } A_{ni} \\
& \text{ENTONCES } \frac{1}{3} \dot{\hat{x}}_1 \text{ es } u_1 C_{1i} \text{ y } \cdots \dot{\hat{x}}_m \text{ es } u_m C_{mi} \text{ y } \cdots \dot{\hat{x}}_n \text{ es } C_{ni} \\
R_3^i: & \text{SI } \hat{x}_1 \text{ es } A_{1i} \text{ y } \hat{x}_2 \text{ es } A_{2i} \text{ y } \cdots \hat{x}_n \text{ es } A_{ni} \\
& \text{ENTONCES } \frac{1}{3} \dot{\hat{x}}_1 \text{ es } a_1 \hat{x}_1 \text{ y } \cdots \frac{1}{3} \dot{\hat{x}}_n \text{ es } a_{ni} \hat{x}_n
\end{aligned}$$

Se utilizan las $l(i = 1, 2 \cdots l)$ reglas difusas SI-ENTONCES que permita realizar un mapeo de un vector lingüístico de entrada $\hat{X} = [\hat{x}_1 \cdots \hat{x}_n] \in \mathfrak{R}^n$ a un vector lingüístico de salida $\hat{Y}(k) = \left[\dot{\hat{x}}_1 \cdots \dot{\hat{x}}_m \right]^T$. A_{1i}, \cdots, A_{ni} , B_{1i}, \cdots, B_{ni} y C_{1i}, \cdots, C_{ni} son conjuntos difusos estándar [41]. Para la variable de entrada x_i existen l_i conjuntos difusos. En el caso de conexiones completas, $l = l_1 \times l_2 \times \cdots \times l_n$. De [41] es conocido que si se utiliza inferencia de productos, media de centros y fuzzyficador tipo singleton, la p -ésima salida del sistema

difuso se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\dot{\hat{x}}_p &= \left(\sum_{i=1}^l w_{1pi} \left[\prod_{j=1}^n \mu_{A_{ji}} \right] \right) / \left(\sum_{i=1}^l \left[\prod_{j=1}^n \mu_{A_{ji}} \right] \right) = \sum_{i=1}^l w_{1pi} \phi_i \\ \frac{1}{3}\dot{\hat{x}}_p &= \left(\sum_{i=1}^l u_i w_{2pi} \left[\prod_{j=1}^n \mu_{A_{ji}} \right] \right) / \left(\sum_{i=1}^l \left[\prod_{j=1}^n \mu_{A_{ji}} \right] \right) = \sum_{i=1}^l u_i w_{2pi} \phi_i \\ \frac{1}{3}\dot{\hat{x}}_p &= \sum_{i=1}^l a_i \hat{x}_i\end{aligned}$$

donde $\mu_{A_{ji}}$ son los valores de las funciones de pertenencia de los conjuntos difusos A_{ji} , w_{pi} es el punto en que $\mu_{B_{pi}} = 1$. Si definimos

$$\phi_i = \prod_{j=1}^n \mu_{A_{ji}} / \sum_{i=1}^l \prod_{j=1}^n \mu_{A_{ji}} \quad (4.57)$$

El modelo difuso anterior puede representar adecuadamente el siguiente sistema el cuál puede ser una representación del modelo del sistema no lineal en cuestión:

$$\dot{\hat{q}} = A_n \hat{q} + W_{1,t} \sigma(V_{1,t} \hat{q}) + W_{2,t} \phi(V_{2,t} \hat{q}) B \tau \quad (4.58)$$

donde $\hat{q} = [\hat{q}_1, \hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_2]$. Se seleccionan $W_{1,t}$ y $W_{2,t} \in R^{4 \times 3}$, $V_{1,t}$ y $V_{2,t} \in R^{3 \times 4}$,

$$\sigma(x) = \frac{2}{(1 + e^{-2x})} - 0,5, \quad \phi(x) = \frac{0,2}{(1 + e^{-0,2x})} - 0,05$$

Las condiciones iniciales son $W_{1,0}^T = W_{2,0}^T = V_{1,0} = V_{2,0} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $q(0) = \bar{q}(0) = \hat{q}(0) = 0$.

Los pesos se actualizan de acuerdo a (4.31) con $\bar{\eta} = 0,2$, $\bar{K}_i := K_i P = 10I_4$, $A_n = -2I_4$.

Los resultados de la identificación para el estado q se muestran en las figuras 4.9 - 4.12. Si no empleamos el observador, el neuro identificador como en (4.58) tendrá dos dimensiones, elegimos $W_{1,t}$ y $W_{2,t} \in R^{2 \times 3}$, $V_{1,t}$ y $V_{2,t} \in R^{3 \times 2}$. Empleando la misma regla de actualización (4.31) $n = 2$, los resultados de identificación se muestran en las figuras 4.13 - 4.14.

Las funciones de pertenencia que se emplean en el sistema difuso se eligen como funciones Gaussianas de la siguiente forma:

$$\mu_{A_{ji}}(k) = \exp\left(-\frac{(x_j - c_{ji})^2}{\sigma_{ji}^2}\right)$$

El algoritmo de aprendizaje tiene como objetivo variar la posición y ancho de las funciones Gaussianas de forma iterativa tal que se aproxime apropiadamente al sistema no lineal. Se seleccionan los siguientes datos para $l = n = 2$, c_{ji} y σ_{ji} son números aleatorios entre $(0, 1)$.

Podemos ver que el identificador basado en el observador es mejor que el identificador difuso donde los estados son parcialmente medibles. El número de reglas establecido nos muestra resultados aceptables.

En la figura 7.1 se muestra el diagrama general para la identificación de los estados del robot manipulador.

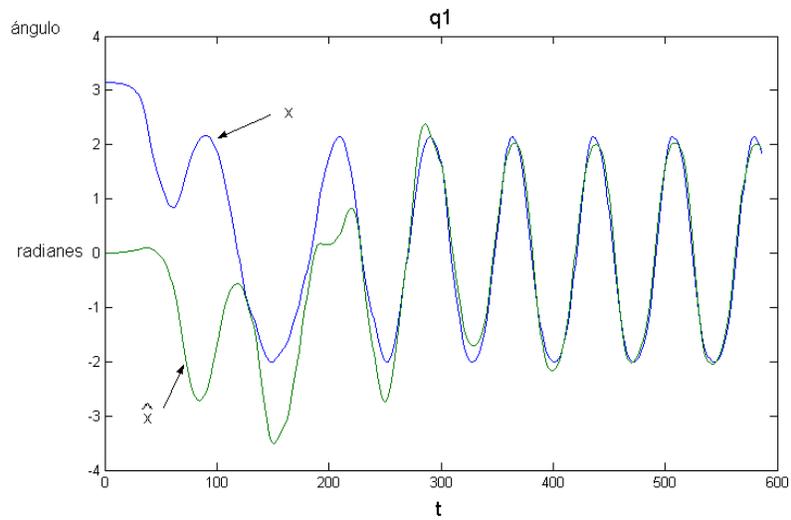
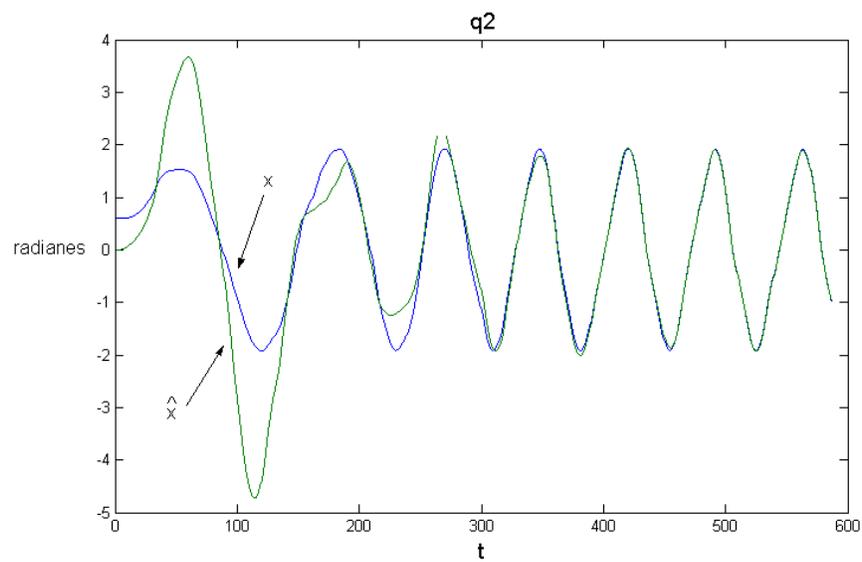
Problema 4.2 *Identificar los estados del sistema no lineal para el robot manipulador.*

Solución 4.2 *Se utiliza un neuro identificador con la regla de actualización (4.31). El diagrama de simulación se muestra en el apéndice A.*

Conclusión 4.2 *Se puede observar en las figuras correspondientes que la identificación de los estados del robot manipulador es adecuada.*

Problema 4.3 *Estimar los estados del robot manipulador correspondientes a la posición y velocidad empleando un observador en modo deslizante.*

Solución 4.3 *Haciendo uso del observador en modo deslizante (4.16) se estiman los estados correspondientes al sistema. Podemos diseñar un observador en modo deslizante para el sistema (4.50).*

Figura 4.9: Identificación del estado q_1 del robot manipulador.Figura 4.10: Identificación del estado q_2 del robot manipulador.

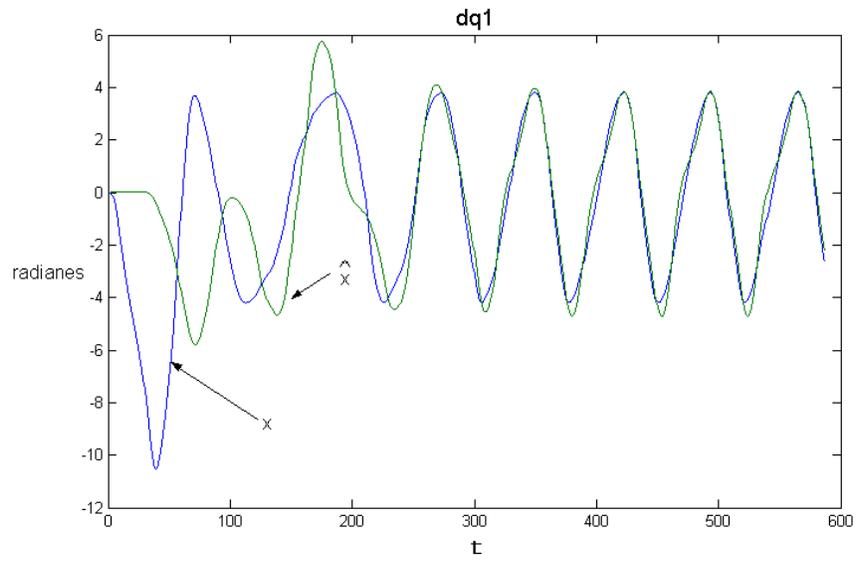


Figura 4.11: Identificación del estado $dq1$ del robot manipulador.

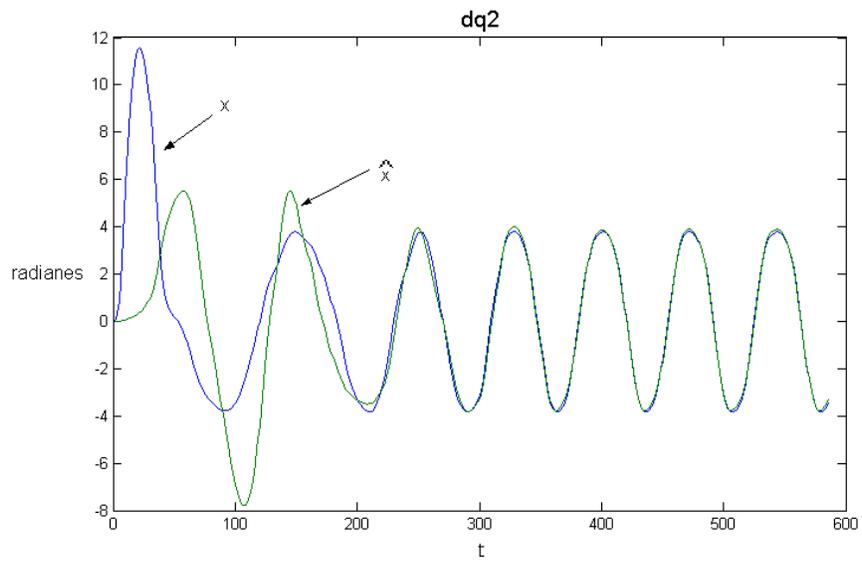


Figura 4.12: Identificación del estado $dq2$ del robot manipulador.

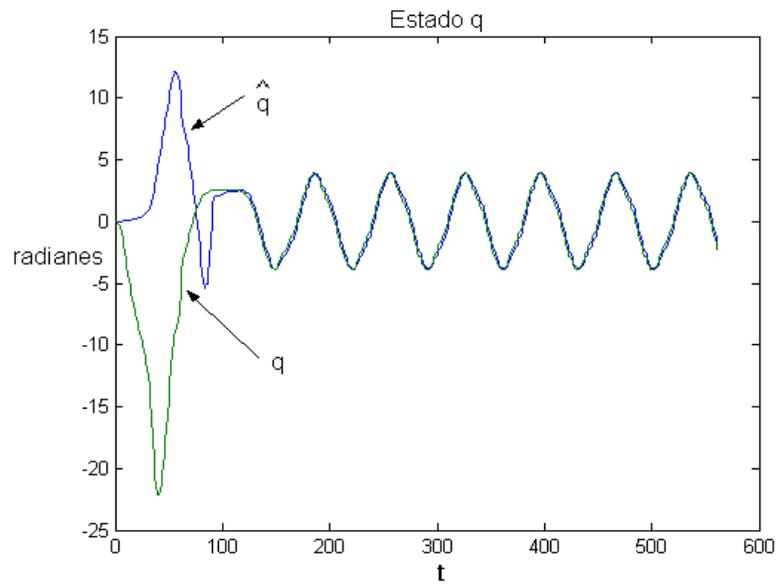


Figura 4.13: Observación del estado q por medio del observador en modo deslizante.

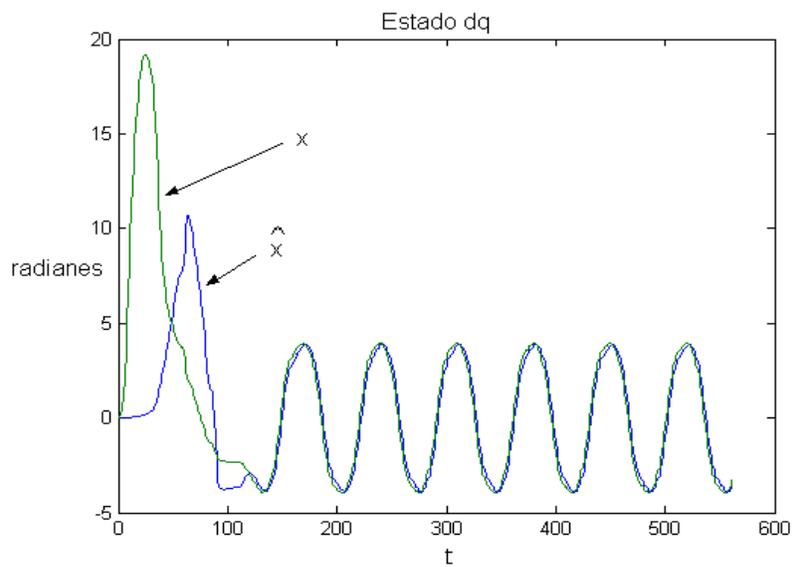


Figura 4.14: Observación del estado dq por medio del observador en modo deslizante.

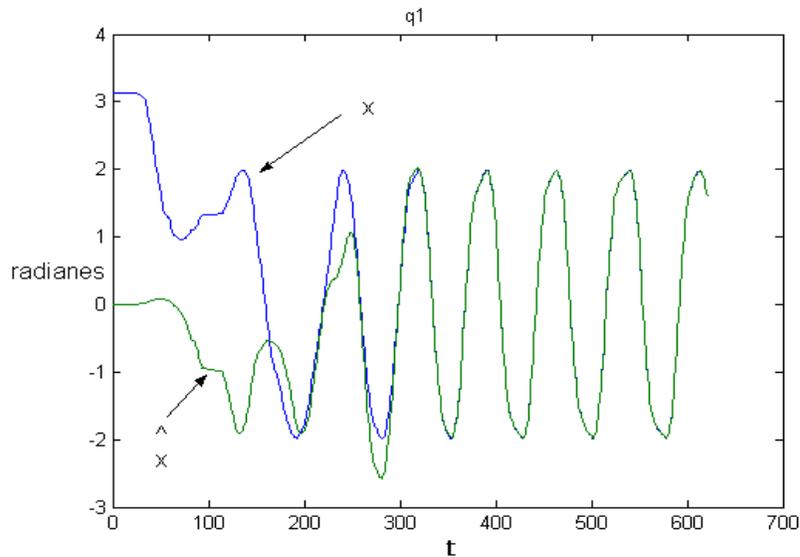


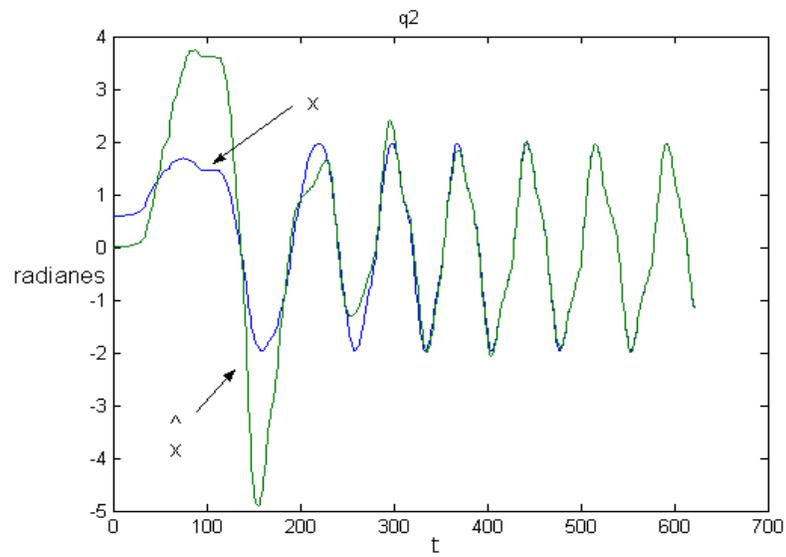
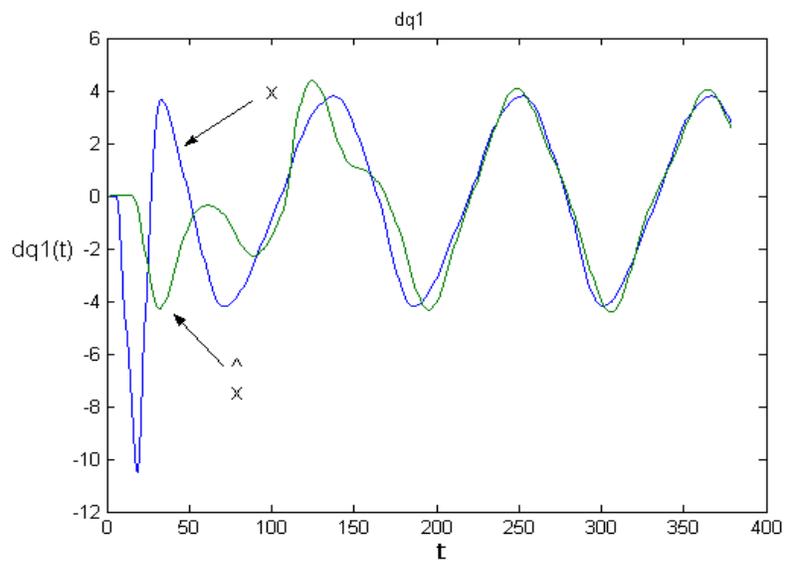
Figura 4.15: Identificación del estado q_1 para el sistema no lineal.

Conclusión 4.3 *Se puede observar en las figuras 4.13 y 4.14 la observación de los estados por medio del observador en modo deslizante.*

Problema 4.4 *Identificar los estados para el robot manipulador empleando el resultado obtenido de la estimación de los estados con el observador en modo deslizante.*

Solución 4.4 *Si se incluye el observador en modo deslizante dentro del neuro identificador para estimar los estados correspondientes al sistema se obtienen los resultados mostrados en las figuras 4.15-4.18.*

Conclusión 4.4 *En las figuras 4.15-4.18 se muestra que la identificación de los estados del sistema empleando el observador en modo deslizante nos proporciona un resultado más adecuado, donde los estados parciales son medibles. Los pequeños castaños se deben a las dinámicas no modeladas que se encuentran presentes. Se puede observar que con un número*

Figura 4.16: Identificación del estado q_2 para el sistema no lineal.Figura 4.17: Identificación del estado dq_1 para el sistema no lineal.

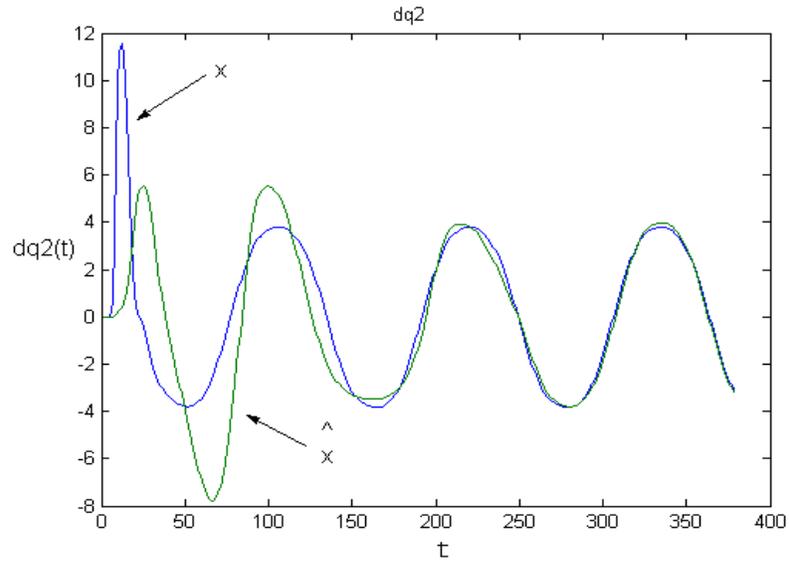


Figura 4.18: Identificación del estado $dq2$ para el sistema no lineal.

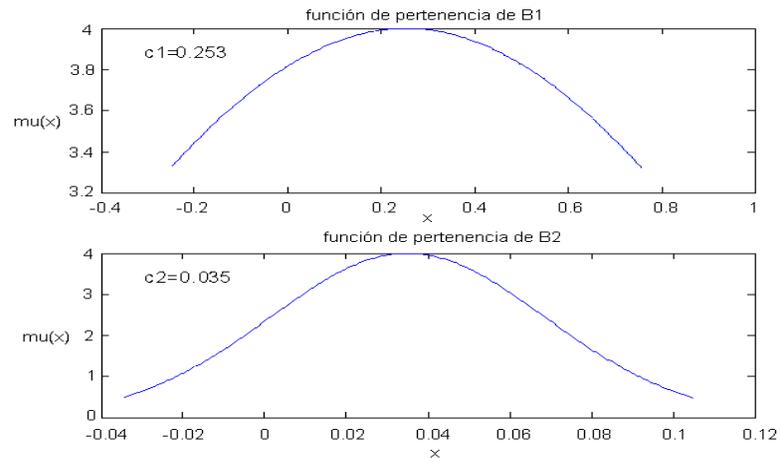


Figura 4.19: Funciones de pertenencia para B1 y B2.

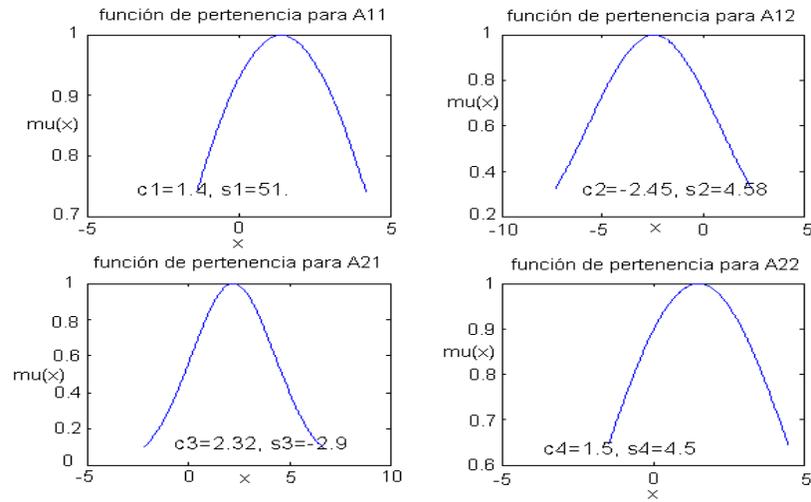


Figura 4.20: Funciones de pertenencia para la parte de la premisa de las reglas difusas.

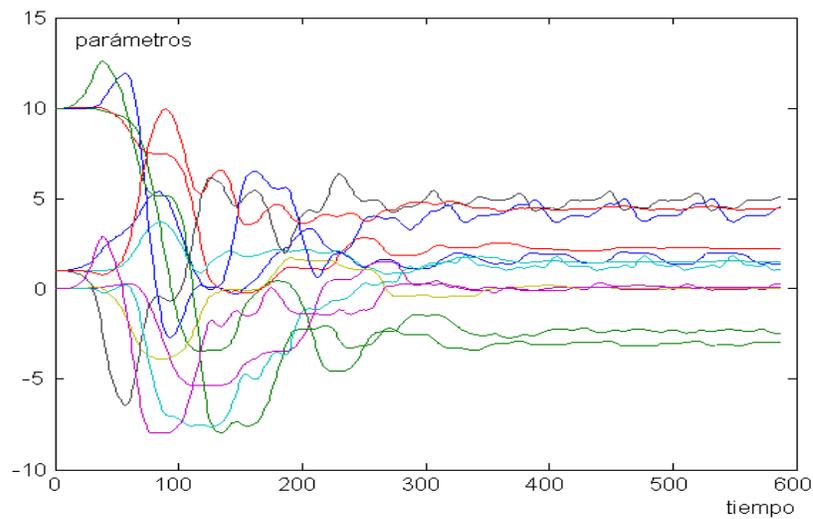


Figura 4.21: Convergencia de parámetros de las reglas difusas.

		y(k)	
		A ₁₁ (1.4)	A ₂₁ (2.32)
u(k)	A ₁₂ (-2.45)	B ₁ (0.253)	
	A ₂₂ (1.5)		B ₂ (0.035)

Figura 4.22: A cada combinación de las variables de entrada, se asocia una consecuencia.

de reglas difusas igual a 2 se obtiene una buena aproximación del sistema no lineal, este valor es relativo ya que se debe variar hasta obtener un resultado satisfactorio a cada problema. En la figura 4.22 se observa que para cada combinación de las variables de entrada se asocia un valor en la consecuencia de cada regla difusa, este resultado se logra a partir de la convergencia de los parámetros establecidos dentro del algoritmo de optimización como se muestra en las figuras 4.19-4.21, en este caso se varían tanto la posición de las funciones Gaussianas como su ancho, permitiendo de esta forma la identificación del sistema no lineal.

Ejemplo 4.2 Se aplicará el mismo algoritmo de diseño a la identificación de un oscilador de Van der Pol.

A continuación se considera el siguiente oscilador de Van der Pol dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1,5 \end{bmatrix} [(1 - x_1^2)x_2 - x_1] . \quad (4.59)$$

$$y = x_1$$

Sabemos que sin una entrada de control, los estados del oscilador de Van der Pol son acotados. Por tanto, podemos usar el mismo observador en modo deslizante como en (4.51) para estimar

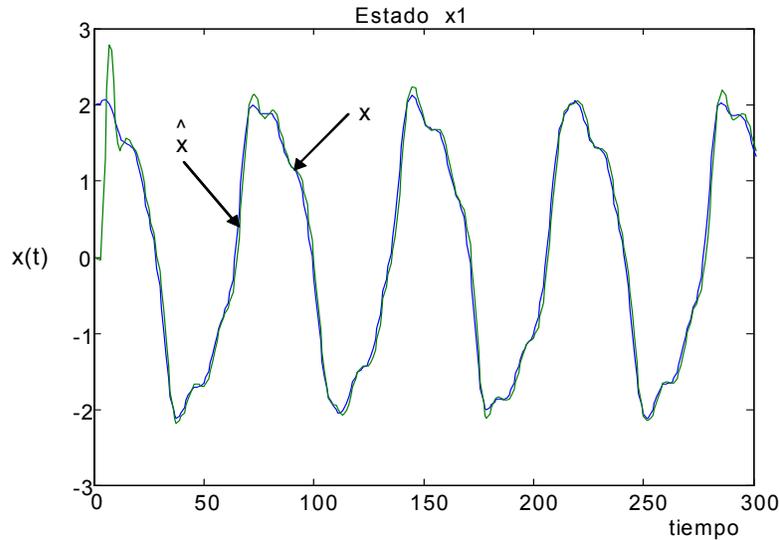


Figura 4.23: Identificación del estado x_1 del oscilador de Van der Pol.

el estado x_2 . Debido a que este sistema no lineal carece de una entrada de control, el sistema difuso puede seleccionarse como

$$\dot{x}_n = Ax_n + W_{1,t}\sigma(V_{1,t}x_n)$$

donde $W_{1,t}$ y $W_{2,t} \in R^{2 \times 3}$, $V_{1,t}$ y $V_{2,t} \in R^{3 \times 2}$, $\bar{K}_i := K_i P = 10I_2$, $A = -2I_2$.

Problema 4.5 *Identificar los estados del sistema de Van der Pol.*

Solución 4.5 *Se utiliza un neuro identificador con una regla de actualización (4.31), los resultados se muestran en las figuras 4.23, 4.24. El diagrama de simulación para realizar la identificación de los estados del sistema de Van der Pol por medio de un identificador difuso se muestra en la figura 7.3 del Apéndice A.*

Conclusión 4.5 *Se puede observar en las figuras correspondientes que la identificación de los estados del oscilador de Van der Pol es buena.*

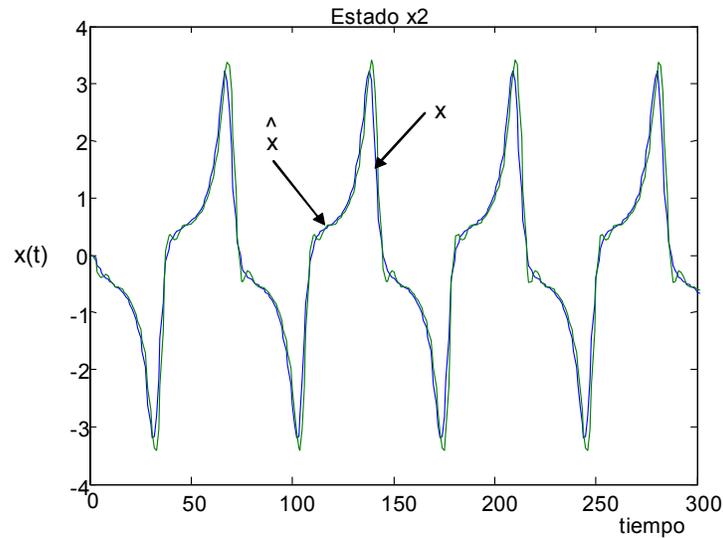


Figura 4.24: Identificación del estado x_2 para el oscilador de Van der Pol.

Problema 4.6 Estimar los estados x_1 y x_2 del oscilador de Van der Pol.

Solución 4.6 Haciendo uso del observador en modo deslizante (4.16) se estiman los estados x_1 y x_2 del oscilador de Van der Pol, los resultados se muestran en la figura 4.25. Podemos diseñar un observador en modo deslizante para el oscilador de Van der Pol, su diagrama se muestra en la figura 7.4 del apéndice A.

Conclusión 4.6 Con ayuda del observador en modo deslizante se ha podido obtener información acerca de los estados del oscilador de Van der Pol.

Problema 4.7 Identificar los estados para el oscilador de Van der Pol empleando el resultado obtenido de la estimación parcial de sus estados con el observador en modo deslizante.

Solución 4.7 Se incluye el observador en modo deslizante dentro del neuro identificador para estimar los estados correspondientes al sistema.

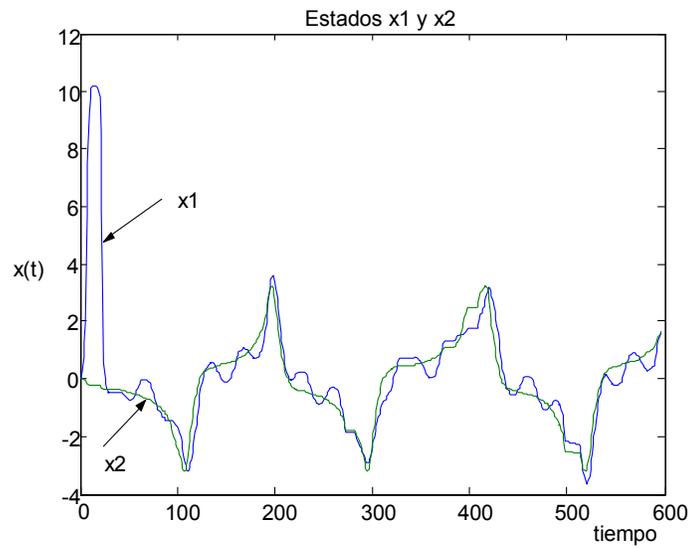


Figura 4.25: Observación de los estados x_1 y x_2 del oscilador de Van de Pol.

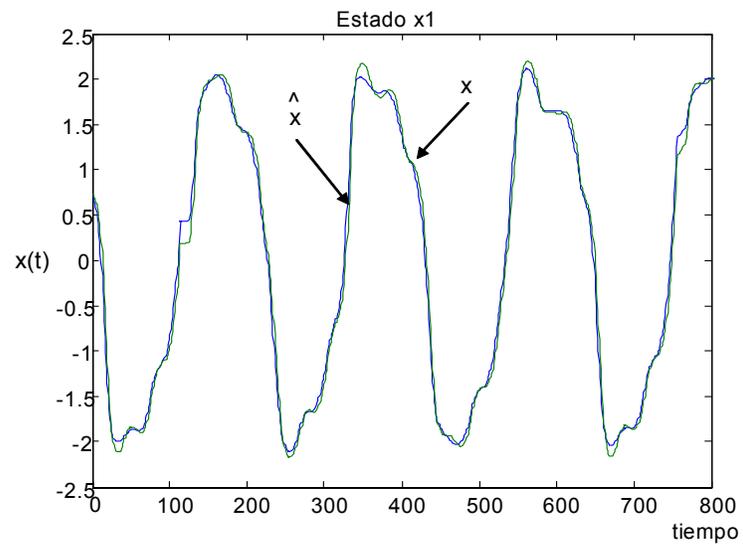


Figura 4.26: Identificación del estado x_1 en base a un observador en modo deslizante.

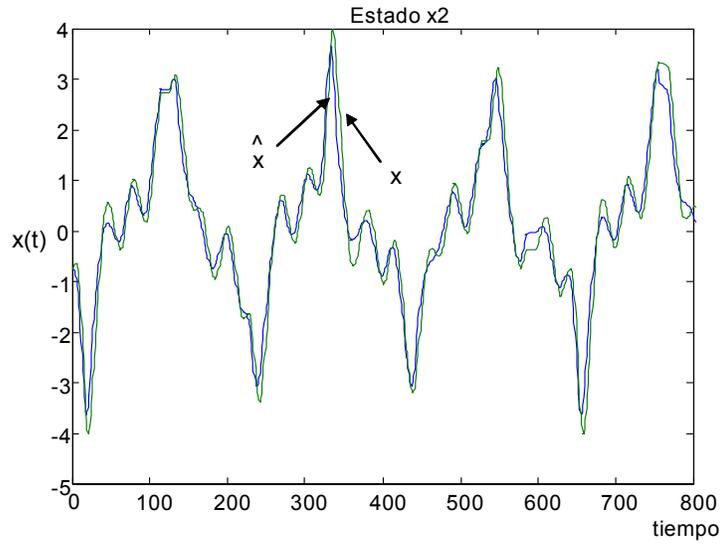


Figura 4.27: Identificación del estado x_2 en base a un observador en modo deslizante.

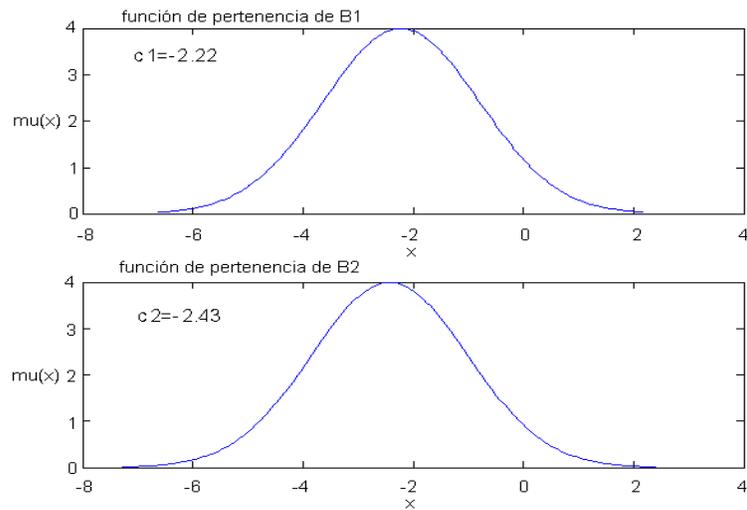


Figura 4.28: Funciones de pertenencia para B1 y B2.

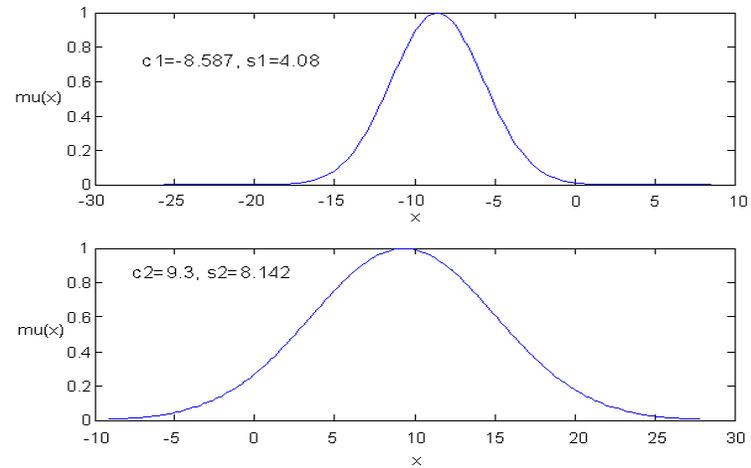


Figura 4.29: Funciones de pertenencia para la parte de la premisa de las reglas difusas.

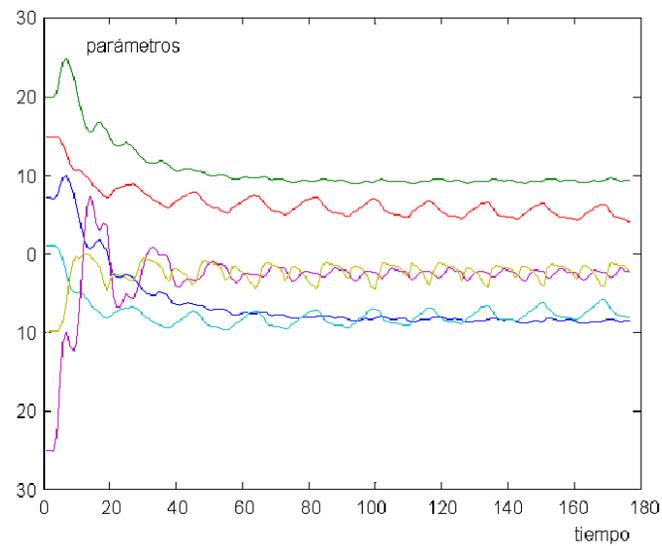


Figura 4.30: Convergencia de parámetros de las reglas difusas.

		y(k)	
		A ₁₁ (-8.587)	A ₂₁ (-8.587)
u(k)	A ₁₂ (9.3)	B ₁ (-2.22)	
	A ₂₂ (9.3)		B ₂ (-2.43)

Figura 4.31: A cada combinación de las variables de entrada, se asocia una consecuencia.

Conclusión 4.7 *Podemos ver que se obtiene una buena aproximación del oscilador de Van der Pol usando el neuro identificador difuso con la información adquirida a partir de la observación de los estados x_1 y x_2 por medio del observador en modo deslizante, figuras 4.26-4.27. Los pequeños castaños se deben a las dinámicas no modeladas que se encuentran presentes. Se puede observar que con 2 reglas difusas se logra cierta aproximación del sistema no lineal; en realidad el número óptimo de reglas difusas adecuado es un valor relativo que se debe variar hasta obtener un resultado satisfactorio a cada problema. En la figura 4.31 se muestra que para cada combinación de las variables de entrada se asocia un valor en la consecuencia de cada regla difusa, este resultado se logra a partir de la convergencia de los parámetros establecidos dentro del algoritmo de optimización como se muestra en las figuras 4.28-4.30, en este caso se varían tanto la posición de las funciones Gaussianas como su ancho, permitiendo de esta forma la identificación del sistema no lineal.*

En este capítulo se han podido estimar los estados internos de un sistema no lineal por medio de un identificador difuso y un observador en modo deslizante, el uso de este observador es adecuado ya que para el caso de los sistemas difusos que se basan en reglas de inferencia es necesario un observador que sea libre de la estructura del modelo. Con la información obtenida a partir de la estimación de los estados del sistema se puede diseñar un

controlador difuso para esta clase de sistemas no lineales. En el capítulo siguiente se plantea la posibilidad de diseño de un controlador adaptable difuso a partir de los datos obtenidos en este capítulo.

Capítulo 5

Control Difuso basado en un Observador

Los sistemas difusos y las redes neuronales son una herramienta muy acertada en el control de sistemas no lineales complejos en casos cuando no se tiene información completa del sistema o cuando se considera al sistema como una caja negra [3], [50], [51]. En este capítulo se muestran dos alternativas de diseño para un controlador difuso, la primera alternativa es una continuación a la opción del observador difuso Takagi-Sugeno que se mostró anteriormente, esta opción es más simplificada que la segunda alternativa en la que se considera un controlador adaptable difuso, el cual requiere de un algoritmo de aprendizaje como el entrenamiento del gradiente descendente, esta segunda propuesta es una opción más general.

5.1. Introducción

Hoy en día el control difuso ha sido sugerido como una alternativa a las técnicas de control convencionales para sistemas de control complejos. Durante la última década, el control difuso ha atraído una gran atención de las comunidades académica e industrial. Mucha gente ha dedicado gran parte de su tiempo y esfuerzo tanto del ámbito de la investigación como en las técnicas de implementación a los controladores difusos [19], [22].

El control difuso es el más útil en la aplicación del conocimiento cualitativo de un sistema para diseñar un controlador. El control difuso es aplicable generalmente a plantas que se encuentran modeladas matemáticamente en forma pobre y donde el conocimiento cualitativo de los operadores con experiencia pueden proporcionar control cualitativo.

Las técnicas de control difuso representan un medio para conjuntar el conocimiento humano, la habilidad y el trato con las incertidumbres dentro del proceso del control. Sin embargo, las técnicas del control difuso sufren problemas tales como (1) el diseño del control difuso es difícil de obtener debido a que no se dispone de las bases teóricas y (2) el desempeño del control difuso puede ser inconsistente debido a que éste depende principalmente de la experiencia individual de los operadores. Sin embargo, debido al auge que ha tenido el control difuso en la aplicación exitosa de los sistemas de control industrial, ha sido evidente que muchos problemas olvidados pueden abordarse de una mejor manera. El análisis de estabilidad y el diseño sistemático son los temas más importantes en los sistemas de control difuso. Recientemente, se han hecho grandes esfuerzos en las investigaciones relacionadas a este tema [4], [9].

5.2. Controladores Difusos

Cuando los sistemas difusos son usados como controladores, éstos se denominan **controladores difusos**. Si los sistemas difusos son usados para modelar el proceso y los controladores son diseñados en base al modelo, entonces los controladores resultantes también son denominados controladores difusos. Por tanto, los controladores difusos son controladores no lineales con una estructura especial. Como se ha visto, el control difuso representa la aplicación más importante de la Teoría Difusa dentro de los problemas prácticos.

Existen dos categorías comunes para diseño de controladores difusos: una es en modelo libre y la otra es en modelo base.

Se puede emplear un controlador al retroalimentar las variables de estado, de la forma $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, \mathbf{x})$, en lugar de aquel donde se retroalimenta la salida, que es de la forma $\mathbf{u} = \mathbf{u}(r, y)$. En la figura 5.1 se muestra la estructura del sistema en el que se hace control retroalimentando

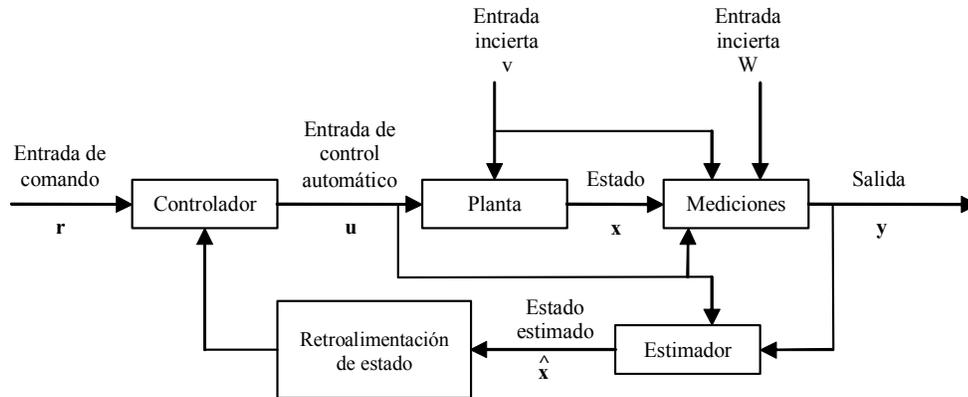


Figura 5.1: Retroalimentación del estado con estimador.

las variables de estado. Si $y \neq x$, se debe estimar el estado, empleando $x(t) \approx \hat{x}(t)$ como se indica por el bloque del estimador. Esto será cierto, por ejemplo, cuando la salida y contenga sólo algunas componentes del vector de estados x . En general, un estimador requerirá como entradas tanto a la salida y como la entrada de control u . Con base en la entrada de control $u(t)$, la salida medida $y(t)$ y el modelo del sistema dinámico, el estimador produce un estado en lugar del estado real $x(t)$ para producir la entrada al controlador. Si el estado completo es medible de manera exacta, $y = x$, entonces no se requiere el estimador.

5.3. Retroalimentación a la Salida de Sistemas Difusos TSK

Con el desarrollo de las redes neuronales y de los sistemas difusos, se sabe que el conocimiento cualitativo de un sistema puede también ser representado por medio de una forma funcional no lineal. En base a esta idea, han aparecido en el campo del control difuso algunos modelos difusos basados en los métodos de diseño de sistemas de control difuso. Estos métodos son conceptualmente simples y directos. Las técnicas de control lineal con

retroalimentación pueden utilizarse en el caso de estabilización con retroalimentación. El procedimiento es el siguiente. Primero, la planta no lineal se representa por un modelo difuso tipo Takagi-Sugeno. En este tipo de modelo difuso, las dinámicas locales en diferentes regiones espacio-estado se representan por modelos lineales [27]. El modelo completo del sistema se obtiene por una "combinación" difusa de los modelos lineales a través de la función de pertenencia difusa no lineal. El diseño del control se lleva a cabo de acuerdo en base al modelo por medio del esquema de compensación distribuido paralelo. La idea es que, para cada modelo lineal local, se diseña un control lineal con retroalimentación. El controlador completo resultante, que no es lineal en general, nuevamente es una "combinación" difusa de cada uno de los controladores lineales. Al mismo tiempo, el problema de estabilización robusta también ha sido considerado un caso del modelo difuso Takagi-Sugeno (T-S) [38], [39], [43], [44].

El diseño del observador es un problema muy importante en los sistemas de control, sin embargo, en los sistemas de control difuso, el diseño del observador difuso es tratado difícilmente [10]. Un problema clave es que la estabilidad del sistema total, con el controlador difuso y el observador difuso, debe ser garantizado en el caso del modelo difuso. Una contribución principal es el desarrollo del principio de separación; que es el diseño del controlador difuso y del observador difuso en forma independiente [27].

Otra contribución importante de la teoría de los sistemas difusos es que proporcionan un procedimiento sistemático para transformar una base del conocimiento humano a un mapeo no lineal. Los sistemas difusos han sido aplicados a una gran variedad de campos alrededor del control, procesamiento de señales, comunicaciones, manufacturación de circuitos integrados, y sistemas expertos de negocios, medicina, psicología, etc. Sin embargo, la aplicación más significativa se ha concentrado en los problemas de control.

5.3.1. Control con Retroalimentación a la Salida de Sistemas Lineales

Considerando el sistema definido mediante

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}$$

Suponemos que el sistema es completamente observable, pero \mathbf{x} no está disponible para una medición directa. Suponemos emplear el control mediante la retroalimentación del estado observado

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}} \quad (5.1)$$

En el sistema de control mediante la retroalimentación del estado observado da una ecuación del observador

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_ey \quad (5.2)$$

Tomando la transformada de Laplace de (5.1)

$$U(s) = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{X}}(s) \quad (5.3)$$

La transformada de Laplace de la ecuación del observador obtenida mediante la ecuación (5.2) es

$$s\tilde{\mathbf{X}}(s) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{X}}(s) + \mathbf{B}U(s) + \mathbf{K}_eY(s) \quad (5.4)$$

donde se supuso que el estado observado inicial es cero, o $\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Sustituyendo (5.3) en (5.4) y despejando $\tilde{\mathbf{X}}(s)$ en la ecuación resultante, se tiene

$$\tilde{\mathbf{X}}(s) = (sI)$$

5.3.2. Control Difuso de TSK

Muchos sistemas físicos son muy complejos en la práctica por lo que esos modelos matemáticos rigurosos son muy difíciles de obtener, sino imposibles. Sin embargo, muchos de estos problemas se pueden expresar de alguna forma con modelos matemáticos locales o como una agregación de un conjunto de modelos matemáticos. Takagi y Sugeno han propuesto un

modelo difuso para describir los sistemas complejos. Podemos considerar el empleo del siguiente modelo dinámico para representar un sistema complejo con múltiples entradas-múltiples salidas, que incluya tanto modelos lineales analíticos locales y funciones de pertenencia difusas [27].

Específicamente, el modelo dinámico difuso Takagi-Sugeno en tiempo continuo es descrito por reglas difusas SI-ENTONCES, que localmente representan relaciones lineales entrada-salida de sistemas no lineales. La regla i -ésima del modelo difuso es de la siguiente forma:

La regla i -ésima para la Planta es:

$$\begin{aligned} \text{SI } z_1(t) \text{ es } \mathbf{F}_{i1} \text{ y } \dots \text{ y } z_g(t) \text{ es } \mathbf{F}_{ig} \\ \text{ENTONCES } \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}_i(t) = \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t), \quad i = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde \mathbf{F}_{ij} ($j = 1, 2, \dots, g$) son conjuntos difusos, $\mathbf{x}(t) \in R^n$ es el vector de estado, $\mathbf{u}(t) \in R^m$ es el vector de salida, e $\mathbf{y}_i(t) \in R^p$ es el vector de salida. ($\mathbf{A}_i \in R^{n \times n}$, $\mathbf{B}_i \in R^{n \times m}$, $\mathbf{C}_i \in R^{p \times n}$) es una tripleta de matrices, r es el número de reglas SI-ENTONCES, y $z_1(t) \sim z_g(t)$ son algunas variables medibles del sistema, es decir., las variables de las premisas.

Dado un par $[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)]$, empleando el método de inferencia difusa estándar, esto es, empleando un fuzzyficador singleton, producto de inferencia difusa y defuzzyficador media ponderada- el estado final del sistema difuso se infiere de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w_i[\mathbf{z}(t)] [\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t)]}{\sum_{i=1}^r w_i[\mathbf{z}(t)]} \\ &= \sum_{i=1}^r \mu_i[\mathbf{z}(t)] [\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t)] \end{aligned} \quad (5.6)$$

donde

$$\begin{aligned} w_i[\mathbf{z}(t)] &= \prod_{j=1}^g \mathbf{F}_{ij}[\mathbf{z}_j(t)], \quad \mu_i[\mathbf{z}(t)] = \frac{w_i[\mathbf{z}(t)]}{\sum_{i=1}^r w_i[\mathbf{z}(t)]} \\ \mathbf{z}(t) &= \left[z_1(t) \quad z_2(t) \quad \dots \quad z_g(t) \right] \end{aligned}$$

$\mathbf{F}_{ij}[\mathbf{z}_j(t)]$ es el grado de pertenencia de $z_j(t)$ en \mathbf{F}_{ij} . Se asume que

$$w_i [\mathbf{z}(t)] \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r; \quad \sum_{i=1}^r w_i [\mathbf{z}(t)] > 0$$

para toda t . De esta forma

$$\mu_i [\mathbf{z}(t)] \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r; \quad \sum_{i=1}^r \mu_i [\mathbf{z}(t)] = 1$$

para toda t . Por conveniencia de notación, sea $w_i = w_i [\mathbf{z}(t)]$, $\mu_i = \mu_i [\mathbf{z}(t)]$; por tanto el estado final del sistema difuso puede representarse como

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^r \mu_i \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) \quad (5.7)$$

La salida final del sistema difuso es el siguiente:

$$\mathbf{y}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i [\mathbf{z}(t)] \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t)}{\sum_{i=1}^r w_i [\mathbf{z}(t)]} = \sum_{i=1}^r \mu_i [\mathbf{z}(t)] \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t) \quad (5.8)$$

esto es,

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t) \quad (5.9)$$

Definición 5.1 Si los pares $(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i)$, $i = 1, 2, \dots, r$; son controlables, el sistema difuso visto en (5.5) se dice localmente controlable.

Para el diseño del controlador difuso, se supone que el sistema difuso (5.5) es localmente controlable. Primero, los controladores con retroalimentación de estado locales son diseñados, basados en los pares $(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i)$:

La regla i -ésima del controlador es:

$$\begin{aligned} SI \ z_1(t) \text{ es } \mathbf{F}_{i1} \text{ y } \dots \text{ y } z_g(t) \text{ es } \mathbf{F}_{ig} \\ ENTONCES \ \mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_i \mathbf{x}(t), \quad i = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (5.10)$$

por tanto, la salida final del controlador difuso es

$$\mathbf{u}(t) = -\sum_{i=1}^r \mu_i[\mathbf{z}(t)] \mathbf{K}_i \mathbf{x}(t) = -\sum_{i=1}^r \mu_i \mathbf{K}_i \mathbf{x}(t) \quad (5.11)$$

donde se emplea el mismo peso $\mu_i[\mathbf{z}(t)]$ como el peso de la regla i -ésima del sistema difuso (5.6). Los parámetros del controlador son \mathbf{K}_i en cada regla. Sustituyendo (5.11) en (5.7), obtenemos

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j (\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{K}_j) \mathbf{x}(t) \quad (5.12)$$

Una condición suficiente que garantice la estabilidad del sistema difuso se obtiene en términos del método directo de Lyapunov. La ecuación anterior es asintóticamente estable si existe una matriz \mathbf{P}_1 definida positiva tal que

$$(\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{K}_i)^T \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_1 (\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{K}_i) < 0$$

para $i = 1, 2, \dots, r$, y

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{K}_j + \mathbf{A}_j - \mathbf{B}_j \cdot \mathbf{K}_i}{2} \right)^T \mathbf{P}_1 \\ & + \mathbf{P}_1 \left(\frac{\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{K}_j + \mathbf{A}_j - \mathbf{B}_j \cdot \mathbf{K}_i}{2} \right) < 0 \end{aligned}$$

para $i < j \leq r$. Estas ecuaciones se pueden resolver numéricamente de forma eficiente a través del marco de desigualdad de matriz lineal (LMI).

Comentario 5.1 Si tenemos $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{x}$ y $\tilde{V}(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{P}_2 \tilde{\mathbf{x}}$, de acuerdo con el análisis correspondiente, podemos satisfacer las condiciones necesarias para comprobar la estabilidad del sistema controlador.

Comentario 5.2 El controlador difuso y el observador difuso se pueden diseñar independientemente para ser estables y todo el sistema (con el controlador difuso y el observador difuso) también se mantiene estable.

Comentario 5.3 *En el desarrollo del principio de separación de los sistemas lineales, los polos del sistema en lazo cerrado incluye ambos polos del sistema de control y los polos del sistema de observación. En los sistemas difusos, el principio de separación es diferente, la estabilidad del sistema en lazo cerrado se determina por el principio de comparación de vector, más que por los polos.*

En la práctica, todos los estados no son medibles completamente, y es necesario diseñar un observador difuso para poder implementar el controlador difuso (5.11).

5.3.3. Control Difuso para TSK basado en un Observador

Sustituyendo (5.9) y retomando (4.13) en (4.12), obtenemos

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}(t) + \sum_{i=1}^r \mu_i \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{C}_j [\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)] \quad (5.13)$$

Usando el estado $\hat{\mathbf{x}}(t)$ final estimado, (5.13), y (5.11), obtenemos el siguiente controlador difuso:

La regla i -ésima del controlador es:

$$\begin{aligned} SI \ z_1(t) \text{ es } \mathbf{F}_{i1} \text{ y } \dots \text{ y } z_g(t) \text{ es } \mathbf{F}_{ig} \\ ENTONCES \ \mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_i \hat{\mathbf{x}}(t), \quad i = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (5.14)$$

así, la salida final del controlador difuso es

$$\mathbf{u}(t) = -\sum_{i=1}^r \mu_i \mathbf{K}_i \hat{\mathbf{x}}(t) \quad (5.15)$$

Si sustituimos (5.15) y (5.7) en (5.13), respectivamente, obtenemos

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}(t) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{K}_j \hat{\mathbf{x}}(t) \quad (5.16)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j (\mathbf{A}_i - \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{K}_j) \hat{\mathbf{x}}(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{C}_j [\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)] \quad (5.17)$$

Haciendo $\tilde{x} = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$; entonces

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j (\mathbf{A}_i - \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{C}_j) \tilde{\mathbf{x}}(t) \quad (5.18)$$

La ecuación anterior es asintóticamente estable si existe una matriz \mathbf{P}_2 definida positiva tal que

$$(\mathbf{A}_i - \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{C}_i)^T \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_2 (\mathbf{A}_i - \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{C}_i) < 0$$

para $i = 1, 2, \dots, r$, y

$$\left(\frac{\mathbf{A}_i - \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{C}_j + \mathbf{A}_j - \mathbf{G}_j \cdot \mathbf{C}_i}{2} \right)^T \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_2 \left(\frac{\mathbf{A}_i - \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{C}_j + \mathbf{A}_j - \mathbf{G}_j \cdot \mathbf{C}_i}{2} \right) < 0$$

para $i < j \leq r$. Estas ecuaciones se pueden resolver numéricamente de forma eficiente a través del marco de desigualdad de matriz lineal (LMI).

5.4. Control Difuso con Retroalimentación a la Salida basado en un observador

En [16] se da un panorama de un control neuronal. Existen dos tipos de control neuronal: control directo [21] y control indirecto [35]. El control neuronal directo se refiere cuando la red neuronal se coloca en cascada con el sistema a controlar. En el control neuronal indirecto el controlador se basa en la identificación del sistema no lineal, de esta forma el proceso de identificación se convierte en una parte esencial de la construcción del controlador neuronal [32].

La estructura general del control adaptable difuso con retroalimentación a la salida basado en un observador en modo deslizante se muestra en la figura 5.2.

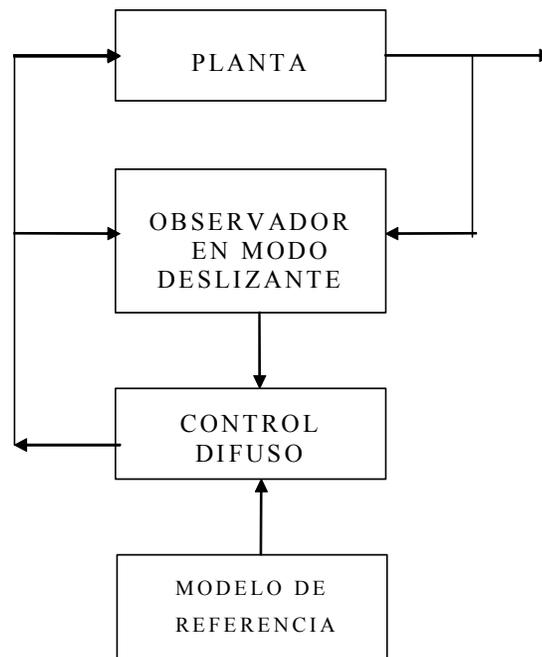


Figura 5.2: Estructura general del control adaptable difuso basado en un observador en modo deslizante.

Un modelo difuso genérico es presentado como una colección de reglas difusas en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} R^i: & \text{SI } x_1 \text{ es } A_{1i} \text{ y } x_2 \text{ es } A_{2i} \text{ y } \cdots x_n \text{ es } A_{ni} \\ & \text{ENTONCES } \hat{y}_1 \text{ es } B_{1i} \text{ y } \cdots \hat{y}_m \text{ es } B_{mi} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Empleamos l ($i = 1, 2 \cdots l$) reglas difusas SI-ENTONCES para realizar un mapeo de un vector lingüístico de entradas $X = [x_1 \cdots x_n] \in \mathfrak{R}^n$ a un variable lingüística de salida. A_{1i}, \cdots, A_{ni} y B_{1i}, \cdots, B_{mi} son conjuntos difusos estándar [41]. Para una variable de entrada x_i existen l_i conjuntos difusos. En el caso de una conexión completa $l = l_1 \times l_2 \times \cdots \times l_n$. De [41] sabemos que, usando la inferencia del producto, media de centros y fuzzyficador singleton, la k -ésima salida del sistema lógico difuso puede ser expresada como:

$$\begin{aligned} \hat{y}_k &= \frac{\left(\sum_{i=1}^l w_{ki} \left[\prod_{j=1}^n \mu_{A_{ji}} \right] \right)}{\left(\sum_{i=1}^l \left[\prod_{j=1}^n \mu_{A_{ji}} \right] \right)} \\ &= \sum_{i=1}^l w_i \phi_i \end{aligned} \quad (5.20)$$

donde

$\mu_{A_{ji}}, \mu_{B_{ki}}$ son las funciones de pertenencia de los conjuntos difusos A_{ji} y B_{ki} ,

l es el número de reglas SI-ENTONCES

w_{ki} es el punto en el que $\mu_{B_{ki}} = 1$.

donde ϕ_i está definido como:

$$\phi_i = \frac{\prod_{j=1}^n \mu_{A_{ji}}}{\sum_{i=1}^l \prod_{j=1}^n \mu_{A_{ji}}}$$

(5.20) se puede expresar en la forma paramétrica siguiente

$$\hat{Y}_t = W_t \Phi [X_t] \quad (5.21)$$

donde

$$\hat{Y}_t = [\hat{y}_1 \cdots \hat{y}_m]^T, \quad W_t = \begin{bmatrix} w_{11} & & w_{1l} \\ & \ddots & \\ w_{m1} & & w_{ml} \end{bmatrix}, \quad \Phi [X_t] = [\phi_1 \cdots \phi_l]^T.$$

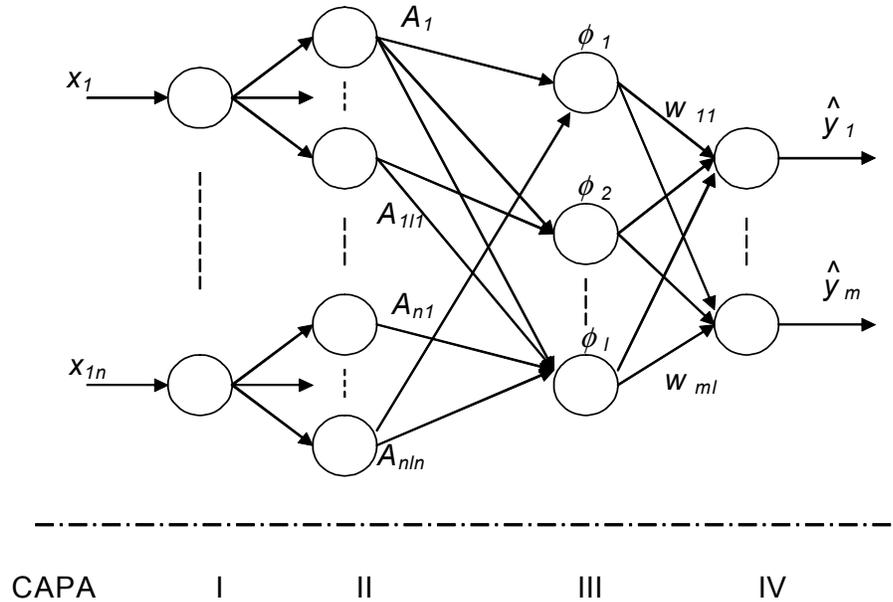


Figura 5.3: Arquitectura del sistema adaptable difuso.

El controlador adaptable difuso se diseña a partir de la información siguiente. La estructura del sistema adaptable difuso se muestra en la figura.5.3. Estas cuatro capas del sistema difuso se han discutido en muchos documentos [25], [15]. La Capa I acepta el vector lingüístico de entradas $X(k)$. Cada nodo de la capa II representa el valor de la función de pertenencia de la variable lingüística. Los nodos de la capa III representan las reglas difusas. La capa IV es la capa de salida, los lazos entre la capa III y la capa IV son conectados completamente por la matriz de pesos W_k . Las capas I y II son la parte de premisa. Las capas III y IV son la parte de consecuencia.

De la salida \hat{y} uno puede controlar al sistema no lineal (4.14) o (4.15) por medio de las reglas difusas, pero este modelo difuso puede reflejar sólo los pares entrada-salida. La sección previa nos proporciona una estimación asintótica de los estados internos, si los estados estimados \bar{x}_i en (4.16) son usados para controlar al sistema, el sistema difuso controlará al sistema no lineal completo. Ahora el objetivo del control es hacer que todos los estados de

la planta real (4.14) o (4.15) sigan a los estados de referencia. Puede ser formulado como el criterio siguiente:

$$J_{\min} = \min_W J, \quad J = \|x - x^*\|_R^2 \quad (5.22)$$

donde x^* es el estado de referencia, que satisface:

$$\dot{x}_t^* = h(x_t^*)$$

Así, para cualquiera $\eta > 0$, tenemos

$$J \leq (1 + \eta) \|x - \bar{x}\|_R^2 + (1 + \eta^{-1}) \|\bar{x} - x^*\|_R^2. \quad (5.23)$$

El mínimo del término $\|x - \bar{x}\|_R^2$ ya ha sido resuelto en la sección previa. Eligiendo $\tilde{R} = (1 + \eta^{-1})R$, ahora podemos reformular el objetivo de la identificación como: minimizar el término $\|\bar{x} - x^*\|_R^2$. Y definiendo el error de seguimiento como

$$e_t := \bar{x}_t - x_t^*$$

(5.19) es cambiado como

$$\begin{aligned} \text{R}^i: & \text{ SI } \bar{x}_1 \text{ es } A_{1i} \text{ y } \bar{x}_2 \text{ es } A_{2i} \text{ y } \cdots \bar{x}_n \text{ es } A_{ni} \\ & \text{ ENTONCES } \hat{y}_1 \text{ es } B_{1i} \text{ y } \cdots \hat{y}_m \text{ es } B_{mi} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Para el sistema no lineal

$$\dot{x}_t = f(x_t) + g(x_t)u_t, \quad y_t = Cx_t \quad (5.25)$$

Si $f(\cdot)$ y $g(\cdot)$ son conocidos, podemos elegir el control u_t para cancelar la no linealidad y diseñar el controlador basado en la teoría de control lineal. La idea del control es:

$$u^* = \frac{1}{g(x_t)} [-f(x_t) + A(x_t - x_t^*) + h(x_t^*)]$$

donde A es una matriz estable. De esta forma el sistema en lazo cerrado es

$$\dot{e}_t = Ae_t$$

así

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_t = 0$$

Puesto que $f(\cdot)$ y $g(\cdot)$ son conocidos y x_t no está disponible, usamos el sistema difuso para identificar $f(\cdot)$ y $g(\cdot)$. El control adaptable es

$$u_t = \frac{1}{\widehat{g}(\bar{x}_t)} \left[-\widehat{f}(\bar{x}_t) + v \right] \quad (5.26)$$

donde asumimos que $\widehat{g}(\bar{x}_t) \neq 0$

$$\begin{aligned} v &= Ae_t + h(x_t^*) \\ \widehat{f}(\bar{x}_t) &= W_f \Phi_f [\bar{X}_t] \\ \widehat{g}(\bar{x}_t) &= W_g \Phi_g [\bar{X}_t] \end{aligned} \quad (5.27)$$

con las reglas de actualización de peso proporcionadas por el gradiente

$$\begin{aligned} \dot{W}_f &= K_f P e_t \Phi_f [\bar{X}_t] e_t^T \\ \dot{W}_g &= K_g P u_c \Phi_g [\bar{X}_t] e_t^T \end{aligned} \quad (5.28)$$

donde $K_{f,g} \in \mathfrak{R}^1$ e I es la matriz identidad

Teorema 5.1 *Asumiendo que el sistema con retroalimentación-linealizabile está en la forma canónica de controlabilidad y el control de entrada está dado por (5.26). Haciendo que el sistema difuso sea actualizado como:*

- Si $\|e_t\|^2 > \frac{\bar{\eta}}{\lambda_{\min}(Q)}$ entonces la regla de actualización está dada por (5.28).
- Si $\|e_t\|^2 \leq \frac{\bar{\eta}}{\lambda_{\min}(Q)}$ entonces detenemos el procedimiento de aprendizaje .

De esta forma

· el error de seguimiento filtrado $e(t)$, los parámetros del sistema difuso son acotados y están dados en

$$e_t \in L^\infty, \quad W_f \in L^\infty, W_g \in L^\infty, \quad (5.29)$$

- para cualquiera $T > 0$ el error de filtro cumple el siguiente desempeño de seguimiento

$$\frac{1}{T} \int_0^T (e_t^T Q e_t) dt \leq \frac{e_0^T e_0}{T} + \kappa \bar{\eta} \quad (5.30)$$

donde $\bar{\eta} = \bar{\varepsilon}_f + \bar{d}_f + (\bar{\varepsilon}_g + \bar{d}_g) \bar{u}$, κ es el número de condición de Q definido como $\kappa := \frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(Q)}$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\dot{e}_t &= f + gu - h(x_t^*) + v - v \\
&= f + gu_c - h(x_t^*) + v - v \\
&= f + \left[(\widehat{g} + \widehat{g}) \left(\frac{1}{\widehat{g}} \left[-\widehat{f} + v \right] \right) \right] - h(x_t^*) + h(x_t^*) + A\Delta_t - v \\
&= A\Delta_t + \left(f - \widehat{f} \right) + (g - \widehat{g}) u_c
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Permitiendo que la función candidata de Lyapunov sea

$$L_t = e_t^T P e_t + tr \left(\widetilde{W}_f^T K_f^{-1} \widetilde{W}_f \right) + tr \left(\widetilde{W}_g^T K_g^{-1} \widetilde{W}_g \right). \tag{5.32}$$

Sustituyendo de (5.31) la derivada de (5.32) produce.

$$\begin{aligned}
\dot{L}_t &= 2e_t^T P \left(A e_t + \left(f - \widehat{f} \right) + (g - \widehat{g}) u_c \right) \\
&+ 2tr \left(\dot{\widetilde{W}}_f^T K_f^{-1} \widetilde{W}_f \right) + 2tr \left(\dot{\widetilde{W}}_g^T K_g^{-1} \widetilde{W}_g \right)
\end{aligned}$$

Usando (5.25) y (5.27),

$$\begin{aligned}
f - \widehat{f} &= W_f^* \Phi_f (X_t) - \widehat{W}_f \Phi_f [\overline{X}_t] + \varepsilon_f \\
&= W_f^* [\Phi_f [\overline{X}_t] + d_f] - \widehat{W}_f \Phi_f [\overline{X}_t] + \varepsilon_f \\
&= \widetilde{W}_f \Phi_f [\overline{X}_t] + \varepsilon_f + W_f^* d_f
\end{aligned}$$

donde d_f es el error del observador, ε_f es el error de identificación difuso, y

$$g - \widehat{g} = \widetilde{W}_g \Phi_g [\overline{X}_t] + \varepsilon_g + W_g^* d_g$$

Así

$$\begin{aligned}
\dot{L}_t &= 2e_t^T P \{ A e_t + \widetilde{W}_f \Phi_f [\overline{X}_t] + \varepsilon_f \\
&+ W_f^* d_f + \widetilde{W}_g \Phi_g [\overline{X}_t] u_c + (\varepsilon_g + W_g^* d_g) u_c \} \\
&+ 2tr \left(\dot{\widetilde{W}}_f^T K_f^{-1} \widetilde{W}_f \right) + 2tr \left(\dot{\widetilde{W}}_g^T K_g^{-1} \widetilde{W}_g \right)
\end{aligned}$$

En vista de la desigualdad de la matriz

$$X^T Y + (X^T Y)^T \leq X^T \Lambda^{-1} X + Y^T \Lambda Y \tag{5.33}$$

qué es válido para cualquiera $X, Y \in \mathfrak{R}^{n \times k}$ y para cualquier matriz definida positiva $0 < \Lambda = \Lambda^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$,

$2e^T P \varepsilon_f$ puede ser concluida como

$$2e^T P \varepsilon_f \leq e^T P l_1 P e + \varepsilon_f^2 l_4 \leq e^T P l_1 P e + \bar{\varepsilon}_f$$

$2e^T P \varepsilon_g u_c$ puede ser concluida como

$$2e^T P \varepsilon_g u_c \leq e^T P l_2 P e + \varepsilon_g^2 u_c^2 l_5 \leq e^T P l_2 P e + \bar{\varepsilon}_g \bar{u}$$

$2e^T P W_f^* d_f$ puede ser estimada como

$$\begin{aligned} 2e^T P W_f^* d_f &\leq e^T W_f^{T*} P l_3 P W_f^* e + d_f^T l_3^{-1} d_f \\ &\leq e^T P \bar{W}_f^* P e + \bar{d}_f \end{aligned}$$

$2e^T P W_g^* d_g u_c$ puede ser estimada como

$$\begin{aligned} 2e W_g^* d_g u_c &\leq e^T W_g^{T*} l_4 W_g^* e + |u_c|_g^2 d_g l_4^{-1} d_g \\ &\leq e^T P \bar{W}_g^* P e + \bar{u} \bar{d}_g \end{aligned}$$

Así

$$\dot{L}_t \leq L_{rq} + L_w + L_g - e^T Q e + \bar{\eta}$$

Si usamos la regla de adaptación como:

$$\begin{aligned} L_{rq} &= A^T P + P A + P (l_1 + l_2 + \bar{W}_f^* + \bar{W}_g^*) P + Q \\ L_w &= 2tr \left(\begin{matrix} \cdot & T \\ \tilde{W}_f & K_f^{-1} \tilde{W}_f \end{matrix} \right) + tr \{ \Phi_f [\bar{X}_t] \} \tilde{W}_f \\ L_g &= 2tr \left(\begin{matrix} \cdot & T \\ \tilde{W}_g & K_g^{-1} \tilde{W}_g \end{matrix} \right) + tr \{ \Phi_g [\bar{X}_t] u_c \} \tilde{W}_g \\ \bar{\eta} &= \bar{\varepsilon}_f + \bar{d}_f + (\bar{\varepsilon}_g + \bar{d}_g) \bar{u} \end{aligned}$$

donde L_{rq} es la ecuación de Riccati estándar, la elección adecuada de la matriz estable A puede hacerla cero, es decir, $L_{rq} = 0$. Usando la regla de aprendizaje (5.28), $L_w = 0$, $L_g = 0$

· (I) si $\|e\|^2 > \lambda_{\min}^{-1}(Q)\bar{\eta}$, usando la regla de actualización como (5.28) podemos concluir que

$$\dot{L}_t \leq -e^T Q e + \bar{\eta} \leq -\lambda_{\min}(Q)\|e\|^2 + \bar{\eta} < 0. \quad (5.34)$$

L es acotado. Integrando (5.34) desde 0 hasta T se produce

$$L_T - L_0 \leq - \int_0^T (e^T Q e) dt + \bar{\eta} T$$

Debido a que $\kappa \geq 1$, tenemos

$$\int_0^T (e^T Q e) dt \leq L_0 - L_T + b_d T \leq L_0 + \kappa \bar{\eta} T \quad (5.35)$$

donde κ es el número de condición de Q

· (II) si $\|e\|^2 \leq \lambda_{\min}^{-1}(Q)\bar{\eta}$, de (5.28) los pesos se hacen constantes, L_t permanece acotado. Y

$$\begin{aligned} \int_0^T (e^T Q e) dt &\leq \int_0^T \lambda_{\max}(Q)\|e\|^2 dt \\ &\leq \frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(Q)}\bar{\eta} T \leq L_0 + \kappa \bar{\eta} T \end{aligned} \quad (5.36)$$

De (I) y (II), L_t es acotado, (5.29) es alcanzado. Debido a que $W_{f,0} = W_f^*$ y $W_{g,0} = W_g^*$, de (5.35) y (5.36), (5.30) es obtenido. Por tanto el teorema ha sido comprobado. ■

5.5. Simulación

5.5.1. Control adaptable difuso

Tomando los parámetros del robot manipulador como en [24], y también incluyendo la fricción en (4.49), es decir, $l_1 = l_2 = 2r_1 = 2r_2 = 1\text{m}$, $m_1 = 0,8\text{kg}$, $m_2 = 2,3\text{kg}$, $v_1 = v_2 = 0,4$, $k_1 = k_2 = 0,8$, $g = 9,81$. Las condiciones iniciales son $\dot{q}(0) = [\dot{q}_1(0), \dot{q}_2(0)] = [0, 0]$, $q(0) = [q_1(0), q_2(0)] = [3,14, 0,6]$. Asumimos que los parámetros en (4.49) son desconocidos, sólo la posición y la velocidad de q están disponibles.

Siguiendo las reglas difusas usadas para la identificación

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^i: \text{ SI } \bar{x}_1 \text{ es } A_{1i} \text{ y } \bar{x}_2 \text{ es } A_{2i} \text{ y } \dots \bar{x}_n \text{ es } A_{ni} \\ \text{ENTONCES } \hat{y}_1 \text{ es } B_{1i} \text{ y } \dots \hat{y}_m \text{ es } B_{mi} \end{aligned} \quad (5.37)$$

Para el robot se puede representar como:

$$\dot{x}_t = f(x_t) + g(x_t)u_t \quad (5.38)$$

Puesto que $f(\cdot)$ y $g(\cdot)$ son conocidos y x_t no está disponible, usamos el sistema difuso para identificar $f(\cdot)$ y $g(\cdot)$. El control adaptable es

$$u_t = \frac{1}{\hat{g}(\bar{x}_t)} \left[-\hat{f}(\bar{x}_t) + v \right] \quad (5.39)$$

donde asumimos que $\hat{g}(\bar{x}_t) \neq 0$

$$\begin{aligned} v &= Ae_t + h(x_t^*) \\ \hat{f}(\bar{x}_t) &= W_f \Phi_f [\bar{X}_t] \\ \hat{g}(\bar{x}_t) &= W_g \Phi_g [\bar{X}_t] \end{aligned} \quad (5.40)$$

con las reglas de actualización de peso proporcionadas por el gradiente descendente:

$$\begin{aligned} \dot{W}_f &= K_f P e_t \Phi_f [\bar{X}_t] e_t^T \\ \dot{W}_g &= K_g P u_c \Phi_g [\bar{X}_t] e_t^T \end{aligned} \quad (5.41)$$

El control difuso es

$$\begin{aligned} \tau &= u_{1,t} + u_{2,t} \\ u_{1,t} &= \bar{\varphi}(x^*) - \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \bar{x}^* - W_t \sigma(\hat{x}_t) = \begin{pmatrix} -3 \cos t + \sin t \\ \cos t + 3 \sin t \end{pmatrix} - W_t \sigma(\hat{x}_t), \\ u_{2,t} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (\dot{q}_{1,t} - \dot{q}_{1,t-\tau}) / \tau \\ (\dot{q}_{2,t} - \dot{q}_{2,t-\tau}) / \tau \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde $\tau = 0,1$.

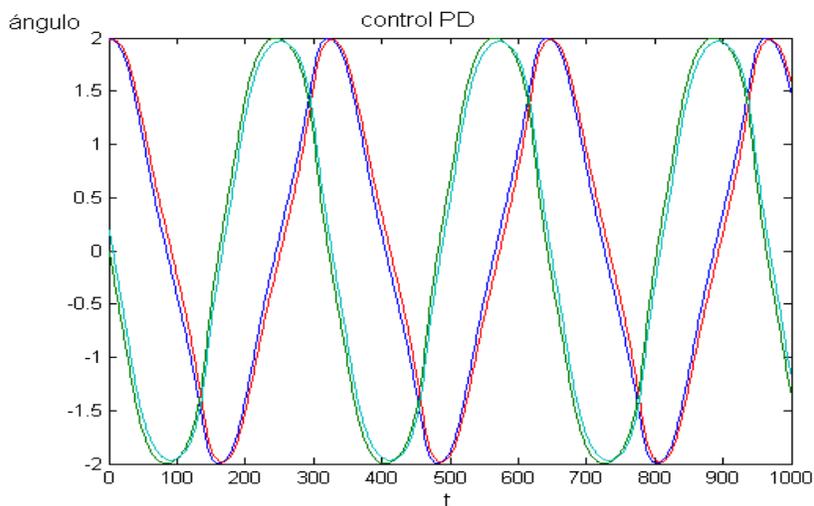


Figura 5.4: La respuesta característica del control derivativo incluye un desfase respecto a la señal de entrada, el valor de ganancia a la salida es igual al de la entrada.

Problema 5.1 *Hallar la ley de control que resuelva el problema de seguimiento para el robot manipulador de dos grados de libertad.*

Solución 5.1 *Se utiliza un identificador para que nos proporcione información de los estados del sistema y de esta forma dar una ley de control adecuada. El control adaptable difuso presentado en esta sección se muestra en la figura.7.5 del apéndice A.*

Conclusión 5.1 *En este caso se emplea un control adaptable difuso que nos permite lograr cierta trayectoria de seguimiento para una planta no lineal. En la figura 5.4 se muestra el comportamiento del control PD usado en la compensación del sistema. El control establecido para la planta no lineal es un control indirecto donde se realiza un proceso previo de identificación del sistema. Este proceso de identificación se logra a partir de un identificador difuso cuyos resultados se muestran en las figuras 5.5 - 5.7. En la figura 5.14 se muestra que para cada combinación de las variables de entrada se asocia un valor en la consecuencia de cada regla difusa, este resultado se logra a partir de la convergencia de los parámetros establecidos*

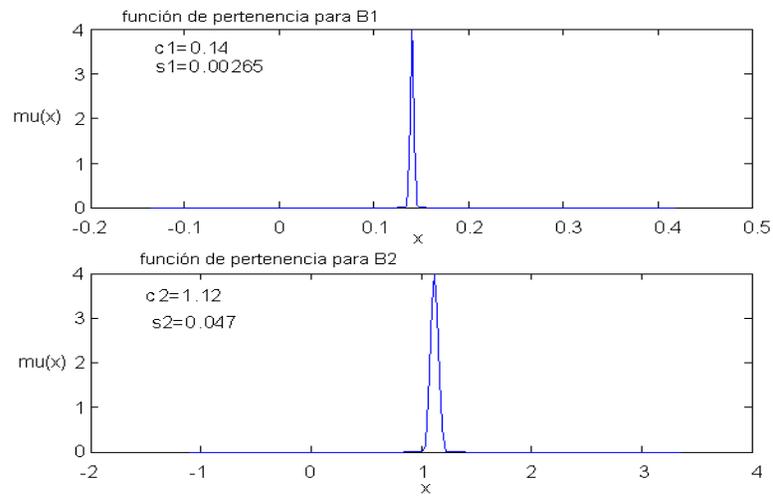


Figura 5.5: Funciones de pertenencia para B_1 y B_2 .

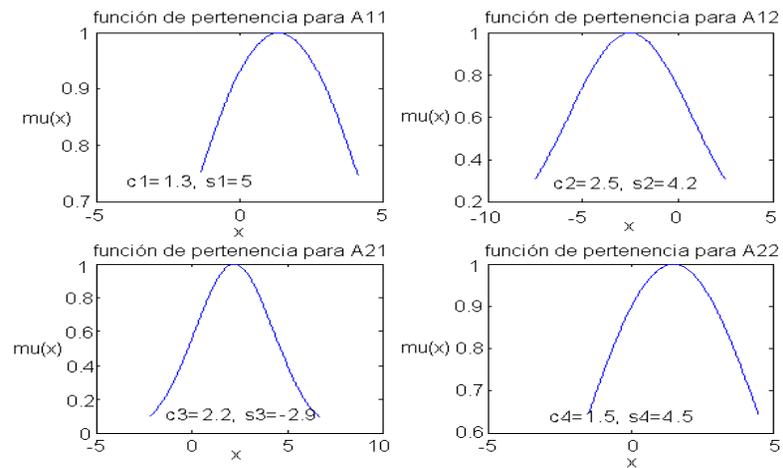


Figura 5.6: Funciones de pertenencia para la parte de la premisa de las reglas difusas.

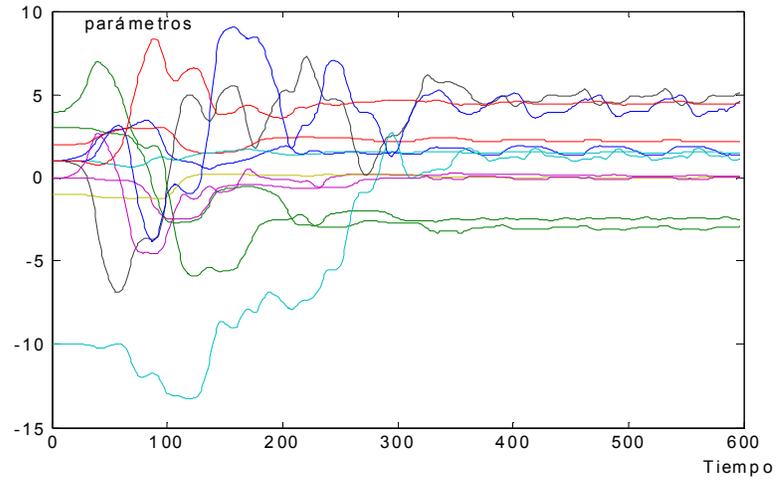


Figura 5.7: Convergencia de parámetros de las reglas difusas.

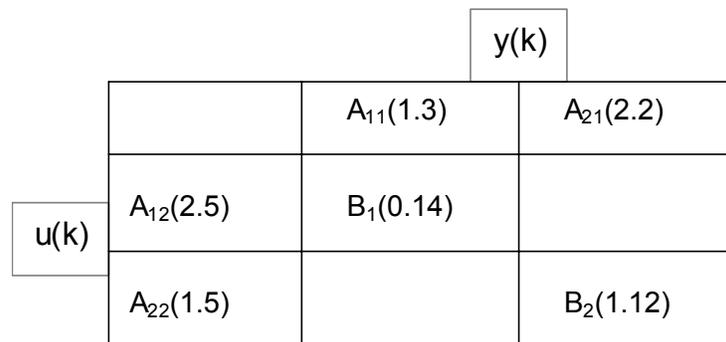


Figura 5.8: A cada combinación de las variables de entrada, se asocia una consecuencia.

dentro del algoritmo de optimización como se muestra en la figura 5.7, en este caso se varían tanto la posición de las funciones Gaussianas como su ancho, permitiendo de esta forma la identificación del sistema no lineal.

5.5.2. Control adaptable difuso basado en un observador en modo deslizante

Asumiendo que sólo la posición del ángulo \mathbf{q} es medible, la velocidad $\dot{\mathbf{q}}$ podría medirse con el observador en modo deslizante (4.16). Para el robot manipulador de dos grados de libertad podemos usar dos observadores:

observador (a):

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{q}}}_a &= \mathbf{A}\bar{\mathbf{q}}_a + \mathbf{S}(\bar{\mathbf{q}}_a, \mathbf{e}) - \mathbf{K}\mathbf{e}_t \\ \bar{\mathbf{y}}_a &= \mathbf{C}\bar{\mathbf{q}}_a, \quad \bar{\mathbf{q}}_a := [q_1, \dot{q}_1]\end{aligned}\tag{5.42}$$

observador (b):

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{q}}}_b &= \mathbf{A}\bar{\mathbf{q}}_b + \mathbf{S}(\bar{\mathbf{q}}_b, \mathbf{e}) - \mathbf{K}\mathbf{e}_t \\ \bar{\mathbf{y}}_b &= \mathbf{C}\bar{\mathbf{q}}_b, \quad \bar{\mathbf{q}}_b := [q_2, \dot{q}_2]\end{aligned}\tag{5.43}$$

Los pasos para el diseño se muestran en la figura 4.1. Como $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, podemos escoger $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ para hacer que el par (\mathbf{A}, \mathbf{C}) sea observable; se elegimos $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} > 0$, por tanto $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ es estable; si utilizamos $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$, la solución para la ecuación de Lyapunov

$$\mathbf{A}_0\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_0^T = -\mathbf{Q}\tag{5.44}$$

es definida positiva $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.25 \\ 3.25 & 0 \end{bmatrix}$. Para estabilizar al manipulador, empleamos un control difuso basado en un observador como el de modo deslizante.

De las definiciones de \mathbf{M} , \mathbf{V} , \mathbf{G} y \mathbf{f}_D sabemos que $\mathbf{f}(\mathbf{x}_t, t) + g(\mathbf{x}_t, t)\mathbf{u}$ en (4.50) es acotado, por tanto existe una función $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ tal que

$$-\mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{h} = \mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Sin pérdida de generalidad, elegimos $\|\mathbf{h}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t)\| < \rho$, $\rho = 10$. Para eliminar el efecto del chattering, podemos usar el siguiente compensador de capa acotada mencionado anteriormente

$$\mathbf{S}(\bar{\mathbf{x}}_t, \mathbf{e}_t) = -\frac{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{C}\Delta_t}{\|\mathbf{C}\Delta_t\|}\rho = \begin{cases} -\rho\mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}^T \text{sign}(\mathbf{C}\Delta_t) & |\mathbf{C}\Delta_t| \geq \delta \\ -\rho\mathbf{P}^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{C}\Delta_t/\delta & |\mathbf{C}\Delta_t| < \delta \end{cases} \quad (5.45)$$

El controlador de capa acotada enunciado ofrece una aproximación continua al modo deslizante discontinuo dentro de la capa acotada y garantiza que el error del observador esté dentro de cualquier vecindad cercana al origen [6]. En este caso $\delta = 0.01$ que garantiza mejores resultados. Podemos emplear \mathbf{q} y $\hat{\mathbf{q}}$ para modelar al robot manipulador por medio del modelo difuso obtenido a partir de la siguiente información:

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}} = \mathbf{A}_n\hat{\mathbf{q}} + \mathbf{W}_{1,t}\sigma(\mathbf{V}_{1,t}\hat{\mathbf{q}}) + \mathbf{W}_{2,t}\phi(\mathbf{V}_{2,t}\hat{\mathbf{q}})\tau \quad (5.46)$$

donde $\hat{\mathbf{q}} = [\hat{q}_1, \dot{\hat{q}}_1, \hat{q}_2, \dot{\hat{q}}_2]$. Escogemos $\mathbf{W}_{1,t}$ y $\mathbf{W}_{2,t} \in \mathbf{R}^{4 \times 3}$, $\mathbf{V}_{1,t}$ y $\mathbf{V}_{2,t} \in \mathbf{R}^{3 \times 4}$,

$$\sigma(x) = \frac{2}{(1 + e^{-2x})} - 0,5, \quad \phi(x) = \frac{0,2}{(1 + e^{-0,2x})} - 0,05$$

Las condiciones iniciales son $\mathbf{W}_{1,0}^T(\mathbf{W}_1^*) = \mathbf{W}_{2,0}^T(\mathbf{W}_2^*) = \mathbf{V}_{1,0}(\mathbf{V}_1^*) = \mathbf{V}_{2,0}(\mathbf{V}_2^*) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{q}(0) = \bar{\mathbf{q}}(0) = \hat{\mathbf{q}}(0) = 0$. Los pesos se actualizan de acuerdo a (4.31) con $\bar{\eta} = 0,2$, $\bar{\mathbf{K}}_i := \mathbf{K}_i\mathbf{P} = 10I_4$, $\mathbf{A}_n = -2I_4$. Los resultados de identificación para \mathbf{q} se muestran enseguida. Si no usamos el observador, el neuro identificador mostrado en (5.46) será de dos dimensiones, elegimos $\mathbf{W}_{1,t}$ y $\mathbf{W}_{2,t} \in \mathfrak{R}^{2 \times 3}$, $\mathbf{V}_{1,t}$ y $\mathbf{V}_{2,t} \in \mathfrak{R}^{3 \times 2}$. Usando la misma regla de actualización (4.31) con $l = n = 2$. los resultados de identificación se muestran en las figura 5.9 y 5.10. Podemos ver que el identificador basado en el observador es mejor que el neuro identificador cuando los estados parciales son medibles.

Simulación

Podemos observar a continuación la identificación y control del robot manipulador de dos grados de libertad considerando un observador en modo deslizante.

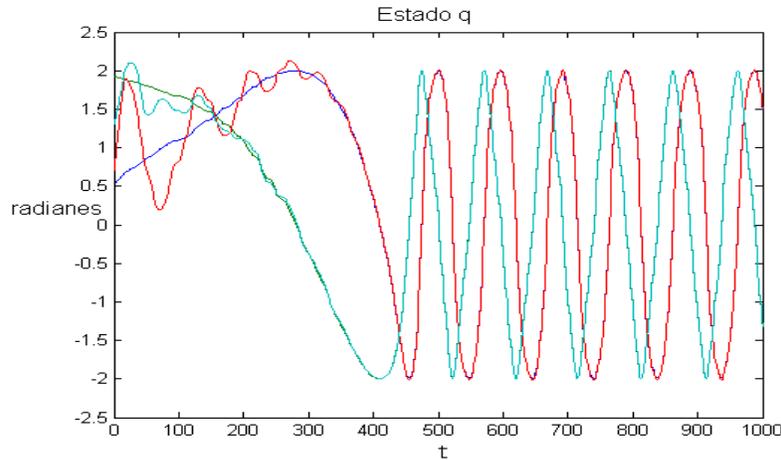


Figura 5.9: Control basado en un observador en modo deslizante para la posición de los eslabones.

Problema 5.2 Hallar la ley de control que resuelva el problema de seguimiento para el robot manipulador de dos grados de libertad.

Solución 5.2 Se utiliza un controlador difuso con base en un observador en modo deslizante. El neuro control presentado en esta sección se muestra en la figura 7.6 del apéndice A.

Conclusión 5.2 Las trayectorias de seguimiento para el control adaptable difuso basado en un observador en modo deslizante se muestran en la figuras 5.9 y 5.10 que corresponde a la posición y velocidad del robot manipulador. El controlador basado en la identificación completa de los estados del sistema es una mejor opción ya que permite controlar al sistema de una forma más adecuada teniendo mayor información del sistema no lineal. El controlador se establece por medio de un control indirecto que requiere un proceso previo de identificación del sistema. Este proceso de identificación se logra a partir de un identificador difuso cuyo algoritmo de optimización varía tanto la posición como el ancho de ciertas funciones Gausianas propuestas para el sistema difuso (figuras 5.11 y 5.12). En la figura 5.14 se muestra que para cada combinación de las variables de entrada se asocia un valor en la consecuencia

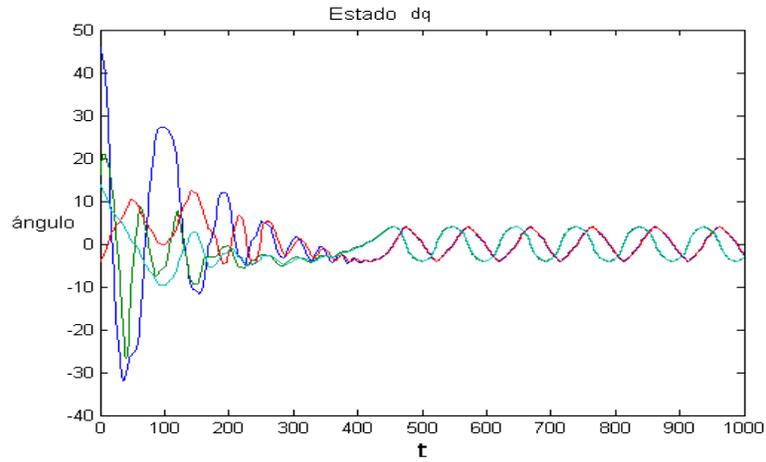


Figura 5.10: Control basado en un observador en modo deslizante para la velocidad de las juntas dq.

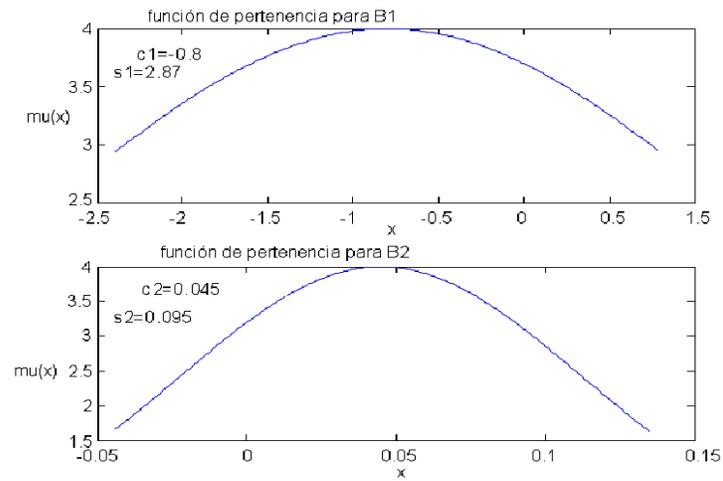


Figura 5.11: Funciones de pertenencia para B_1 y B_2 .

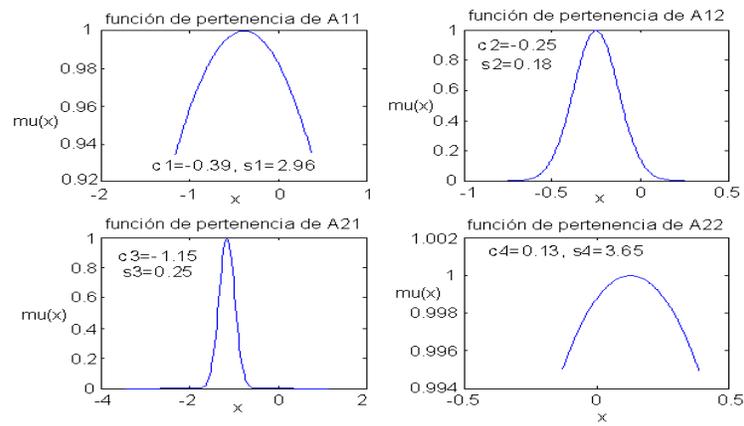


Figura 5.12: Funciones de pertenencia para la parte de la premisa de las reglas difusas.

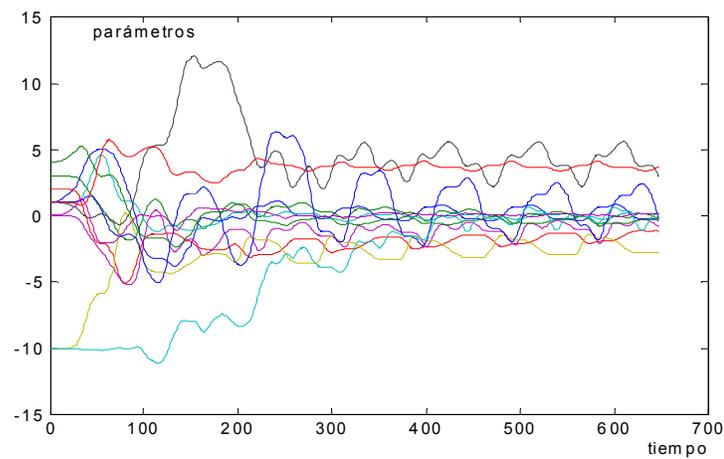


Figura 5.13: Convergencia de parámetros de las reglas difusas.

		y(k)	
		A ₁₁ (-0.39)	A ₂₁ (-1.15)
u(k)	A ₁₂ (-0.25)	B ₁ (-0.8)	
	A ₂₂ (0.13)		B ₂ (0.045)

Figura 5.14: A cada combinación de las variables de entrada, se asocia una consecuencia.

de cada regla difusa, este resultado se logra a partir de la convergencia de los parámetros establecidos dentro del algoritmo de optimización, figura 5.13.

La ley de control es la siguiente:

$$\begin{aligned} \tau &= u_{1,t} + u_{2,t} \\ u_{1,t} &= \bar{\varphi}(x^*) - \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \bar{x}^* - W_t \sigma(\hat{x}_t) = \begin{pmatrix} -3 \cos t + \sin t \\ \cos t + 3 \sin t \end{pmatrix} - W_t \sigma(\hat{x}_t), \\ u_{2,t} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\hat{q}}_1 \\ \dot{\hat{q}}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \left(\frac{\dot{\hat{q}}_{1,t} - \dot{\hat{q}}_{1,t-\tau}}{\tau} \right) \\ \left(\frac{\dot{\hat{q}}_{2,t} - \dot{\hat{q}}_{2,t-\tau}}{\tau} \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se puede observar que para el control adaptable difuso es necesario dar la estructura de las reglas difusas del tipo SI-ENTONCES, no necesariamente se deben conocer los valores de los conjuntos difusos o el número de reglas, se selecciona un método de fuzzyficación, inferencia y defuzzyficación que nos permita obtener una solución adecuada a nuestro problema. En este caso se emplearon reglas del tipo Mamdani y una representación del sistema con fuzzyficación tipo singleton, inferencia por la regla del producto y defuzzyficación por media de centros.

Con este modelo se pretende obtener una buena aproximación de la planta. La entrada y la salida al sistema difuso se definen como funciones de pertenencia de tipo Gaussianas. El algoritmo de optimización que se utiliza es el entrenamiento del gradiente descendente el cual modifica los parámetros de las funciones Gaussianas; tanto la ubicación del centro como el ancho de éstas mismas de forma iterativa. El empleo del observador en modo deslizante permite una mejor aproximación del sistema no lineal debido a que se tiene una estimación aún mejor de los estados internos de éste, lo cual considera una mejora en la identificación y control del sistema en cuestión.

En este capítulo se presentó el diseño de un controlador adaptable difuso que nos permitiera el control de un robot manipulador de dos grados de libertad. Se empleó un identificador difuso con base en un observador en modo deslizante para obtener una mejor estimación de los estados internos del sistema y obtener resultados adecuados de control en la aplicación del controlador adaptable difuso.

Capítulo 6

Conclusión

En forma general no podemos afirmar que la lógica difusa sea mejor que las redes neuronales o viceversa, sencillamente que cada problema o parte de un problema requiere una solución diferente, y cada técnica está más indicada para ciertos problema más que para otro, con frecuencia la solución óptima consiste en una combinación inteligente de las diversas técnicas de solución, de esta forma los sistemas difusos se aplican especialmente donde existen comportamientos no lineales importantes, y se disponga de un conjunto de reglas proporcionada por los expertos en la materia. Aunado a ello se pueden usar técnicas de estimación de los estados internos del sistema para obtener una mejor información del sistema no lineal y aplicar el diseño de un controlador que estabilice al sistema.

Los sistemas difusos son más favorables desde el punto de vista que son capaces de expresar el conocimiento humano a través de reglas propias de cada individuo, y su desempeño se realiza ajustando precisamente estas reglas mediante un algoritmo de adaptación como en las redes neuronales.

La ventaja principal de los sistemas difusos es justamente la flexibilidad que tienen de interpretar el razonamiento humano basado en reglas y que se pueden traducir a expresiones matemáticas cuyo desempeño se logra variando ciertos parámetros de estas reglas; aunque al final el resultado es igual al que se obtiene por medio de las redes neuronales, los sistemas difusos contienen cierta información de la planta disponible a través de los expertos en la

materia, favoreciendo de esta forma la representación de modelos más completos.

En base a los resultados obtenidos en este trabajo, se puede observar que la simulación es adecuada desde un punto de vista puramente académico, empleando sólo dos reglas difusas se logra una aproximación satisfactoria del sistema no lineal; sin embargo, en aplicaciones más prácticas dentro de la industria, es posible la necesidad de utilizar un número mayor de reglas difusas con el objetivo de una mejor interpretación del sistema no lineal a través de los sistemas difusos. El inconveniente que existe es que no hay una afirmación que precise el número exacto de reglas difusas a utilizar para obtener los resultados requeridos en el proceso de simulación; no obstante, de esta forma podemos asegurar un buen desempeño empleando sólo dos reglas difusas.

Hemos visto que podemos extender las técnicas de control no lineal a casos más generales, cuando:

1. el sistema es una caja negra,
2. sólo están disponibles los datos entradas-salidas.
 - Debido a que el sistema es una caja negra, son muy útiles los sistemas difusos; precisamente porque solo las entradas-salidas son medibles, y de esta forma podemos proporcionar un observador en modo deslizante. Y finalmente podemos probar la estabilidad de la combinación de estos dos métodos.
 - El desarrollo de este trabajo ha proporcionado varias experiencias positivas, asumiendo nuevas estrategias de control, obteniendo resultados satisfactorios y de esta forma poder establecer un precedente para este tipo de aplicaciones.
 - Para el diseño del control se consideran dos alternativas, en la primera se considera un control difuso del tipo Takagi-Sugeno, el cual tiene la capacidad de sintetizar funciones de control, proporcionar una capacidad de operación en diversas zonas de operación, y un carácter lingüístico que le hace más accesible y que simplifica el problema. La segunda alternativa considera el diseño de un controlador adaptable difuso, el cual permite resolver satisfactoriamente el problema de seguimiento que se plantea.

- La técnica de optimización utilizada por el control adaptable difuso para la segunda alternativa de diseño fue la utilización de un observador en modo deslizante.

Una de las contribuciones principales del presente trabajo es el diseño de un control adaptable difuso que permita estabilizar a la clase de sistemas no lineales en consideración. Y debido a que el control es adaptable se incluyen conceptos relativos a observadores e identificadores neuronales difusos.

Dentro de los trabajos futuros podría ser el mejoramiento del controlador en base a la optimización de las reglas y bases de conocimiento. Así como la implementación práctica del diseño del controlador adaptable difuso que se planteó.

Bibliografía

- [1] M.Brown, C.J.Harris, *Neurofuzzy Adaptive Modelling and Control*, Prentice Hall: New York , 1994.
- [2] A.Canudas de Wit and J.J.E.Slotine, Sliding Observers for Robot Manipulator, *Automatica*, Vol.27, No.5, pp. 859-864, 1991.
- [3] W.C.Chan, C.W.Chan, K.C.Cheung and Y.Wang, Modeling of nonlinear stochastic dynamical systems using neurofuzzy networks, *38th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2643-2648, Phoenix, USA, 1999.
- [4] F.C.Chen and C.C.Liu, Adaptive Controlling Nonlinear Countinuous-Time Systems Using Multilayer Neural Networks, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, pp. 1306-1310, 1994.
- [5] M.Y.Chen and D.A.Linkensm, A systematic neuro-fuzzy modeling framework with application to material property prediction, *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B*, Vol.31, pp. 781-790, 2001.
- [6] M.J.Corless and G.Leitmann, Continuous State Feedback Guaranteeing Uniform Ultimate Boundedness for Uncertain Dynamic Systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.* Vol.26, pp. 1139-1144, 1981.
- [7] G.Cybenko, Approximation by Superposition of Sigmoidal Activation Function, *Math.Control, Sig Syst*, Vol.2, pp. 303-314, 1989.

- [8] A.Delgado, C.Kambahmpati, and K.Warwick, Dynamic recurrent neural network for systems identification and control, *IEE Proc.-Cont. Theo. Appl.*, Vol. 142, No 4, pp. 307-315, 1995.
- [9] B.Egardt, *Stability of Adaptive Controllers*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol.20, Springer-Verlag, Berlin, 1979.
- [10] A.M.Fayaz, On the Sugeno-Type Fuzzy Observers, *Proc. of 38th IEEE Conf. on Decision & Control*, pp. 4828-4833, Phoneix, USA,1999.
- [11] K.Funahashi, and Y.Nakamura, Approximation of dynamical systems by continuous time recurrent neural networks, *Neural Networks*, Vol. 6, pp. 801-806, 1993.
- [12] S.Haykin, *Neural Networks- A Comprehensive Foundation*, Macmillan College Publ. Co., New York, 1994.
- [13] J.Hernandez and J-P.Barbot, Sliding Observer-based Feedback Control for Flexible Joints Manipulator, *Automatica*, Vol.32, No.9, pp. 1243-1254, 1996.
- [14] J.J.Hopfield, Neurons with grade response have collective computational properties like those of a two-state neurons, *Proc. Nat. Acad. Sci., USA*, 81, pp. 3088-3092, 1984.
- [15] S.I.Horikawa, T.Furuhashi and Y.Uchikawa, On fuzzy modeling using fuzzy neural networks with the back-propagation algorithm, *IEEE Trans. Neural Networks*, Vol.3, No.5, pp. 801-806, 1992.
- [16] K.J.Hunt, D.Sbarbaro, R.Zbikowski, and P.J.Gawthrop, Neural Network for control systems-a survey, *Automatica*, 28, pp. 1083-1112, 1992.
- [17] P.A.Ioannou and J.Sun, *Robust Adaptive Control*, Prentice-Hall, Inc, Upper Saddle River: NJ, 1996.
- [18] S.Jagannathan and F.L. Lewis, Identification of nonlinear dynamical systems using multilayered neural networks, *Automatica*, vol.32, no.12, pp. 1707-1712, 1996.

- [19] C.F.Juang, A TSK-type recurrent fuzzy network for dynamic systems processing by neural network and genetic algorithm, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, Vol.10, pp. 155-170, 2002.
- [20] Y.H. Kim and F.L. Lewis, *High-Level Feedback Control with Neural Networks*, World Scientific Publ. Co., 1998.
- [21] E.B.Kosmatopoulos, M.M.Polycarpou, M.A.Christodoulou and P.A.Ioannpu, "High-Order Neural Network Structures for Identification of Dynamical Systems", *IEEE Trans. on Neural Networks*, Vol.6, No.2, pp. 442-431, 1995. "Convergence", *Neural Networks*, Vol.10, No.2, pp. 299-314, 1997. Vol.1, pp. 4-27.
- [22] Lee Chuen, Fuzzy Logic in Control Systems: Fuzzy Logic Controller-Part I", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, Vol 20, No. 2 March/April 1990.
- [23] Y.G.Leu, T.T.Lee and W.Y.Wang, Observer-based adaptive fuzzy-neural control for unknown nonlinear dynamical systems, *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B*, Vol.29, pp. 583-591, 1999.
- [24] F.L.Lewis, A.Yesildirek and K.Liu, Multilayer neural-net robot controller with guaranteed tracking performance, *IEEE Trans. on Neural Networks*, Vol.7, No.2, pp. 388-399, 1996.
- [25] C.T.Lin and G.Lee, *Neural fuzzy systems: A neural-fuzzy synergism to intelligent systems*, Prentice-Hall Inc., NJ, 1996.
- [26] C.T.Lin, A neural fuzzy control system with structure and parameter learning, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.70, pp. 183-212, 1995.
- [27] Xiao-Jun Ma, Zeng-Qi Sun, Yan-Yan He, Analysis and Design of Fuzzy Controller and Fuzzy Observer, *IEEE Trans.on Fuzzy Systems*, Vol. 6, No.1, Feb. 1998.
- [28] E.H.Mamdani, Application of fuzzy algorithm for simple dynamic plant, *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, Vol. 121, No.12, 1585-1588, 1974.

- [29] D.P.Mandic, A.I.Hanna and M.Razaz, A normalized gradient descent algorithm for non-linear adaptive filters using a gradient adaptive step size, *IEEE Signal Processing Letters*, Vol.8, No.11, pp. 295-297, 2001
- [30] P.A.Mastorocostas and J.B.Theocharis, A recurrent fuzzy-neural model for dynamic system identification, *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B*, Vol.32, pp. 176-190, 2002.
- [31] R. M. Murray, Z. Li, S. S. Sastry, *A mathematical introduction to robotics manipulation*, CRC Press, 1993.
- [32] K.S.Narendra and K.Karthasarathy, Identification and Control of Dynamical Systems Using Neural Networks, *IEEE Trans. Neural Networks*, Vol.1, pp. 4-27, 1990.
- [33] S.Nicosia and A.Tornambe, High-Gain Observers in the State and Parameter Estimation of Robots Having Elastic Joints, *System & Control Letter*, Vol.13, pp. 331-337, 1989.
- [34] K.Ogata, *Ingeniería de Control Moderno*, 3a.Ed. Prentice-Hall, 1998.
- [35] G.A.Rovithakis and M.A.Christodoulou, Adaptive Control of Unknown Plants Using Dynamical Neural Networks, *IEEE Trans. on Syst., Man and Cybern.*, Vol. 24, pp. 400-412, 1994.
- [36] I.W.Sandberg, Uniform approximation and the circle criterion, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 38, pp. 1450-1458., 1992.
- [37] E.Sontag, Neural nets as systems models and controllers, *in Proc. 7th Yale Workshop on Adaptive and Learning Systems*, pp. 73-79, Yale University, 1992.
- [38] H.H.Tsai and P.T.Yu, On the optimal design of fuzzy neural networks with robust learning for function approximation, *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B*, Vol.30, pp. 217-223, 2000.
- [39] K.Wang, and A.N.Mitchel, Robustness and perturbation analysis of a class of artificial neural networks, *Neural Networks*, Vol. 7, No 2, pp. 251-257, 1994.

- [40] C.H.Wang, H.L.Liu and C.T.Lin, Dynamic optimal learning rates of a certain class of fuzzy neural networks and its applications with genetic algorithm, *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B*, Vol.31, pp. 467-475, 2001.
- [41] L.X.Wang, *Adaptive Fuzzy Systems and Control*, Englewood Cliffs NJ: Prentice-Hall, 1994.
- [42] L.X.Wang, *A course in Fuzzy Systems and Control*, Englewood Cliffs NJ: Prentice-Hall, 1997.
- [43] W.Y.Wang, T.T.Lee, C.L.Liu and C.H.Wang, Function approximation using fuzzy neural networks with robust learning algorithm, *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B*, Vol.27, pp. 740-747, 1997.
- [44] W.Y.Wang, Y.G.Leu and C.C.Hsu, Robust adaptive fuzzy-neural control of nonlinear dynamical systems using generalized projection updated law and variable structure controller, *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B*, Vol.31, pp. 140-147, 2001.
- [45] J.C.Willems, Least Squares Optimal Control and Algebraic Riccati Equations, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 16, No 6, pp. 621-634, 1971.
- [46] S.Wu and M.J.Er, Dynamic fuzzy neural networks- a novel approach to function approximation, *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B*, Vol.30, pp. 358-364, 2000.
- [47] W. Yu, Alexander S.Poznyak, Indirect Adaptive Control via Parallel Dynamic Neural Networks, *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, Vol.37, No.1, 1999.
- [48] W. Yu and Alexander S.Poznyak, *Robust Asymptotic Neuro Observer with Time Delay Term*, submitted to CDC'99
- [49] Wen Yu, Marco A. Moreno, Xiaou Li, Observer Based Neuro Identifier, *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, Vol.147, No.2, pp. 145-152, 2000.

- [50] W.Yu and X. Li, Some stability properties of dynamic neural networks, *IEEE Trans. Circuits and Systems, Part I*, Vol.48, No.1, pp. 256-259, 2001.
- [51] W.Yu and X. Li, Some new results on system identification with dynamic neural networks, *IEEE Trans. Neural Networks*, Vol.12, No.2, pp. 412-417, 2001.
- [52] L.A.Zadeh, Fuzzy Sets, *Information and Control*, Vol 8, pp. 338-356, 1965.
- [53] L.A. Zadeh, Fuzzy Algorithm, *Information and Control*, Vol.12, No.2, pp. 94-102, 1968.
- [54] L.A.Zadeh, Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes, *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybern.*, Vol.3, No.1, pp.28-44, 1973
- [55] L.A.Zadeh, The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning I, II, III, *Information Sciences*, Vol.8, pp. 199-251, pp. 301-357; Vol.9 pp. 43-88, 1975.

Appendix: diagramas

Para las diferentes simulaciones se utilizó la herramienta Matlab Simulink, a continuación se muestran los diagramas.

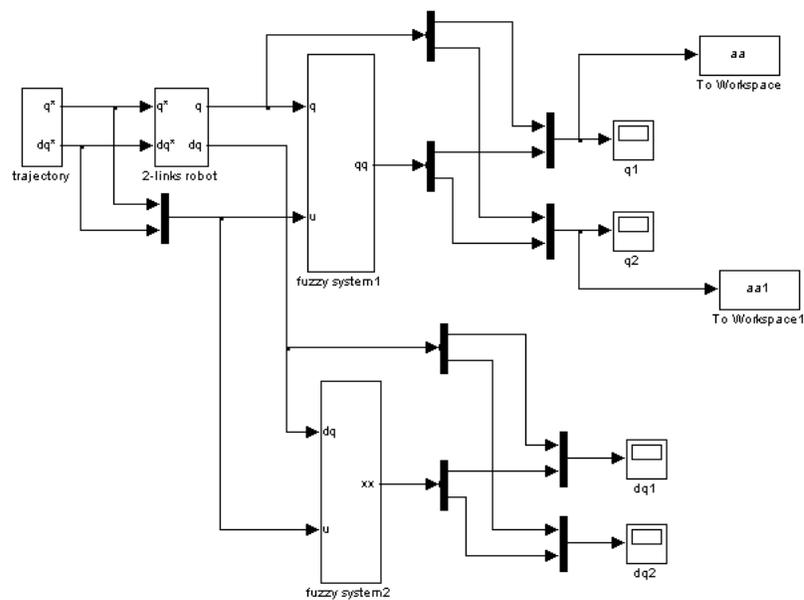


Figura 7.1: Diagrama principal para el neuro identificador del robot manipulador.

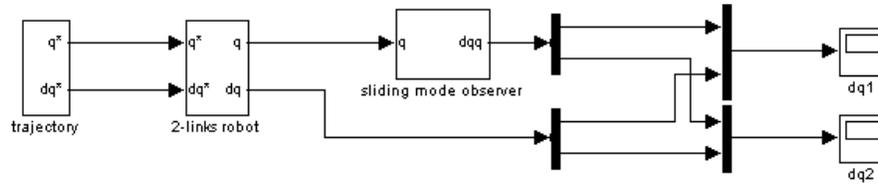


Figura 7.2: Diagrama principal del observador para estimar los estados del robot de dos grados de libertad.

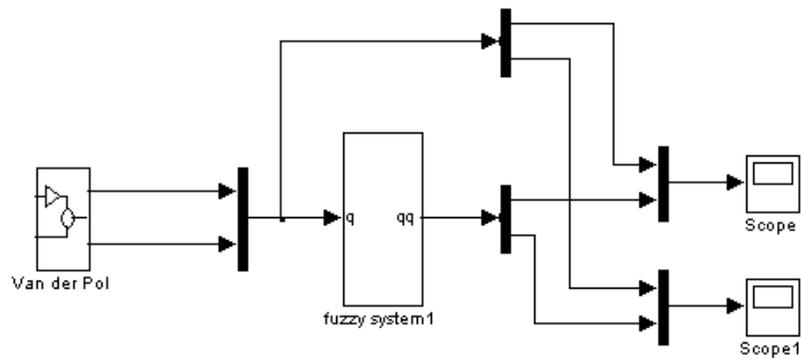


Figura 7.3: Diagrama principal para la identificación del sistema de Van der Pol por medio de un sistema difuso.

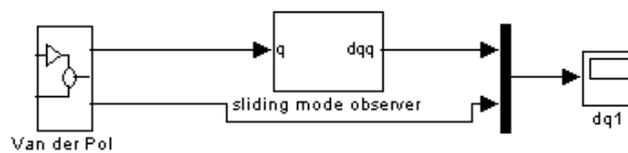


Figura 7.4: Observador en modo deslizante para el sistema de Van der Pol.

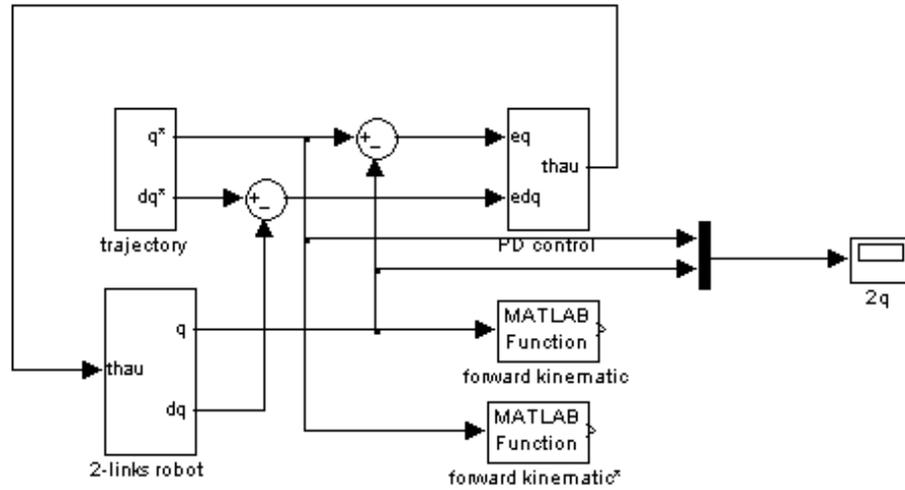


Figura 7.5: Diagrama principal del control neuronal adaptativo para el robot manipulador de dos grados de libertad.

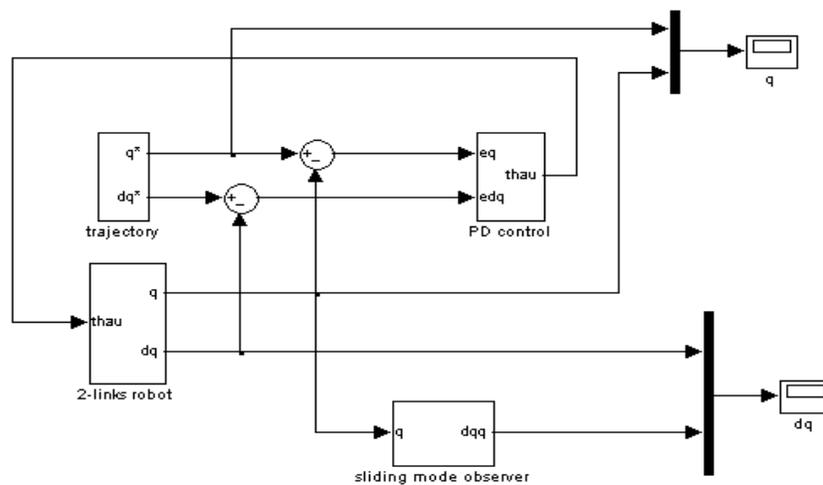


Figura 7.6: Diagrama principal del control incluyendo el observador en modo deslizante para la velocidad de la junta del robot.