Gabriel Daniel Villa Salvador

Análisis Real

Curso Propedéutico. Versión preliminar.

Junio de 2005

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.

Departamento de Control Automático
Zacatenco, D.F.
MÉXICO

“*Muchos creen que tener talento es cuestión de suerte, pocos piensan que tener suerte es cuestión de talento*”
Jacinto Benavente

“*Un problema es tu oportunidad para hacer tu mejor esfuerzo*”
Duke Ellington

“*No hay peor error que el no reconocerlo*”
R. Escandón

“*El arte de ser sabio es el arte de saber qué es lo que debemos ignorar*”
William James

“*Estamos tan ocupados llevando a cabo lo urgente, que no tenemos tiempo para hacer lo importante*”
Confucio

“*No tengas miedo de ir despacio, sólo ten miedo de quedarte parado*”
Proverbio chino

“*Es fácil saber cuando va uno por buen camino, éste siempre es de subida*”
Ralph W. Emerson

“*Y yo, ¿porqué?*”
Vicente Fox Quezada

Prefacio

Estas notas están basadas en el curso propedéutico de Análisis Real impartido por el autor en los años de 2004 y 2005 en el Departamento de Control Automático del CINVESTAV del I.P.N.

Sus objetivos fundamentales son, primeramente, la de proveer a los estudiantes interesados en el programa de maestría del Departamento de Control Automático, tanto para la opción de control como la de matemáticas, con las bases de cálculo de una variable real que se necesitan para iniciar el posgrado.

En segundo lugar, dan una idea de la clase de matemáticas que se requieren para proseguir los estudios en este Departamento.

Finalmente, sirven como una referencia breve y concisa de los temas del programa del curso propedéutico de Análisis Real.

Es importante mencionar que se usan varias veces propiedades intuitivas de ciertas funciones antes de haber sido introducidas formalmente en el curso. Por ejemplo, para las funciones logaritmo, exponencial, las funciones trigonométicas, trigonométicas inversas, etc., usamos ciertas de sus propiedades, como por ejemplo la periodicidad de la función $\operatorname{sen} x$, o la derivada de la función logaritmo, aún antes de dar siquiera una definición, ya no digamos precisa, de estas funciones. La razón principal de hacer este uso indebido de estas funciones, es el de tener ejemplos más variados y no sólo ejemplos de funciones introducidas las cuales reducirían de manera notable nuestra visión de los conceptos introducidos.

Este trabajo no pretende ser exhaustivo de los temas aquí tratados y sólo dan una muy breve introducción de los conceptos fundamentales del programa del curso propedéutico de anális real.

México, D. F.,
junio de 2005 *Gabriel D. Villa Salvador*

Contenido

1 Números reales y funciones. 1
1.1 Propiedades de los números reales 1
1.2 Supremo e ínfimo 4
1.3 Intervalos 5
1.4 Funciones de variable real 6
1.5 Valor absoluto 10
1.6 Ejercicios 13

2 Límites de funciones de variable real 15
2.1 Concepto de límite 15
2.2 Propiedades de los límites 20
2.3 Ejercicios 24

3 Funciones continuas 27
3.1 Continuidad y límites laterales 27
3.2 El axioma del supremo 29
3.3 Los teoremas fuertes de continuidad 30
3.4 Ejercicios 32

4 Sucesiones 35
4.1 Límite de una sucesión 35
4.2 Propiedades de los límites de sucesiones 38
4.3 Sucesiones de Cauchy 46
4.4 Ejercicios 47

5 Derivada de una función 51
5.1 Definiciones y ejemplos 51
5.2 Propiedades de las funciones derivables 53
5.3 Máximos y mínimos locales 59
5.4 Criterios de la segunda derivada para máximos y mínimos locales 64

5.5 Funciones cóncavas y funciones convexas 68
5.6 Ejercicios 70

6 Integral de Riemann 73
6.1 Definición del concepto de integral 73
6.2 Resultados fundamentales de integración 81
6.3 Algunas funciones elementales 87
6.4 Ejercicios 88

Programa 91

Notaciones 93

Referencias 95

Indice alfabético 97

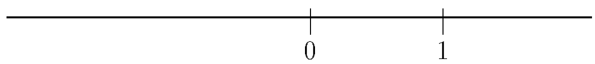
1

Números reales y funciones.

En este capítulo estableceremos, generalmente de manera intuitiva, las propiedades del orden de los números reales. En particular definiremos la función valor absoluto y probaremos la desigualdad del triángulo.

1.1 Propiedades de los números reales

Entenderemos como los números reales $\mathbb{R}$ a los que representamos como puntos en una línea continua la cual llamaremos *recta real*. Consideramos dos elementos fijos diferentes de la recta: el cero 0 y el uno 1.



Los números relaes tienen dos operaciones: la suma $(+)$ y la multiplicación $(\cdot \text{ o } \times)$ y están sujetos a las siguientes propiedades (axiomas):

(i) Asociatividad:

$$(a+b)+c = a+(b+c) \quad \text{para toda} \quad a,b,c \in \mathbb{R}$$
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \text{para toda} \quad a,b,c \in \mathbb{R}.$$

(ii) Conmutatividad:

$$a+b = b+a \quad \text{para toda} \quad a,b \in \mathbb{R}$$
$$a \cdot b = b \cdot a \quad \text{para toda} \quad a,b \in \mathbb{R}$$

(iii) Distributividad:

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{para toda} \quad a,b,c \in \mathbb{R}$$

(iv) Elementos Neutros:

$$a + 0 = 0 + a \quad \text{para toda} \quad a \in \mathbb{R}$$
$$a \cdot 1 = 1 \cdot a \quad \text{para toda} \quad a \in \mathbb{R}.$$

(v) Elementos inversos:

$$\text{para toda } a \in \mathbb{R}, \quad \text{existe} \quad -a \in \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad a + (-a) = 0,$$
$$\text{para toda } a \in \mathbb{R}, a \neq 0, \quad \text{existe} \quad a^{-1} \in \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad a + a^{-1} = 1,$$

Nota 1.1.1. No existe 0^{-1}.

Las otras operaciones de los números reales: $(-)$ y $(\div$ o $/)$ se relacionan con la suma y la multiplicación de la siguiente forma:

$$a - b := a + (-b);$$
$$\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}, b \neq 0.$$

Nota 1.1.2. No se debe nunca dividir entre 0.

Definición 1.1.3. Definimos en $\mathbb{R}$ un *orden* $<$. Se dice que $a < b$, o equivalentemente si $b > a$ si a está a la "izquierda" de b en la recta real, o equivalentemente, si $b - a (> 0)$ está a la "derecha" del 0.

Nota 1.1.4. $a \leq b$ significará que $a < b$ ó $a = b$.

Propiedades del orden:

(i) Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene una y sólo una de las siguientes propiedades:

$$x < y, \quad x = y \quad \text{ó} \quad x > y \quad \text{(tricotomía)}.$$

(ii) Si $x < y$ entonces $x + z < y + z$ para cualesquiera $z \in \mathbb{R}$.
(iii) Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $ab > 0$.
(iv) Si $a > b$ y $b > c$ entonces $a > c$.
(v) Si $a > 0$ entonces $-a < 0$ y si $a < 0$ entonces $-a > 0$.
(vi) **Propiedad arquimideana**: Sea $x \in \mathbb{R}$ y sea $a > 0$. Entonces existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > x$.

Como consecuencia tenemos:

Proposición 1.1.5. *Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$. Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.*

Demostración. Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $b-a > 0$ y $c > 0$ de donde obtenemos $(b-a)c = bc - ac > 0$ de donde $ac < bc$.

Ahora bien, si $a < b$ y $c < 0$, entonces se tiene $-c > 0$ y $(b-a)(-c) = -bc + ac > 0$ de donde se sigue que $ac > bc$. □

Definición 1.1.6. Los *números racionales* son $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$, donde $\mathbb{Z}$ es el conjunto de los *números enteros*: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ y $\mathbb{N}$ denota al conjunto de los *números naturales*: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Finalmente los *números irracionales* $\mathbb{I}$ son los números reales que no son racionales, esto es, $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Ejemplo 1.1.7. $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$.

Demostración. Si esto no fuese cierto, es decir, $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, entonces podríamos escribir $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$ sin factores primos en común. Por lo tanto $\sqrt{2}q = p$ de donde obtenemos $2q^2 = p^2$.

Se sigue que p^2 es un número par. Es fácil ver que esto implica que p es un número par, es decir, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 2n$. Sustituyendo en la expresión anterior obtenemos que $2q^2 = p^2 = 4n^2$ de donde se sigue que $q^2 = 2n^2$.

Por lo tanto q^2 es un número par y por ende q es también un número par. En resumen hemos obtenido que si $\sqrt{2}$ es un número racional, entonces p y q son ambos números pares, es decir, divisibles por 2. Esto contradice el hecho de que p y q no tenían factores en común y prueba que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Por lo tanto $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$. □

Pregunta 1.1.8. ¿$2.17565656 \cdots =: 2.17\overline{56} \in \mathbb{Q}$? ¿Por qué?

El siguiente resultado nos indica que tanto los números racionales como los números irracionales abundan por doquier en la recta real.

Teorema 1.1.9. En cualquier intervalo $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, donde $a < b$, existen una infinidad de números irracionales y una infinidad de números racionales.

Demostración. Sea $A > 0$ cualquier número real positivo. Por la propiedad arquimideana, existe un número natural $q \in \mathbb{N}$ tal que $q(b-a) > A$ lo cual es equivalente a $\dfrac{A}{q} < b - a$. Veremos que exite un número entero diferente a cero p, $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tal que $a < p\left(\dfrac{A}{q}\right) < b$.

Primero supongamos que $a \geq 0$. Sea $s \in \mathbb{Z}$ tal que $s\dfrac{A}{q} \leq a < (s+1)\dfrac{A}{q}$. Tal s existe puesto que a es no negativo y a la propiedad arquimideana. Entonces $\dfrac{(s+1)A}{q} > a$ y $\dfrac{(s+1)A}{q} = s\dfrac{A}{q} + \dfrac{A}{q} < a + (b-a) = b$. Por lo tanto

$\dfrac{(s+1)}{q}A \in (a,b)$. Puesto que $a \geq 0$, $s \neq -1$, es decir $s \geq 0$. Se sigue que $\dfrac{(s+1)}{q}A \neq q$. Entonces $p = s+1$ satisface lo requerido.

En el caso $a < 0$, podemos suponer que $b < 0$ pues probando este subcaso, se seguiría la conclusión inmediatamente para $b \geq 0$. Así estudiemos el caso $a < 0, b < 0$. Sean $a_1 := a$ y $b_1 := b$. Entonces puesto que $a < b$, $0 < b_1 = -b < -a = -a_1$. Aplicamos el caso anterior para el intervalo $(b_1, a_1) = (-b, -a)$. Es decir, existe $\dfrac{p_1}{q_1}A \in (-b, -a)$, por lo que $-\dfrac{p_1}{q_1}A \in (a,b)$ con $\dfrac{p_1}{q_1} \neq 0$.

Ahora bien, tomando $A = 1$, se tiene que $\dfrac{p}{q}A = \dfrac{p}{q} \in (a,b)$, $\dfrac{p}{q} \neq 0$ y $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

Ahora, tomando $A = \sqrt{2}$, tenemos que $\dfrac{p}{q}A = \dfrac{p}{q}\sqrt{2} \in (a,b)$ con $\dfrac{p}{q} \neq 0$. Por lo tanto $\dfrac{p}{q}\sqrt{2} \in \mathbb{I}$.

Hemos encontrado $x_1, y_1 \in (a,b)$ con $x_1 \in \mathbb{Q}$ y $y_1 \in \mathbb{I}$. Repetimos el proceso para (a, x_1) y para (a, y_1) y encontramos $x_2 \in (a, x_1)$, $y_2 \in (a, y_1)$ con $x_2 \in \mathbb{Q}$, $y_2 \in \mathbb{I}$. Repitiendo el proceso, obtenemos para cualquier número natural $n \in \mathbb{N}$ elementos $x_i \in \mathbb{Q}$, $y_i \in \mathbb{I}$, $i = 1, \ldots, n$ tales que:

$$a < x_n < x_{n-1} < \cdots < x_2 < x_1 < b$$

y

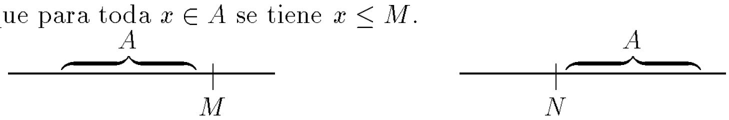
$$a < y_n < y_{n-1} < \cdots < y_2 < y_1 < b,$$

de donde se sigue lo afirmado. □

1.2 Supremo e ínfimo

Una de las propiedades fundamentales de los números reales es la existencia del supremo y del ínfimo para sus subconjuntos acotados.

Definición 1.2.1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. A se dice *acotado superiormente* si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que para toda $x \in A$ se tiene $x \leq M$.



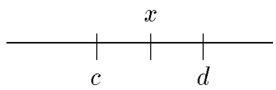
El conjunto A se dice *acotado inferiormente* si existe $N \in \mathbb{R}$ tal que para toda $x \in A$ se tiene $N \leq x$.

Sea A un subconjunto no vacío de los reales que es acotado superiormente. Se define el *supremo de* A $\sup A$ como el mínimo número real M tal que $x \leq M$ para toda $x \in A$, en caso de existir tal M.

Similarmente si A es un subconjunto no vacío de los números reales, el cual es acotado inferiormente, se difine el *ínfimo de* A $\inf A$ como el máximo número real N tal que $N \leq x$ para toda $x \in A$, en caso de existir tal N.

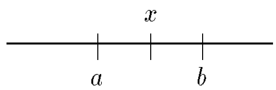
Nota 1.2.2. Se tiene que $\sup A = d$ si:

(i) $x \leq d$ para toda $x \in A$
(ii) Si $c < d$, entonces existe $x \in A$ tal que $c < x$.



Similarmente, tenemos que para un conjunto A acotado inferiormente que $\inf A = a$ si

(i) $a \leq x$ para toda $x \in A$.
(ii) Si $a < b$, existe $x \in A$ tal que $x < b$.



Ejemplo 1.2.3. $\inf \mathbb{N} = 1$, $\sup \mathbb{N}$ no existe pero ponemos $\sup \mathbb{N} = \infty$.

Ejemplo 1.2.4. $\inf \mathbb{Z}$ y $\sup \mathbb{Z}$ no existen pero podemos poner: $\inf \mathbb{Z} = -\infty$, $\sup A = \infty$.

Ejemplo 1.2.5. Sea $A := \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \right\}$. Entonces $\sup A = 1$ e $\inf A = 0$.

Notemos que $0 \notin A$.

Ejemplo 1.2.6. Si $\emptyset$ denota al conjunto vacío, entonces podemos poner (un buen ejercicio para el lector es encontrar una buena justificación):

$$\inf \emptyset = \infty \quad \text{y} \quad \sup \emptyset = -\infty.$$

Notación 1.2.7. Entenderemos como los *reales extendidos* al conjunto $\mathbb{R}^{\#} := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$.

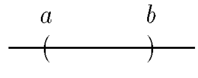
1.3 Intervalos

Definición 1.3.1. Un *intervalo* es un conjunto del estilo:

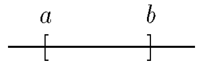
$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid a \substack{< \\ \leq} x \substack{< \\ \leq} b\}, \quad \text{con} \quad a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \quad b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces tenemos los siguientes tipos de intervalos:

Intervalo abierto $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

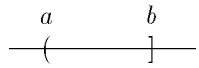


Intervalo cerrado $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

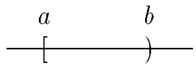


así como los intervalos semicerrados (semiabiertos) :

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\};$$

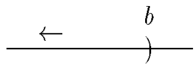


$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}.$$



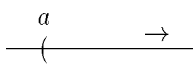
Para ∞ y $-\infty$ tenemos:

$$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\};$$



$$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\};$$

$$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\};$$



$$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\};$$

$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}.$$

Notemos que si $a > b$, entonces $(a, b) = [a, b) = (a, b] = [a, b] = \emptyset$.
Finalmente notemos que:

$$\sup(a, b) = \sup(a, b] = \sup[a, b) = \sup[a, b] = b;$$
$$\inf(a, b) = \inf(a, b] = \inf[a, b) = \inf[a, b] = a.$$

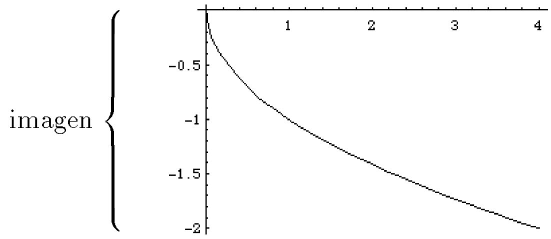
1.4 Funciones de variable real

Definición 1.4.1. Una de *función variable real* es un asignación de un subconjunto no vacío $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que para cada $a \in A$ le asociamos un único número real. Esto se representa así:

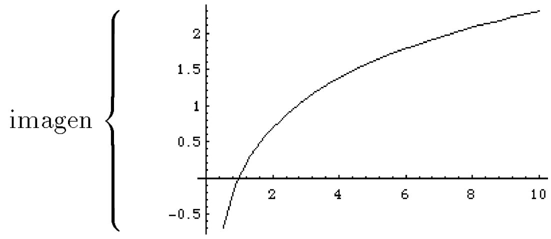
$$\begin{aligned} f \colon A &\to \mathbb{R} \\ a &\mapsto f(a). \end{aligned}$$

Para $a \in A$ asociamos $f(a) \in \mathbb{R}$. A se llama el *dominio* de f y la *imagen* de f es: $f(A) := \{f(a) \mid a \in A\}$.

Ejemplo 1.4.2. Sea $f \colon \mathbb{R}^+ \cup \{0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -\sqrt{x}$. Entonces la imagen de f es $\mathbb{R}^- \cup \{0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\} = (-\infty, 0]$.



Ejemplo 1.4.3. Sea $f\colon \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \ln x$. Entonces la imagen de f es $\mathbb{R}$.



Se definen las operaciones suma $(+)$, diferencia $(-)$, multiplicación $(\cdot)$, cociente $(\div)$ de manera puntual. Esto es:

Definición 1.4.4. Sean $f, g\colon A \to \mathbb{R}$. Entonces definimos:

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &:= f(x) + g(x) \quad \text{para} \quad x \in A \qquad \text{suma},\\
(f-g)(x) &:= f(x) - g(x) \quad \text{para} \quad x \in A \qquad \text{diferencia o resta},\\
(f \cdot g)(x) &:= f(x) \cdot g(x) \quad \text{para} \quad x \in A \qquad \text{multiplicación o producto},\\
\frac{f}{g}(x) &:= \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{para} \quad x \in A \quad \text{si} \quad g(x) \neq 0 \qquad \text{cociente}.
\end{aligned}$$

Finalmente definimos la *composición* de dos funciones como sigue:

Definición 1.4.5. Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$, $g\colon B \to \mathbb{R}$ tales que $f(A) \subseteq B$. Entonces definimos la composición de f con g como

$$g \circ f\colon A \to \mathbb{R}, \quad (g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

Ejemplo 1.4.6. Si $f(x) := \operatorname{sen} x$ y $g(x) := e^x$, entonces

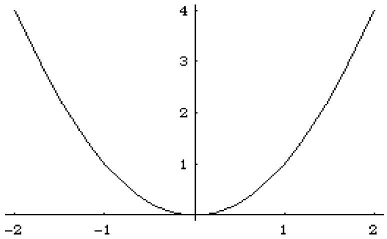
$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = e^{f(x)} = e^{\operatorname{sen} x},\\
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = \operatorname{sen}(g(x)) = \operatorname{sen} e^x.
\end{aligned}$$

En particular tenemos que $g \circ f \neq f \circ g$.

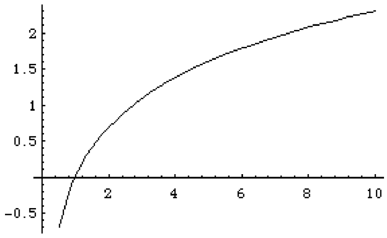
Definición 1.4.7. Una función $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama *sobre* o *suprayectiva* si la imagen de f es todo $\mathbb{R}$, es decir, $f(A) = \mathbb{R}$.

f se llama *1 a 1 (1-1)* o *inyectiva* si siempre que $f(x) = f(y)$ se tiene que $x = y$.

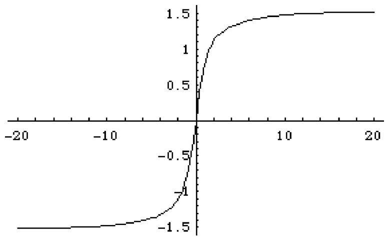
Ejemplo 1.4.8. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Se tiene que f no es 1-1 pues $f(2) = f(-2) = 4$ y $2 \neq -2$. f tampoco es suprayectiva pues $-1 \notin \mathbb{R}$ puesto que para toda $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \geq 0$.



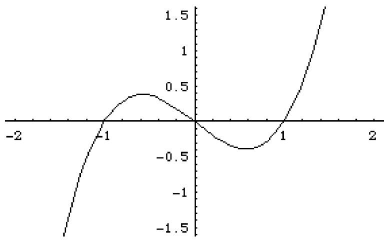
Ejemplo 1.4.9. La función $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) := \ln x$ es 1-1 pues si $\ln x = \ln y$ entonces $x = e^{\ln x} = e^{\ln y} = y$. También tenemos que f es sobre pues dado $a \in \mathbb{R}$, sea $x := e^a > 0$. Entonces x satisface que $\ln x = \ln e^a = a$, por lo que todo $a \in \mathbb{R}$ está en la imagen de f, es decir, $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}$. Por lo tanto f es sobre.



Ejemplo 1.4.10. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) := \arctan x$. Se tiene que $f(x)$ es 1-1 puesto que $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} > 0$, es decir, f es una función creciente y por lo tanto si $x \neq y$, digamos, $x < y$, entonces $f(x) < f(y)$ de donde $f(x) \neq f(y)$. Por otro lado f no es suprayectiva pues $f(\mathbb{R}) = \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \neq \mathbb{R}$.

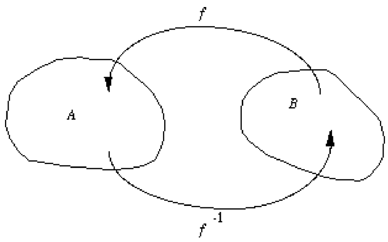


Ejemplo 1.4.11. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x(x^2 - 1)$. Entonces f no es 1-1 puesto que $f(0) = f(1) = f(-1) = 0$ pero f es suprayectiva puesto que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.



Las funciones 1-1 tienen la propiedad que existe la función inversa. Más precisamente, definimos:

Definición 1.4.12. Sea $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función 1-1. Sea $B := f(A)$ la imagen de f. Entonces la función inversa de f se define por $g := f^{-1}\colon B \to \mathbb{R}$ definida de la siguiente forma. Dado $y \in B$, entonces existe un <u>único</u> $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Entonces definimos $g(y) = f^{-1}(y) = x$.



Notemos que la función inversa g también es 1-1 pues si $g(y) = g(z) = a$, entonces, por definición, $f(a) = y = z$. Además se tiene que

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

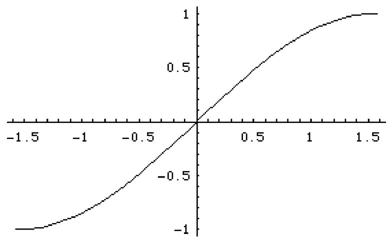
También notemos que $g(B) = A$ pues por un lado, por definición, se tiene $g(B) \subseteq A$ y por otro lado, si $a \in A$, entonces $f(a) = b \in B$ de donde $g(b) = a$.

Finalmente f y $g = f^{-1}$ satisfacen que $f\colon A \to B$, $f^{-1}\colon B \to A$ y $f \circ f^{-1}\colon B \to B$, $f^{-1} \circ f\colon A \to A$, y $(f \circ f^{-1})(y) = y$ para toda $y \in B$ y $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ para toda $x \in A$.

Ejemplo 1.4.13. La función exponencial: $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x = f(x)$ satisface que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$ y es 1-1. Su inversa es la función logaritmo: $f^{-1} = \ln\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ y se tiene:

$$\begin{aligned} \ln \circ \exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad \ln(e^x) = x \quad \text{para toda} \quad x \in \mathbb{R}, \\ \exp \circ \ln\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, &\quad e^{\ln y} = y \quad \text{para toda} \quad y \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.4.14. La inversa de la función seno, cuando la consideramos restringida al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, es decir la función $f = \operatorname{sen}\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ tiene como inversa la función $\operatorname{arcsen}\colon [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y se tiene que



$$\mathrm{sen} \circ \mathrm{arcsen} : [-1,1] \to [-1,1], \quad \mathrm{sen}(\mathrm{arcsen}(x)) = x \quad \text{para toda} \quad x \in [-1,1],$$

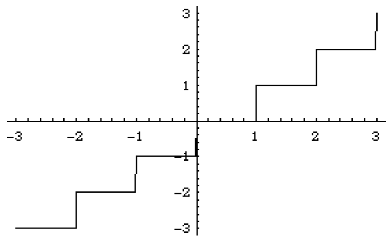
$$\mathrm{arcsen} \circ \mathrm{sen} : \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big] \to \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big], \mathrm{arcsen}(\mathrm{sen}(x)) = x$$

$$\text{para toda} \quad x \in \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big].$$

1.5 Valor absoluto

Empezamos por definir la función *parte entera*.

Definición 1.5.1. Se define la función *parte entera* como $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x] := n$ donde $n \leq x < n+1$, $n \in \mathbb{Z}$.



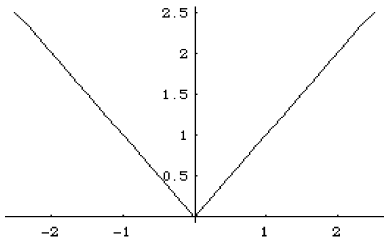
Es decir, al escribir x como $x = a + r$ con $a \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq r < 1$, entonces $[x] = a$. En otras palabras, al desarrollar el número en su expansión decimal, con su parte fraccionaria positiva:

$$x = A.a_1 a_2 \cdots a_n \cdots, \quad A \in \mathbb{Z}, \quad [x] = A.$$

Ejemplo 1.5.2. $[-1.3] = -2$, $[7.5] = 7$.

Definición 1.5.3. La función *valor absoluto* $|\ |\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define de la siguiente forma:

$$|x| := \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$



Notemos que $|x| \geq 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$. La imagen de $|\ |$ es $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Se tiene que $|x| = |-x|$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

Proposición 1.5.4. *Se tiene que $|x| \leq a$ si y sólo si $-a \leq x \leq a$.*

Demostración. Si $|x| \leq a$, entonces $|x| = \pm x \leq a$, esto es, $x \leq a$ y $-x \leq a$, lo cual es equivalente a $-a \leq x$. Juntando estas dos desigualdades, concluímos que $-a \leq x \leq a$.

Recíprocamente, si $-a \leq x \leq a$, entonces $x \leq a$ y $-a \leq x$ siendo esta última desigualdad equivalente a $-x \leq a$. Por lo tanto tenemos que $\pm x \leq a$ lo cual equivale a $|x| \leq a$. $\square$

Observación 1.5.5. Notemos que $|x| = \sqrt{x^2}$. Por ejemplo, $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 = |-2|$.

A continuación probamos un caso particular del Ejercicio 1.6.6.

Proposición 1.5.6. *Si $a, b > 0$, entonces $a < b$ si y sólo si $a^2 < b^2$.*

Demostración. Si $a < b$ entonces $b - a > 0$ y $b + a > 0$. Por lo tanto $(b-a)(b+a) = b^2 - a^2 > 0$, es decir, $a^2 < b^2$.

Recíprocamente, si $a^2 < b^2$, entonces $(b-a)(b+a) = b^2 - a^2 > 0$. Puesto que $b + a > 0$ necesariamente se tiene $b - a > 0$, es decir $a < b$. $\square$

Teorema 1.5.7 (Desigualdad del Triángulo). *Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene:*

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Consecuentemente, también tenemos que $|x - y| \leq |x| + |y|$.

Demostración. Usando la Proposición 1.5.6 y el hecho de que $x \leq |x|$, $y \leq |y|$, se tiene:

$$|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2.$$

Por lo tanto $|x + y| \leq |x| + |y|$.

De lo anterior y usando que $|-y| = |y|$ se tiene que $|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|$. $\square$

Corolario 1.5.8. *Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene*

$$|x| - |y| \leq |x - y| \quad \text{y} \quad |y| - |x| \leq |x - y|.$$

En particular tenemos:

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Demostración. Se tiene del Teorema 1.5.7 que $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$ y $|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x| = |x - y| + |x|$ de donde se sigue el resultado. □

Ejemplo 1.5.9. Hallar las x que satisfacen $|x^2 - 1| < \dfrac{1}{2}$.

Respuesta. Se tiene que las siguiente equivalencias

$$
\begin{gathered}
|x^2 - 1| < \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2} < x^2 - 1 < \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} < x^2 < \frac{3}{2} \iff \\
\iff \frac{1}{\sqrt{2}} < |x| < \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \iff \frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad \text{o} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} < -x < \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \iff \\
\iff \frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad \text{o} \quad -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} < x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \iff \\
\iff x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).
\end{gathered}
$$

Por tanto la solución es

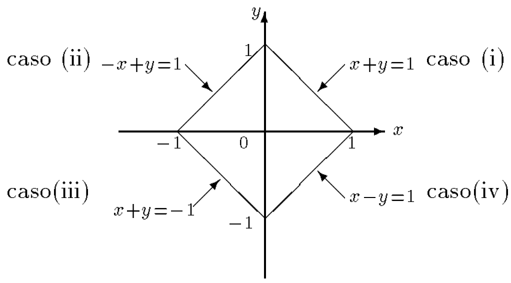
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$ □

Ejemplo 1.5.10. Hallar los puntos (x, y) tales que $|x| + |y| = 1$.

Respuesta. Como observación auxiliar, no necesaria para solución, es que si $|x| + |y| = 1$, entonces necesariamente $|x| \leq 1$ y $|y| \leq 1$.

Se tiene que las soluciones de $|x| + |y| = 1$ es la solución de uno de los siguientes 4 casos:

(i) Si $x, y \geq 0$, entonces $x + y = 1$. Por tanto estas soluciones son el segmento de recta $\{(x, y) \mid x + y = 1, 0 \leq x \leq 1\}$.
(ii) Si $x \leq 0$ y $y \geq 0$, entonces $-x + y = 1$. Por tanto estas soluciones son el segmento de recta $\{(x, y) \mid y = x + 1, -1 \leq x \leq 0\}$.
(iii) Si $x \leq 0$ y $y \leq 0$, entonces $-x - y = 1$. Por tanto las soluciones en este caso son el segmento $\{(x, y) \mid x + y = -1, -1 \leq x \leq 0\}$.
(iv) Si $x \geq 0$ y $y \leq 0$, entonces $x - y = 1$. Por tanto las soluciones a este caso son el segmento $\{(x, y) \mid y = x - 1, 0 \leq x \leq 1\}$. □.



1.6 Ejercicios

Ejercicio 1.6.1. Encontrar el error en la siguiente seudo demostración: Sea $x = y \neq 0$. Entonces $x^2 = xy$. Por lo tanto $x^2 - y^2 = xy - y^2$. De donde $(x+y)(x-y) = y(x-y)$. Por lo tanto $x + y = y$. De esta forma obtenemos $2y = y$. Puesto que $y \neq 0$, se sigue que $2 = 1$.

Ejercicio 1.6.2. Encontrar todos los números reales tales que

a).- $4 - x < 3 - 2x$.
b).- $x^2 + x + 1 > 2$.
c).- $2^x < 8$.
d).- $\dfrac{x-1}{x+1} > 0$.
e).- $|x-3| \leq 8$.
f).- $|x-1| \cdot |x+2| = 3$.
g).- $|x-1| + |x+1| < 2$.

Ejercicio 1.6.3 (Binomio de Newton). Demostrar por inducción que para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Ejercicio 1.6.4. Demostrar que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es irracional.

Ejercicio 1.6.5. Hallar $\sup A$ e $\inf A$, en caso de existir, de los siguientes conjuntos:

a).- $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
b).- $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$.
c).- $\{x \mid x^2 + x + 1 \geq 0\}$.
d).- $\{\frac{1}{n} + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Ejercicio 1.6.6. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que $a < b \iff a^n < b^n$.

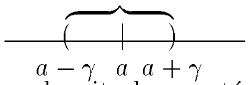
2

Límites de funciones de variable real

En este capítulo establecermos las propiedades de los límites de funciones reales de variable real. Demostraremos la mayoría de estos resultados pero algunos los dejaremos sin prueba.

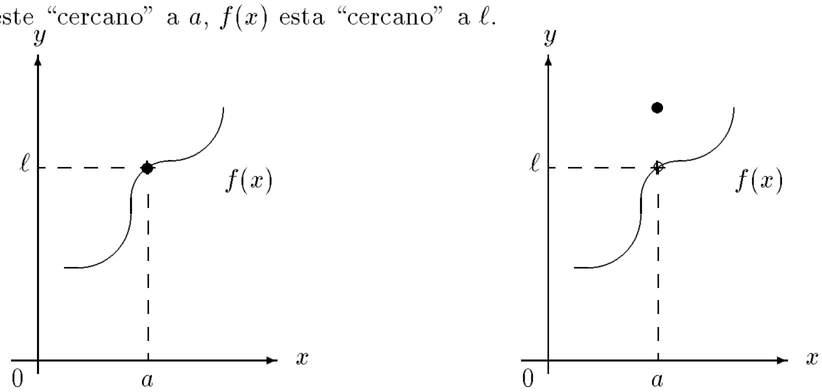
2.1 Concepto de límite

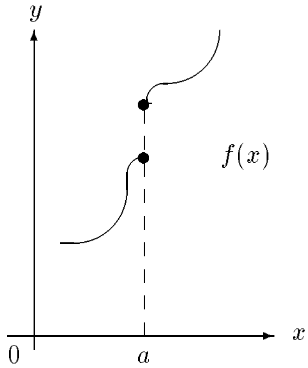
Consideremos una función $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$ tal que existe un número real positivo $\gamma > 0$ tal que $(a-\gamma, a+\gamma) \setminus \{a\} \subseteq A$.

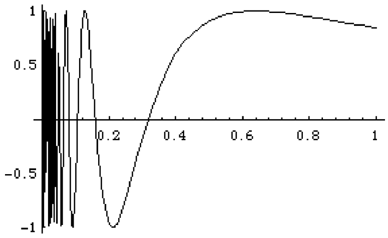


Es decir, existe un intervalo abierto alrededor de a que al quitarle a, está contenido en A. El punto a puede o no estar en A. Eso no tiene relevancia para el concepto de límite.

Decimos que el límite de $f(x)$ cuando x "tiende" a a es ℓ si siempre que x este "cercano" a a, $f(x)$ esta "cercano" a ℓ.







El problema consiste en precisar que significa "cercano". La cercanía o lejanía se mide por su distancia y de hecho decir "cerca" o "lejos" carece de sentido pues es un concepto relativo. ¿Estamos cerca del planeta Marte? La respuesta depende de con respecto a que lo midamos.

Ahora bien, la distancia de x a a se define por $|x-a|$. De manera similar, la distancia de $f(x)$ a ℓ se define por $|f(x)-\ell|$.

De esta manera, si ponemos $|f(x)-\ell|<\varepsilon$, estamos distancia de $f(x)$ a ℓ es menor que el número positivo ε, independientemente si alguien considera que están cercanos o lejanos. Se tiene que $|f(x)-\ell|<\varepsilon$ es equivalente a $-\varepsilon<f(x)-\ell<\varepsilon$ lo cual es lo mismo que $\ell-\varepsilon<f(x)<\ell+\varepsilon$, es decir que $f(x)\in(\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon)$.

$$\overbrace{(\quad|\quad)}^{f(x)}$$
$$\ell-\varepsilon \quad \ell \quad \ell+\varepsilon$$

Análogamente, $|x-a|<\delta$ significa que $x\in(a-\delta,a+\delta)$.

$$\overbrace{(\quad|\quad)}^{x}$$
$$a-\delta \quad a \quad a+\delta$$

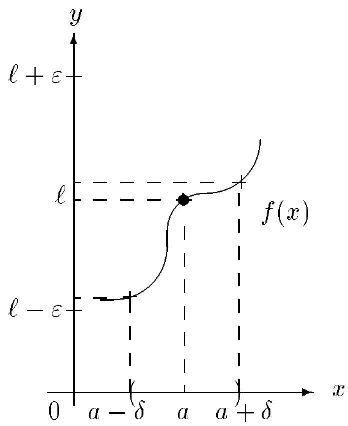
Por tanto, la noción de que $f(x)$ tiende a ℓ cuando x tiende a a significa que si queremos $|f(x)-\ell|<\varepsilon$, entonces debe existir $\delta>0$ tal que si $x\neq a$ y además $|x-a|<\delta$, entonces $|f(x)-\ell|<\varepsilon$.

Con las consideraciones anteriores, llegamos a la definición formal de límite.

Definición 2.1.1. Se dice que *el límite de $f(x)$ es ℓ cuando x tiende a a* y se denota por

$$\lim_{x\to a} f(x)=\ell$$

si dado cualquier número real positivo $\varepsilon>0$, existe un número real positivo $\delta>0$, el cual depende de la función f, del punto a y del número ε, tal que si $0<|x-a|<\delta$ entonces $|f(x)-\ell|<\varepsilon$.



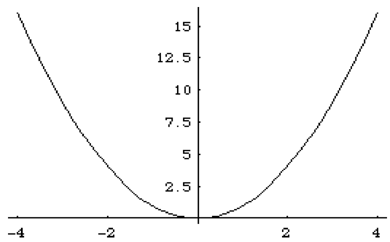
El límite también se denota de la siguiente forma:

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell.$$

Observación 2.1.2. No siempre existe el límite.

Por otro lado, notemos que la definición de límite no provee al mismo, sólo se aplica para verificar si un candidato a límite lo es en efecto o no. Es asunto nuestro el encontrar un candidato a límite por algún procedimiento independiente de la definición de límite.

Ejemplo 2.1.3. Sea $f(x) = x^2$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Calculemos $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$.



Un candidato a límite es 9 puesto que $f(-3) = (-3)^2 = 9$. Veamos que en efecto este es el límite.

Sea $\varepsilon > 0$. Queremos hallar un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - (-3)| = |x+3| < \delta$, entonces $|x^2 - 9| < \varepsilon$.

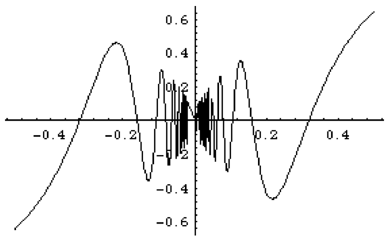
Ahora bien, tenemos que $|x^3 - 9| = |x+3||x-3|$. Tenemos ya el factor $|x+3|$ que queremos estimar y otro factor "sobrante" $|x-3|$. Este último debemos acotarlo. Con este fin, consideremos $\delta_1 = 1$. Si $|x+3| < 1$ entonces $|x| - 3 \leq |x+3| < 1$, por lo que $|x| < 4$. Por lo tanto, para esta condición dada por δ_1 tenemos $|x-3| \leq |x| + |3| < 7$. Es decir, si $|x+3| < 1$ entonces $|x-3| < 7$. Por lo tanto $|x^2 - 9| = |x+3||x-3| \leq 7|x+3|$. Si esta útima cantidad la hacemos menor a ε, es decir

$$|x^2 - 9| = |x+3||x-3| \leq 7|x+3| < \varepsilon,$$

entonces basta tener $|x+3| < \dfrac{\varepsilon}{7}$. Esto es, si definimos $\delta_2 := \dfrac{\varepsilon}{7}$ y $\delta := \min\left\{\delta_1 = 1, \delta_2 = \dfrac{\varepsilon}{7}\right\}$, entonces si $0 < |x+3| < \delta$ tenemos que $|x^2 - 9| < \varepsilon$. Por lo tanto $\boxed{\lim_{x\to -3} f(x) = 9.}$ □

Ejemplo 2.1.4. Sea $f(x) := \sqrt{|x|}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$. ¿Cuál es $\lim_{x\to 0} f(x)$?

El primer problema es encontrar, en caso de haberlo, un candidato a límite. Notemos que la función sen siempre está acotado entre -1 y 1 y por otro lado $\sqrt{|x|}$ se hace cercano a 0 cuando x se aproxima a 0. Entonces proponemos $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.



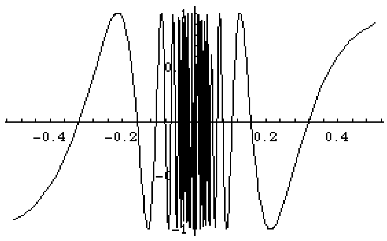
Sea $\varepsilon > 0$, queremos hallar $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - 0| = |x| < \delta$, entonces $|f(x) - 0| < \varepsilon$. Considemos:

$$|f(x) - 0| = \sqrt{|x|}\left|\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \leq \sqrt{|x|} < \varepsilon.$$

Para la validez de esta última desigualdad basta tener $|x| < \varepsilon^2$. Por lo tanto si $\delta = \epsilon^2$, obtenemos que $0 < |x - 0| = |x| < \delta$ implica que $|f(x) - 0| \leq \sqrt{|x|} < \sqrt{\delta} = \varepsilon$.

Por lo tanto $\boxed{\lim_{x\to 0} \sqrt{|x|}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = 0.}$

Ejemplo 2.1.5. Sea $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$. Al graficar vemos claramente que alrededor de 0 los valores de la funciones varían de -1 a 1. Motivados por esto, afirmamos que $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.



Para probar nuestra afirmación, supongamos lo contrario, es decir que el límite es ℓ, es decir, $\lim_{x\to 0} f(x) = \ell$. En este caso tendremos que dada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - 0| < \delta$, entonces $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Consideremos los puntos $x_n := \frac{1}{n\pi}$ con $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$f(x_n) = \operatorname{sen} \frac{1}{x_n} = \operatorname{sen} n\pi = 0 \quad \text{para toda} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ahora consideremos los puntos $y_n := \frac{1}{(2n + \frac{1}{2})}\pi$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$f(y_n) = \operatorname{sen} \frac{1}{y_n} = \operatorname{sen} (2n + \frac{1}{2})\pi = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1 \quad \text{para toda} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Notemos que la propiedad arquimideana nos implica que el conjunto de los números naturales no es acotado superiormente, pues dado cualquier número real M, tomando $a = 1$, por la propiedad arquimideana, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n = na = n \cdot 1 > M$. Esto lo aplicamos en nuestro ejemplo considerando un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n\pi} < \delta$ y que $\frac{1}{(2n + \frac{1}{2})\pi} < \delta$, lo cual es quivalente a $n > \frac{1}{n\delta}$ y a $2n + \frac{1}{2} > \frac{1}{\pi\delta}$, $n > \frac{\frac{1}{\pi\delta} - \frac{1}{2}}{2} = \frac{2 - \pi\delta}{4\pi\delta}$ respectivamente.

Lo anterior nos dice que $x_n = \frac{1}{n\pi} < \delta$ y que $y_n = \frac{1}{(2n + \frac{1}{2})} < \delta$ y se tiene $f(x_n) = 0$, $f(y_n) = 1$.

Sea $\varepsilon = \frac{1}{4}$. En ese caso deberíamos tener para el δ correspondiente que

$$|f(x_n) - \ell| = |\ell| < \frac{1}{4}$$

y

$$|f(y_n) - \ell| = |1 - \ell| < \frac{1}{4}$$

lo cual implica que

$$1 - |\ell| \leq |1 - \ell| < \frac{1}{4}$$

lo que a su vez implica que

$$|\ell| > 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Estas dos desigualdades nos llevan al absurdo:

$$\frac{3}{4} < |\ell| < \frac{1}{4}.$$

Por lo tanto $\boxed{\lim_{x \to 0} \left(\operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) \text{ no existe}}$.

Ejemplo 2.1.6. Sea $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ constante. Entonces tendremos que $\lim_{x \to a} f(x) = c$ pues dada cualquier $\varepsilon > 0$, para cualquier $\delta > 0$ tendremos que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.

Ejemplo 2.1.7. Sea $n \in \mathbb{N}$, $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^n$. Dejamos como ejercicio, usando la definición de ε y δ que para cualquier $a \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\lim_{x \to a} f(x) = a^n = f(a).$$

Más adelante probaremos lo mismo usando las propiedades de los límites.

2.2 Propiedades de los límites

El Ejemplo 2.1.5 nos indica que si tenemos al menos dos diferentes valores a los que se aproxima la función cuando x se aproxima a a, entonces el límite no existe. Parafraseando lo anterior, el mencionado ejemplo nos sugiere que el límite, en caso de existir, es único. Vemos a continuación que esto es así en efecto.

Teorema 2.2.1. *El límite $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$, en caso de existir, es único.*

Demostración. Supongamos que tuviesemos al menos dos diferentes límites: $\lim_{x \to a} f(x) = \ell_1$ y $\lim_{x \to a} f(x) = \ell_2$, $\ell_1 \neq \ell_2$. Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - \ell_1| < \varepsilon$ y $|f(x) - \ell_2| < \varepsilon$. Por lo tanto, para cualquier $\varepsilon > 0$ tenemos:

$$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - f(x) + f(x) - \ell_2| \leq |\ell_1 - f(x)| + |f(x) - \ell_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Puesto que esto es válido para toda ε necesariamente tenemos que $\ell_1 = \ell_2$ (pues en caso contrario, $\ell_1 \neq \ell_2$ implica que $t := |\ell_1 - \ell_2| > 0$. Sea $\varepsilon := \frac{t}{3}$, entonces $t = |\ell_1 - \ell_2| < \frac{2t}{3}$ lo cual implica que $1 < \frac{2}{3}$ lo cual es absurdo). $\square$

Teorema 2.2.2. *Sean $f, g \colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell_1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \ell_2$. Entonces:*

(i) $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = \ell_1 + \ell_2$.

(ii) $\lim_{x\to a}(-f(x) = -\lim_{x\to a} f(x) = -\ell_1$.

(iii) $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \big(\lim_{x\to a} f(x)\big)\cdot\big(\lim_{x\to a} g(x)\big) = \ell_1\ell_2$.

(iv) $\lim_{x\to a}\Big(\dfrac{f(x)}{g(x)}\Big) = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$ *siempre y cuando* $\ell_2 \neq 0$.

Demostración. Nada más daremos la demostración de (iii) como muestra del procedimiento a seguir.

Sea $\varepsilon > 0$, entonces:

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - \ell_1\ell_2| &= |f(x)g(x) - \ell_1 g(x) + \ell_1 g(x) - \ell_1\ell_2| \leq\\ &\leq |f(x)g(x) - \ell_1 g(x)| + |\ell_1 g(x) - \ell_1\ell_2| =\\ &= |g(x)||f(x) - \ell_1| + |\ell_1||g(x) - \ell_2|.\end{aligned}$$

Ahora si tomamos $\varepsilon_1 = 1$ para $g(x)$, tendremos la existencia de un $\delta_1 > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta_1$, entonces

$$|g(x)| - |\ell_2| \leq |g(x) - \ell_2| < 1 \quad \text{lo cual implica} \quad |g(x)| < 1 + |\ell_2|.$$

Entonces para $\varepsilon_1 = 1$ tenemos

$$|f(x)g(x) - \ell_1\ell_2| \leq (1 + |\ell_2|)|f(x) - \ell_1| + |\ell_1||g(x) - \ell_2|.$$

Para hacer la última expresión menor a ε, basta hacer cada sumando menor a $\dfrac{\varepsilon}{2}$. Por tanto considermos $\delta_2 > 0$ y $\delta_3 > 0$ tales que si $0 < |x - a| < \delta_2$ entonces $|f(x) - \ell_1| < \dfrac{\varepsilon}{2(1 + |\ell_2|)}$ y si $0 < |x - a| < \delta_3$ entonces $|g(x) - \ell_2| < \dfrac{\varepsilon}{2(1 + |\ell_1|)}$.

Finalmente, para $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ tenemos que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces:

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - \ell_1\ell_2| &\leq (1 + |\ell_2|)|f(x) - \ell_1| + |\ell_1||g(x) - \ell_2| <\\ &< (1 + |\ell_2|)\frac{\varepsilon}{2(1 + |\ell_2|)} + |\ell_1|\frac{\varepsilon}{2(1 + |\ell_2|)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\boxed{\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \ell_1\ell_2}$. □

Como consecuencia de lo anterior, obtenemos varios resultados interesantes, algunos de los cuales presentamos como ejemplos.

Corolario 2.2.3. *Se tiene que* $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ *para* $n \in \mathbb{Z}$ *y* $a \in \mathbb{R}$ *con* $a \neq 0$ *en el caso* $n \leq 0$.

Demostración. Se tiene $\lim_{x\to a} x = a$. Por lo tanto, para $n > 0$, se tiene que $\lim_{x\to a} x^n = \lim_{x\to a}(\underbrace{x\cdots x}_{n}) = \underbrace{a\cdots a}_{n} = a^n$.

Para $n < 0$, se tiene que

$$\lim_{x\to a} x^n = \lim_{x\to a} \frac{1}{x^{-n}} = \frac{1}{a^{-n}} = a^n, \quad a \neq 0.$$

Finalmente, para $n = 0$, $a \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} x^0 = \lim\limits_{x\to a} 1 = 1 = a^0$. □

Corolario 2.2.4. *Si* $f(x) = \alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ *es un polinomio, entonces* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) = \alpha_n a^n + \cdots \alpha_1 a + \alpha_0$. □

Ejemplo 2.2.5. Se tiene $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 + 7x^5}{x^2+1} = \dfrac{1+7}{1+1} = \dfrac{8}{2} = 4.$

Ejemplo 2.2.6. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. El límite $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h}$ no puede ser calculado por las propiedades que hemos probado puesto que el denominador se anula en $h = 0$. Procedemos de la siguiente forma:

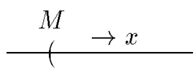
$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} &= \frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} = \\
&= \frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}.
\end{aligned}$$

No es difícil probar por medio de la definición que $\lim\limits_{h\to 0} \sqrt{a+h} = \sqrt{a}$, por lo tanto

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{a}}}.$$

A continuación planteamos una pregunta natural. ¿Qué significa $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ o $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$? En seguida damos la definición de estos y otros conceptos similares. La motivación del por qué de estas definiciones son exactamente iguales que en el caso finito.

Definición 2.2.7. Decimos que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$ si dada $\varepsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{R}$ tal que si $x > M$, entonces $|f(x) - \ell| < \epsilon$.



Similarmente, se dice que $\lim\limits_{x\to-\infty} = \ell$ si dada $\varepsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{R}$ tal que si $x < M$ entonces $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Ejercicio 2.2.8. Dar la definición de los siguientes conceptos:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty, \\
&\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty,
\end{aligned}$$

donde $a \in \mathbb{R}$.

Observación 2.2.9. Todos los resultados y propiedades que se cumplen para los límites finitos, se siguen cumpliendo para los diversos límites infinitos. Dejamos la demostración de estos hechos al lector.

Ejemplo 2.2.10. Verifiquemos que $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$. Estamos en el caso $f(x) = \frac{1}{x}$, $\ell = 0$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces tenemos:

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{|x|} < \varepsilon \iff |x| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Por lo tanto, dada $\varepsilon > 0$, sea $M := \frac{1}{\varepsilon}$, entonces si $x > M$ se tiene $f(x) = \frac{1}{x} < \varepsilon$. Por lo tanto $\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0}$.

Similarmente se tiene $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Ejemplo 2.2.11. Calculemos $\lim_{x \to \infty} \frac{7x^2 - 2}{4x^2 + 7}$ para lo cual usaremos las propiedades de los límites y el Ejemplo 2.2.10. Se tiene, dividiendo el numerador y el denominador entre x^2 que:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{7x^2 - 2}{4x^2 + 7} = \lim_{x \to \infty} \frac{7 - \frac{2}{x^2}}{4 + \frac{7}{x^2}} = \frac{7 - 0}{4 + 0} = \frac{7}{4}.$$

Ejemplo 2.2.12. Queremos calcular $\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} x$. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$. Tomemos $x_n := n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = \operatorname{sen} n\pi = 0$ y $y_n := \left(2n\frac{1}{2}\right)\pi$, $n \in \mathbb{N}$, $f(y_n) = \operatorname{sen}\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$.

Si $\lim_{x \to \infty} f(x)$ existiese, digamos $\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell$, entonces tomando $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Ahora bien, para cualquier $M \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > M$ y $y_n > M$. Ahora bien para $\varepsilon = \frac{1}{4}$ existiría un número real M tal que si $x > M$, entonces $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. En particular tendríamos que:

$$|f(x_n) - \ell| < \frac{1}{4} = \varepsilon, \quad |f(y_n) - \ell| = |1 - \ell| < \frac{1}{4} = \varepsilon \quad \text{de donde} \quad |\ell| > \frac{3}{4}.$$

Este absurdo prueba que $\boxed{\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} x \text{ no existe}}$.

Notemos la similitud de este ejemplo con el Ejemplo 2.1.5. También hacemos notar que podríamos haber resuelto este ejercicio usando el hecho de que el límite, en caso de existir, es único.

Ejemplo 2.2.13.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^3+ax+b}-x\sqrt{x}) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^3+ax+b}-x\sqrt{x})(\sqrt{x^3+ax+b}+x\sqrt{x})}{(\sqrt{x^3+ax+b}+x\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+ax+b-x^3}{(\sqrt{x^3+ax+b}+x\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{a}{\sqrt{x}}+\dfrac{b}{x\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{b}{x^3}}+1} = \frac{0+0}{1+1} = 0.$$

Ejemplo 2.2.14.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^3+ax^2+b}-x\sqrt{x}) = \lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+b}{(\sqrt{x^3+ax^2+b}+x\sqrt{x})} =$$

$$= \frac{a\sqrt{x}+\dfrac{b}{x\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^3}}+1} = \begin{cases} \infty \text{ si } a>0 \\ -\infty \text{ si } a<0 \\ 0 \text{ si } a=0 \end{cases}.$$

Ejemplo 2.2.15.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^3+ax\sqrt{x}+b}-x\sqrt{x}) = \frac{a}{2}.$$

2.3 Ejercicios

Ejercicio 2.3.1. Sea $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$, $a<x_0<b$. Supongamos que existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$. Probar que $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|\ell|$.

Ejercicio 2.3.2. Hallar los siguientes límites:

a).- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$.
b).- $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$.
c).- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$.
d).- $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-8}{x-2}$.
e).- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$ donde $a>0$.

Ejercicio 2.3.3. Demostrar que si $\lim_{x\to 0} f(x)/x = \ell$ y $b \neq 0$, entonces $\lim_{x\to 0} f(bx)/x = b\ell$.

Ejercicio 2.3.4. Demostrar que $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x^3)$.

Ejercicio 2.3.5. Dar un ejemplo de que exista $\lim_{x\to 0} f(x^2)$, pero no $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Ejercicio 2.3.6. Demostrar que $\lim_{x\to\infty} \left(a_n x^n + \cdots + a_0\right)/\left(b_m x^m + \cdots + b_0\right)$ existe si y sólo si $m \geq n$. ¿Cuál es el límite cuando $m = n$? ¿Y cuando $m > n$?

Ejercicio 2.3.7. Demostrar que $\lim_{x\to 3} 1/(x-3)^2 = \infty$.

Ejercicio 2.3.8. Demostrar que $\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$ si y sólo si $\lim_{x\to\infty} f(1/x) = \infty$.

Ejercicio 2.3.9. Hallar los siguientes límites:

a).- $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.
b).- $\lim_{x\to \pi+} \dfrac{x-4}{\operatorname{sen} x}$.
c).- $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{a+x}{1-ax} - \sqrt{x}\right)$.
d).- $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+a}-\sqrt{x^2-a}}{2x}$.
e).- $\lim_{x\to -\infty} \left(1 + \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}\right)$.
f).- $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$.
g).- $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x} + \operatorname{sen} x) = \infty$.

Ejercicio 2.3.10. Sea $[x]$ la función parte entera de x. Demostrar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{[x]} = 1.$$

3

Funciones continuas

Intuitivamente, una función continua de variable real es aquella que al trazar su gráfica, no separamos la pluma del papel. En este capítulo formalizaremos esta idea intuitiva.

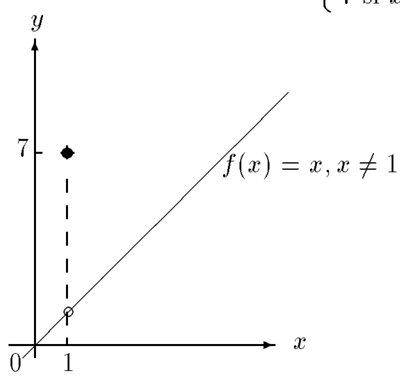
3.1 Continuidad y límites laterales

De momento nos confomaremos con dar la definición de continuidad en puntos que son “interiores” a un conjunto.

Definición 3.1.1. Sean $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de variable real, $a \in A$ tal que existe $\mu > 0$ con $(a-\mu, a+\mu) \subseteq A$. Entonces f se dice *continua en a* si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Implícitamente estamos suponiendo que el límite de la función existe en a, esto es, si el límite no existe la función no es continua.

Ejemplo 3.1.2. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) \begin{cases} x \text{ si } x \neq 1 \\ 7 \text{ si } x = 1 \end{cases}$.



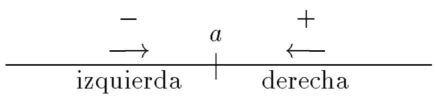
Entonces $\lim_{x\to 1} f(x) = 1 \neq 7 = f(1)$ por lo que la función f no es continua en el punto $x = 1$.

Ejemplo 3.1.3. Si $f(x)$, $g(x)$ son polinomios y $g(a) \neq 0$, entonces $\dfrac{f}{g}$ es continua en a pues $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{f(a)}{g(a)} = \left(\dfrac{f}{g}\right)(a)$.

Sin presentar la demostración, al menos de momento, usaremos que las siguientes funciones son continuas: $\exp(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$, $\cos x$, $x \in \mathbb{R}$, $\ln x$, $x > 0$, $\tan x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{x = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi\right\}$.

Definimos dos nuevos clases de límites. Estos son los que en lugar de aproximarnos por cualquier parte al punto a sólo lo hacemos por un lado. Estos límites reciben los nombres de *límite por la izquierda* y *límite por la derecha*. Estos son los *límites laterales*. Más precisamente:

Definición 3.1.4. Se define el *límite por la derecha* de la función $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, denotado por $\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$ si para cada número positivo $\varepsilon > 0$, existe otro número positivo $\delta > 0$ tal que si $0 < x - a < \delta$, o equivalentemente, $a < x < a + \delta$, entonces $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.



Similarmente, definimos el *límite por la izquierda* de f en a, denotado por $\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell$ si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < a - x < \delta$ o, equivalentemente, $a - \delta < x < a$, entonces $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Ejemplo 3.1.5. Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Entonces:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1,$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{-x} = \lim_{x\to 0^+} -1 = -1.$$

Es fácil verificar el siguiente resultado.

Proposición 3.1.6. *Se tiene que si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ (en particular existe), entonces $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)$ exiten y ambos son iguales a ℓ.*

Recíprocamente, si ambos límites laterales $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)$ existen y son iguales, digamos a ℓ, entonces $\lim_{x\to a} f(x)$ existe y es igual a ℓ. □

Definición 3.1.7. Decimos que una función $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *continua en* A si f es continua en cada punto $a \in A$.

La siguiente proposición es válida para funciones que globalmente son continuas. No presentamos su demostración.

Proposición 3.1.8. *Si $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es 1-1 y continua, entonces $f^{-1}\colon B \to \mathbb{R}$ donde $B = f(A)$ es también continua.* $\square$

Proposición 3.1.9. *Si $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $a \in A$, $f(a) := b \in B$ y $g\colon B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $b = f(a)$, entonces la composición $g \circ f\colon A \to \mathbb{R}$ es continua en a.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces por continuidad de g en b, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |y-b| < \delta$ entonces $|g(y)-g(b)| < \varepsilon$. Ahora bien, por la continuidad de f en a, existe $\mu > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \mu$ entonces $|f(x)-f(a)| = |f(x)-b| < \delta$. En particular tenemos $|g(f(x))-g(b)| = |g(f(x))-g(f(a))| < \varepsilon$. $\square$

3.2 El axioma del supremo

Una propiedad fundamental que distingue a $\mathbb{R}$ de otros sistemas algebraicos, como $\mathbb{Q}$ por ejemplo, de los irracionales, etc, es el siguiente axioma.

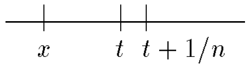
Axioma 3.2.1 (Axioma del supremo). Sea $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}$. Si A es acotado superiormente, entonces <u>existe</u> $\sup A \in \mathbb{R}$.

Equivalentemente, si $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}$ y A es acotado inferiormente, entonces existe $\inf A \in \mathbb{R}$.

Como mencionamos al principio, esta propiedad distingue a los números reales de los demás. El siguiente ejemplo nos muestra por qué los números racionales no cumplen el axioma del supremo.

Ejemplo 3.2.2. En $\mathbb{Q}$ el axioma del supremo no se cumple. Por ejemplo consideremos el conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$. Supongamos que existe $t = \sup A \in \mathbb{Q}$.

$$(\sup A = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q})$$



Tenemos que $x \leq t$ para toda $x \in A$, y para toda $\gamma > 0$, existe $x \in A$ tal que $t-\gamma < x$. Elevando al cuadrado, tenemos que $t^2 < x^2+2\gamma t+\gamma^2 < 2+2\gamma t+\gamma^2$. Claramente esto implica que $t^2 \leq 2$.

Ahora bien, puesto que no existe $s \in \mathbb{Q}$ tal que $s^2 = 2$ (ver Ejemplo 1.1.7), entonces $t^2 < 2$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y consideremos $\left(t+\dfrac{1}{n}\right)^2 = t^2+\dfrac{2t}{n}+\dfrac{1}{n^2}$. Escojamos

n suficientemente grande tal que $\dfrac{2t}{n} + \dfrac{1}{n^2} < 2 - t^2$, es decir, $\left(t + \dfrac{1}{n}\right)^2 < 2$. Notemos que esto siempre es posible pues

$$\frac{2t}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 - t^2 \iff n^2 > \frac{2nt+1}{2-t^2} \iff n > \frac{2t+1/n}{2-t^2}.$$

Puesto que $\dfrac{2t+1}{2-t^2} > \dfrac{2t+1/n}{2-t^2}$, basta tomar $n > \dfrac{2t+1}{2-t^2}$ para tener $\dfrac{2t}{n} + \dfrac{1}{n^2} < 2 - t^2$.

Para este número natural n tenemos que $\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2 < 2$ por lo que $t+\dfrac{1}{n} \in A$ por ser un número racional. Esto contradice que t es cota superior de A pues $t + \dfrac{1}{n} > t$.

Similarmente el conjunto de los números irracionales $\mathbb{I}$ tampoco satisfacen el axioma del supremo. Por ejemplo, sea $B = \{x \in \mathbb{I} \mid x < 0\}$ (se tendría que en caso de existir el supremo este debe ser 0 pero $0 \notin \mathbb{I}$).

3.3 Los teoremas fuertes de continuidad

Lo visto en la Sección 3.2 fundamentalmente nos dice que los números reales no tienen "huecos" u "hoyos", a diferencia de los números racionales y de los números irracionales que están llenos de huecos (ver el Teorema 1.1.9).

El axioma del supremo tiene como consecuencia el siguiente resultado de capital importancia para funciones continuas en una variable. No presentamos su demostración.

Teorema 3.3.1. *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Entonces la imagen de f es un intervalo cerrado finito, es decir:*

$$f([a,b]) = [c,d]$$

donde $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$. □

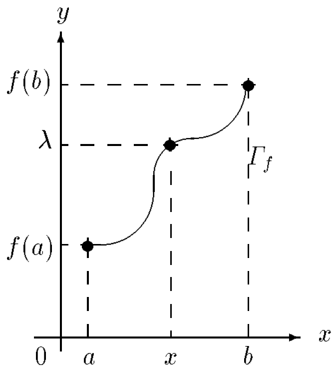
Las consecuencias de este resultado son muchas. Veamos algunas.

Teorema 3.3.2. *Se $I \subseteq \mathbb{R}$ es cualquier intervalo (finito o no, abierto o cerrado, etc.), entonces $f(I)$ es un intervalo.* □

Teorema 3.3.3 (Teorema del Valor Intermedio). *Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua y $f(a) < \lambda < f(b)$, entonces existe algún $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = \lambda$.*

Similarmente si $f(b) < \lambda < f(a)$.

Demostración. Por el Teorema 3.3.1, se tiene que $f([a,b]) = [c,d]$. Por lo tanto $c \leq f(a) < \lambda < f(b) \leq d$. Por lo tanto $\lambda \in [c,d] = f([a,b])$. Se sigue que existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = \lambda$. □.



Teorema 3.3.4. *Si f es una función continua en $[a,b]$, entonces f está acotada superior e inferiormente en $[a,b]$.*

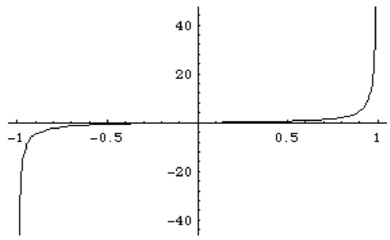
Demostración. Se tiene que $c \leq f(x) \leq d$ para toda $x \in [a,b]$. $\square$

El Teorema 3.3.4 no se cumple para otro tipo de intervalos, en particular no se cumple para un intervalo abierto.

Ejemplo 3.3.5. Sea $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$. Se tiene que f es continua en $(-1,1)$ pero

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \infty.$$

Por tanto $f((-1,1))$ no es acotada.



Teorema 3.3.6. *Todo número real positivo tiene una raíz cuadrada. Es decir, si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, entonces existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 = \alpha$.*

Demostración. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Entonces f es continua en todos los reales y se tiene que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Por lo tanto existe $b > 0$ tal que $f(b) > \alpha$. Consideremos ahora la función f restringida a $[0,b]$, esto es, sea $f_1\colon [0,b] \to \mathbb{R}$. Entonces

$$0 = f(0) < \alpha < b^2 = f(b).$$

Por lo tanto existe $x \in [0,b]$ tal que $f_1(x) = f(x) = x^2 = \alpha$. $\square$

Teorema 3.3.7. *Todo polinomio con coeficientes reales y de grado impar tiene una raíz en $\mathbb{R}$. Es decir, si $n \in \mathbb{N}$ es impar y $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, entonces existe $x \in \mathbb{R}$ tal que*

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0.$$

Demostración. Notemos que si $f(x) := a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ y $g(x) := a_n^{-1} f(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + x^n$ con $b_i = a_n^{-1} a_i$ entonces tenemos que $g(x) = 0$ si y sólo si $f(x)$.

Ahora bien, tenemos: $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ y $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$. Por el Teorema del Valor Intermedio, tenemos que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 0$. $\square$

3.4 Ejercicios

Ejercicio 3.4.1. ¿Existe alguna forma de definir la función $\dfrac{|x|}{x}$ en $x = 0$ de tal forma que esta función sea continua en 0?

Ejercicio 3.4.2. Probar que si la función f es continua, entonces $|f|$ es continua.

Ejercicio 3.4.3. Dar un ejemplo de una función que no sea continua en ningún punto, pero que $|f|$ sea continua en todo punto.

Ejercicio 3.4.4. Sea $a \in \mathbb{R}$. Hallar una función que sea continua en a, pero no lo sea en ningún otro punto.

Ejercicio 3.4.5. Supóngase que la función f satisface $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo x y y y que f es continua en 0. Demostrar que f es continua en todo $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 3.4.6. Sea f una función que es continua en x_0 y que $f(x_0) \neq 0$. Probar que existe un $r > 0$ tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ y que de hecho $f(x)$ tiene el mismo signo que $f(x_0)$ en todo $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$.

Ejercicio 3.4.7. Para cada una de las siguientes funciones, decidir cuáles están acotadas superior o inferiormente, en el intervalo indicado, y cuáles de ellas alcanzan sus valores máximo y/o mínimo.

a).- $f(x) = x^2$ en $(-1, 1)$.
b).- $f(x) = x^2$ en $\mathbb{R}$.
c).- $f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ irracional} \\ 1/q & x = p/q \text{ fracción irreducible} \end{cases}$ en [0,1].
d).- $f(x) = [x]$ en $[0, a]$, $a > 0$.
e).- $f(x) = \operatorname{sen}^2(\cos x + \sqrt{1 + a^2})$ en $[0, a^3]$.

Ejercicio 3.4.8. Para cada uno de los siguientes polinomios f hallar un entero n tal que f tenga una raíz entre n y $n+1$.

a).- $f(x) = x^3 - x + 3$.
b).- $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$.
c).- $f(x) = x^5 + x + 1$.
d).- $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$.

Ejercicio 3.4.9. Probar que existe un número x tal que

a).- $x^{179} + \dfrac{163}{1 + x^2 + \operatorname{sen}^2 x} = 119$.
b).- $\operatorname{sen} x = x - 1$.

Ejercicio 3.4.10. Supongamos que f es continua en $[a, b]$ y que $f(x)$ es racional para toda $x \in [a, b]$. ¿Que se puede decir acerca de f?

Ejercicio 3.4.11. Supóngase que f y g son funciones continuas, que $f^2 = g^2$ y que $f(x) \neq 0$ para toda x. Probar que necesariamente o bien $f(x) = g(x)$ o bien $f(x) = -g(x)$ para toda x.

Ejercicio 3.4.12. Supongamos que f y g son continuas en $[a, b]$ y que $f(a) < g(a)$ y $f(b) > g(b)$. Probar que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$.

Ejercicio 3.4.13. Sea $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ una función continua. Probar que existe $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = x$.

4

Sucesiones

4.1 Límite de una sucesión

Definición 4.1.1. Una sucesión es una función $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ y se denota $\varphi(n) := a_n \in \mathbb{R}$ y $\varphi(\mathbb{N}) = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. En algunas ocasiones ponemos $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Ejemplo 4.1.2. Sea $a_n := \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \cdots$. Esto es, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots\right\}$.

Ejemplo 4.1.3. Sea $a_n := e^{(n-3)^2}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$. Se tiene $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \{e^9, e^4, e^1 = e, e^0 = 1, e^1 = e, \ldots\}$.

La noción de límite de una sucesión es totalmente análogo al concepto del límite de una función cuando $x \to \infty$.

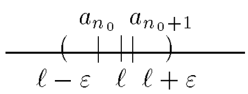
Definición 4.1.4. Se dice que una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\ell \in \mathbb{R}$ y se denota por:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$$

o

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell,$$

si dado $\varepsilon > 0$,existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq n_0$ se tiene que $|a_n - \ell| < \varepsilon$.



Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge, se dice que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *diverge*.

Ejemplo 4.1.5. Afirmamos que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Entonces tendremos que $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ para $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Sea $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Entonces si $n \geq n_0$, se tiene que $n > \frac{1}{\varepsilon}$ y por lo tanto $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

Se debe comparar este ejemplo con el cálculo del límite de $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Ejemplo 4.1.6. Sea $0 < r < 1$. Entonces $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Entonces $|r^n - 0| = r^n < \varepsilon$ si y sólo si $\ln r^n = n \ln r < \ln \varepsilon$. Puesto que $r < 1$ se tiene que $\ln r < 0$ y por lo tanto la desigualdad anterior es equivalente a $n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln r}$.

Es decir, para $n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln r}$ se tiene que $|r^n - 0| = r^n < \varepsilon$. Por lo tanto $\boxed{\lim_{n\to\infty} r^n = 0}$.

En este ejemplo hemos usado muchas de las propiedades de la función logaritmo, la cual no hemos introducido de manera formal. Un poco más adelante presentaremos la demostración de este mismo ejercicio sin usar para nada la función logaritmo (ver Ejemplo 4.2.7).

Ejemplo 4.1.7. Afirmamos que $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$. En efecto se tiene:

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Ejemplo 4.1.8. Sea $a_n := (-1)^n$. Veamos que $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ no existe. De hecho se tiene $(-1)^n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ es par} \\ -1 \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$.

Supongamos que $\lim_{n\to\infty} (1)^n = a$. Si $\varepsilon = \frac{1}{2}$, entonces existe n_0 tal que si $n \geq n_0$, se tiene $|(-1)^n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}$. Sea $n \geq n_0$. Si n es par, entonces se tiene $|1 - a| < \frac{1}{2}$. Si n es impar se tiene $|-1-a| < \varepsilon = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, de esta última desigualdad obtenemos

$$|-1-a| = |-2+1-a|$$

de donde, por la desigualdad del triángulo se tiene

$$2 - |1-a| \leq |-2+1-a| = |-1-a| < \varepsilon = \frac{1}{2},$$

de donde obtenemos, junto con la desigualdad anterior

$$|1-a| > 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

lo cual es absurdo. Por lo tanto $\boxed{\lim_{n\to\infty} (-1)^n \text{ no existe}}$.

Ejemplo 4.1.9. Se tiene que $\lim_{n\to\infty} n$ no existe pues para cualquier $a \in \mathbb{R}$ y cualquier $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq n_0$ se tiene $|n-a| \geq n - |a| > \varepsilon$.

Observación 4.1.10. Pondremos $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (respestivamente $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$), si para cualquier $M \in \mathbb{R}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq n_0$ se tiene $a_n > M$ (respectivamente $a_n < M$).

Esta es solo una notación pues en cualquiera de los dos caso, la sucesión es divergente, sólo que con una divergencia muy especial.

Definición 4.1.11. Una sucesión se llama *acotada* si existe $M > 0$ tal que $|a_n| < M$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 4.1.12. La sucesión $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ <u>no</u> es acotada pues para cualquier $M > 0$ tenemos que $n^2 > M$ para $n > \sqrt{M}$.

Ejemplo 4.1.13. La sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por $a_n := (-1)^n$ es acotada pues $|(-1)^n| = 1 < 2$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 4.1.14. Si la sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge, $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$, entonces $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es acotada pues si damos $\varepsilon = 1$, existe n_0 tal que para toda $n \geq n_0$ entonces $|a_n - \ell| < 1$. Por lo tanto $|a_n| - |\ell| \leq |a_n - \ell| < 1$ lo cual implica que $|a_n| < 1 + \ell$ para toda $n \geq n_0$. Por lo tanto si definimos $M := \sup\{|a_1|, \ldots, |a_{n_0-1}|, |\ell|+1\}$ tendremos que $|a_n| \leq M$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Definición 4.1.15. Dada una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, una *subsucesión* de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión extraída de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, es decir es otra sucesión $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que para toda $k \in \mathbb{N}$, existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $b_k = a_{n_k}$ y $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$.

Observación 4.1.16. Si una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a a, entonces toda subsucesión de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a a.

Recíprocamente, si <u>toda</u> subsucesión de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge al mismo elemento a, entonces la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converga a a.

Por ejemplo, en el Ejemplo 4.1.8, la subsucesión de los índices pares $a_{2n} = (-1)^{2n} = 1$ converge a 1 y la de los índices impares $a_{2n-1} = (-1)^{2n-1} = -1$ converge a -1. Puesto que estos límites son diferentes, la sucesión $a_n = (-1)^n$ no converge.

4.2 Propiedades de los límites de sucesiones

Las propiedades que tenemos para las funciones, siguen siendo válidas para las sucesiones.

Teorema 4.2.1. *Sean* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *dos sucesiones tales que* $\lim\limits_{n\to\infty} = s$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = t$. *entonces:*

(1) *El límite de una sucesión, en caso de existir, es único.*
(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = s + t$.
(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = s - t$.
(4) *Sea* $c \in \mathbb{R}$ *fijo. Entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = cs$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + c) = s + c$.
(5) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = st$.
(6) *Si* $s \neq 0$ *y* $a_n \neq 0$, *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{s}$.
(7) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |\lim\limits_{n\to\infty} a_n| = |s|$.

Demostración. Todas las afirmaciones son totalmente análogas al caso de funciones y sólo presentamos la última.

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $n_0 \in maN$ tal que para toda $n \geq n_0$ se tiene que $|a_n - s| < \varepsilon$ por lo que

$$||a_n| - |s|| \leq |a_n - s| < \varepsilon$$

para toda $n \geq n_0$ de donde se sigue el resultado. □

Corolario 4.2.2. *Si* $t \neq 0$ *y* $b_n \neq 0$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$ *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{s}{t}. \qquad \square$$

Una de las propiedades más útiles de las sucesiones desde el punto de vista práctico es la siguiente: Si $a_n \leq b_n$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ en caso de que los límites existan.

En efecto, puesto que $b_n - a_n \geq 0$, entonces si α es el límite de $c_n := b_n - a_n$, veamos que $\alpha \geq 0$. De otra manera, si $\alpha < 0$, entonces si $\varepsilon := -\frac{\alpha}{2}$

$$c_n - \alpha = b_n - a_n - \alpha \leq |c_n - \alpha| < -\frac{\alpha}{2}$$

de donde $b_n - a_n < \frac{\alpha}{2} < 0$ lo cual es absurdo.

Por lo tanto $t - s = \alpha \geq 0$ de donde se sigue el resultado.

Como consecuencia de lo anterior obtenemos:

Teorema 4.2.3 (Teorema del "sandwich"). *Sean* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *y* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *tres sucesiones tales que* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *para toda* n *y* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = s$. *Entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ *existe y* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = s$.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que para toda $n \geq n_0$ se tiene:

$$c_n - s < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad -\varepsilon < a_n - s.$$

Entonces para toda $n \geq n_0$ se tiene

$$-\varepsilon < a_n - s \leq b_n - s \leq c_n - s < \varepsilon.$$

Por lo tanto para toda $n \geq n_0$ se tiene $|b_n - s| < \varepsilon$ y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} b = s$.
□

Ejemplo 4.2.4. Se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n^3 - 4n^2 - 2n + 4}{18n^3 + 4n - 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{7 - 4(\frac{1}{n}) - 2(\frac{1}{n})^2 + 4(\frac{1}{n})^3}{18 + 4(\frac{1}{4})^2 - 2(\frac{1}{n})^3} =$$

$$= \frac{7 - 4(0) - 2(0)^2 + 4(0)^3}{18 + 4(0)^2 - 2(0)^3} = \boxed{\frac{7}{18}}.$$

Ejemplo 4.2.5. Se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 4n + 2}{\sqrt{3}n + 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n - 4 + \frac{2}{n}}{\sqrt{3} + \frac{5}{n}} = \boxed{\infty}.$$

Ejemplo 4.2.6. Se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{18n^2 + 14n + 2}{n^3 + 7n^2 - 4n - 20,000} = \lim_{n\to\infty} \frac{18(\frac{1}{n}) + 14(\frac{1}{n})^2 + 2(\frac{1}{n})^3}{1 + 7(\frac{1}{n}) - 4(\frac{1}{n})^2 - 20,000(\frac{1}{n})^3} =$$

$$= \frac{18(0) + 14(0)^2 + 2(0)^3}{1 + 7(0) - 4(0)^2 - 20,000(0)^3} = \boxed{0}.$$

Ejemplo 4.2.7. Sea $r > 1$, $r = 1 + s$ con $s > 0$. Entonces, usando el binomio de Newton (Ejercicio 1.6.3), tendremos que

$$r^n = (1+s)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s^k \geq 1 + ns.$$

Ahora bien, $\lim_{n\to\infty} (1 + ns) = \infty$ lo cual implica $\boxed{\lim_{n\to\infty} r^n = \infty \text{ para } r > 1}$.

Ahora, consideremos $0 < r < 1$ lo cual implica que $(\frac{1}{r}) > 1$. Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{r})^n = \infty = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{r^n}$.

Esto es, para toda $M > 0$ existe n_0 tal que para toda $n \geq n_0$ se tiene $(\frac{1}{r})^n > M$. Consideremos $\varepsilon > 0$ arbitrario y sea $M = \frac{1}{\varepsilon}$. Por tanto

$$\frac{1}{r^n} > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{para toda} \quad n \geq n_0.$$

Equivalentemente

$$r^n = |r^n - 0| < \varepsilon \quad \text{para toda} \quad n \geq n_0.$$

Por lo tanto $\boxed{\lim_{n\to\infty} r^n = 0 \text{ para } 0 < r < 1}$.

Notemos que esta es otra demostración del Ejemplo 4.1.6 sin usar la función logaritmo.

Ejemplo 4.2.8. Sea $a > 0$ arbitrario. Calculemos $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$.

Primero analicemos la sucesión $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$. Sea $a_n := \sqrt[n]{n}$. Entonces para $n > 1$, $a_n^n = n > 1$ lo cual implica que $a_n > 1$. Escribamos $a_n = 1 + x_n$ con $x_n > 0$. Entonces

$$n = a_n^n = (1 + x_n)^n \geq 1 + nx_n,$$

por lo que $x_n \leq \frac{n-1}{n} < 1$, esto es, $\boxed{0 < x_n < 1}$.

Más aún, por el Binomio de Newton, tenemos para $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} n = a_n^n = (1 + x_n)^n &= 1 + nx_n + \frac{n(n-1)}{2}x_n^2 + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} x_n^k \geq \\ &\geq 1 + nx_n + \frac{n(n-1)}{2}x_n^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\frac{n-1}{n} \geq x_n\Big(1 + \frac{n-1}{2}x_n\Big)$. Dividiendo entre $n-1$ obtenemos que

$$\frac{1}{n} \geq \frac{x_n}{n-1} + \frac{x_n}{2} > 0.$$

Ahora bien puesto que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n-1} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$, se sigue del Teorema del Sandwich que $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{2} = 0$ lo cual implica que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. (Alternativamente, $n = a_n^n \geq \frac{n(n-1)}{2}x_n^2 > 0$. Por lo tanto $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} \geq x_n > 0$ y puesto que $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$ se sigue que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$).

Se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (1 + x_n) = 1.$$

Hemos obtenido que $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1}$.

Ahora sea $a > 0$ arbitrario fijo. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq n_0$ se tiene que

$$\frac{1}{n} < a < n \quad \text{por lo que} \quad \sqrt[n]{\frac{1}{n}} < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}.$$

Finalmente, puesto que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, se sigue que

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1}. \qquad \square$$

Ejemplo 4.2.9. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión tal que $a_n > 0$ y supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$. Por lo tanto, para $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq n_0$ se tiene $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - \ell\right| < \varepsilon$. Por lo tanto

$$-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - \ell < \varepsilon \Rightarrow (\ell-\varepsilon)a_n < a_{n+1} < (\ell+\varepsilon)a_n \quad \text{para} \quad n = n_0, n_0+1, \ldots.$$

Por lo tanto (poniendo $n = n_0 + k$, $k > 0$),

$$\begin{array}{c}
(\ell-\varepsilon)a_{n_0} < a_{n_0+1} \; (\ell+\varepsilon)a_{n_0} \\
(\ell-\varepsilon)^2 a_{n_0} < (\ell-\varepsilon)a_{n_0+1} < a_{n_0+2} < (\ell+\varepsilon)a_{n_0+1} < (\ell+\varepsilon)^2 a_{n_0} \\
\vdots \\
(\ell-\varepsilon)^n \dfrac{a_{n_0}}{(\ell-\varepsilon)^{n_0}} = (\ell-\varepsilon)^k a_{n_0} < \quad a_n \quad < (\ell+\varepsilon)^k a_{n_0} = (\ell+\varepsilon)^n \dfrac{a_{n_0}}{(\ell+\varepsilon)^{n_0}} \\
\vdots
\end{array}$$

Se sigue que

$$(\ell-\varepsilon)\frac{\sqrt[n]{a_{n_0}}}{\sqrt[n]{(\ell-\varepsilon)^n}} < \sqrt[n]{n} < (\ell+\varepsilon)\frac{\sqrt[n]{a_{n_0}}}{\sqrt[n]{(\ell+\varepsilon)^n}}.$$

Puesto que $\lim\limits_{n\to\infty} (\ell-\varepsilon)\frac{\sqrt[n]{a_{n_0}}}{\sqrt[n]{(\ell-\varepsilon)^n}} = (\ell-\varepsilon)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} (\ell+\varepsilon)\frac{\sqrt[n]{a_{n_0}}}{\sqrt[n]{(\ell+\varepsilon)^n}} = (\ell+\varepsilon)$, se sigue que para toda $\varepsilon > 0$ se tiene

$$\ell - \varepsilon \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \ell + \varepsilon.$$

Por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$.

Notemos que implícitamente hemos supuesto $\ell > 0$ pues de lo contrario las primeras desigualdades no tienen sentido. El caso $\ell = 0$ es similar y de hecho más sencillo y se deja al cuidado del lector.

Hemos probado que, si $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ converge, entonces $\sqrt[n]{a_n}$ converge y

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}}.$$

Ejemplo 4.2.10. Sea $a_n = n$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 + 0 = 1$. Por lo tanto, nuevamente hemos obtenido

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Ejemplo 4.2.11. Sea $0 < r < 1$. Entonces tendremos que

$$a_n = r^0 + r^1 + \cdots + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1 - r}.$$

Definición 4.2.12. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que $a \in \mathring{A}$ si existe un número positivo $r > 0$ tal que $(a - r, a + r) \subseteq A$.

Teorema 4.2.13. *Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función y sea $a \in \overset{\circ}{\widehat{A \cup \{a\}}}$, es decir, existe $r > 0$ tal que $(a-r, a+r)\setminus\{a\} \subseteq A$. Sea $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $a_n \neq a$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ se tiene que $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq n_0$, $|a_n - a| < \delta$. Por lo tanto $|f(a_n) - \ell| < \varepsilon$ para toda $n \geq n_0$. $\square$

También tendremos el recíproco de este resultado, es decir:

Teorema 4.2.14. *Sea $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y sea $a \in \overset{\circ}{\widehat{A \cap \{a\}}}$. Se tiene que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ si y sólo si para toda sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ tal que $a_n \neq a$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$.*

Demostración. Primero, si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$, entonces para toda sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ se tiene que $f(a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.

Recíprocamente, supongamos que para toda sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $a_n \neq a$ y $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ se tiene que $f(a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ pero $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq \ell$.

En este caso, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para toda $\delta > 0$ existe x_δ tal que $0 < |x_\delta - a| < \delta$ pero $|f(x_\delta) - \ell| \geq \varepsilon_0$.

Tomemos para cada $n \in \mathbb{N}$, $\delta := \dfrac{1}{n}$ y sea $a_n := x_\delta$. Entonces $0 < |a_n - a| < \dfrac{1}{n}$ y $|f(a_n) - \ell| \geq \varepsilon_0$. Por Teorema del sandwich y usando que $\lim\limits_{n\to\infty} 0 =$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, se sigue que $|a_n - a| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ lo cual implica que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ y $|f(a_n) - \ell| \geq \varepsilon_0$. Por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \neq \ell$.

Esta contradicción prueba que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$. □

El Teorema 4.2.14 implica, en particular, que si f es continua en a y $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.

Ejemplo 4.2.15. Se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sen}\Big(5 - \dfrac{7}{n^2}\Big) = \operatorname{sen} 5$.

Definición 4.2.16. Una sucesión se llama *creciente* (respectivamente *decreciente*) si para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene $a_n \leq a_{n+1}$ (respectivamente $a_n \geq a_{n+1}$).

Una sucesión que es creciente o decreciente se llama *monótona*.

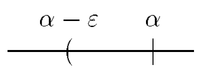
Una sucesión se llama *acotada* si existe $M > 0$ tal que $|a_n| \leq M$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Un resultado de capital importancia para sucesiones es el siguiente.

Teorema 4.2.17. *Una sucesión creciente (respectivamente decreciente) y acotada es convergente.*

Demostración. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente y tal que $|a_n| \leq M$ para toda $n \in \mathbb{N}$ para cierto $M > 0$. En particular tendremos que $a_n \leq M$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Sea $\alpha := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Se tiene: $a_n \leq a_{n+1} \leq \ldots \leq \alpha$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces $\alpha - \varepsilon$ no es cota superior de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ por lo que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - \varepsilon < a_{n_0}$. Por lo tanto para toda $n \geq n_0$:

$$\alpha - \varepsilon < a_n \leq \alpha < \alpha + \varepsilon$$



lo cual implica que $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ para toda $n \geq n_0$. Por lo tanto $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha}$.
□

Ejemplo 4.2.18. Consideremos $a_n := \Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)^n$ Entonces se tiene que

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!n^k} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\Big(1\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\cdots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)\Big) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Ahora sea $\alpha_n = \dfrac{1}{n!}$. Se tiene que

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=\frac{\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{n!}}=\frac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Por el Ejemplo 4.2.9 se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\alpha_n}=0$. Por lo tanto existe n_0 tal que para toda $n\geq n_0$ se tiene $\sqrt[n]{\alpha_n}\leq\frac{1}{2}$. Por lo tanto $\alpha_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Se sigue que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}&=\underbrace{\sum_{k=0}^{n_0-1}\frac{1}{k!}}_{A}+\sum_{k=n_0}^{n}\frac{1}{k!}\leq A+\sum_{k=n_0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\\&=A+\left(\frac{1}{2}\right)^{n_0}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}\right)=\\&=A+\left(\frac{1}{2}\right)^{n_0}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0+1}}{1-\frac{1}{2}}\leq A+\left(\frac{1}{2}\right)^{n_0}\cdot 2\cdot 1=A+\frac{1}{2^{n_0-1}}.\end{aligned}$$

Es decir, tenemos que $a_n\leq A+\frac{1}{2^{n_0-1}}$ para toda $n\in\mathbb{N}$, esto es, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada.

Veamos que la $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente. Para este fin, primero probemos que si $x>-1$ entonces $(1+x)^n\geq 1+nx$. Lo haremos por inducción. Notemos que para $x>0$ hemos probado esto y más usando el Binomio de Newton. Sin embargo nuestra prueba no funciona (al menos no tan directamente) para $-1<x<0$.

Para $n=1$ tenemos $(1+x)^n=1+x=1+nx$. Suponemos que el resultado se cumple para n. Entonces para $n+1$ tenemos que:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1}&=(1+x)(1+x)^n\underbrace{\geq}_{\substack{\uparrow\\1+x>0}}(1+x)(1+nx)=\\&=1+(n+1)x+nx^2\geq 1+(n+1)x,\end{aligned}$$

Lo cual prueba lo afirmado.

Ahora bien, queremos probar que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=a_n\leq a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Esto es equivalente a

$$1\leq\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right),$$

o, equivalentemente,

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n =$$
$$= \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n = \left(\frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n.$$

Ahora bien, tenemos:

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq 1-\frac{n}{(n+1)^2} \geq \frac{n+1}{n+2} \iff \frac{1}{n+2} \geq \frac{n}{(n+1)^2} \iff$$
$$\iff (n+1)^2 = n^2+2n+1 \geq n(n+2) = n^2+2n$$

lo cual se cumple. Esto prueba que $a_n \leq a_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente y acotada y por lo tanto convergente.

Definición 4.2.19. El límite de la sucesión del Ejemplo 4.2.18 se define como el número e. Es decir

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n := e.$$

Observación 4.2.20. En el Ejemplo 4.2.18 hemos obtenido que la sucesión $b_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ es acotada. Puesto que claramente es creciente, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ es convergente. Se puede probar que

$$\lim_{n\to\infty} b_n = e.$$

Ejemplo 4.2.21. Consideremos $m \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$ fijos. Considermos la sucesion $\left\{\dfrac{a^n}{n^m}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Definimos $\alpha := \dfrac{|a|^n}{n^m}$. Entonces

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{\dfrac{|a|^{n+1}}{(n+1)^m}}{\dfrac{|a|^n}{n^m}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^m \cdot |a| \xrightarrow[n\to\infty]{} |a|.$$

Por lo tanto $\sqrt[n]{\alpha_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} |a|$.

Si $|a| \leq 1$, entonces $|\alpha_n| = \dfrac{|a|^n}{n^m} \leq \dfrac{1}{n^m} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Se sigue que $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n^m} = 0 \text{ para } |a| \leq 1}$.

Si $|a|>1$, entonces $\sqrt[n]{\alpha_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} |a|>1$. Sea $1<r<|a|$. Entonces existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq n_0$ entonces $\sqrt[n]{\alpha_n}\geq r$ por lo que $\alpha_n\geq r^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

Hemos obtenido que $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a|^n}{n^m}=\infty}$.

4.3 Sucesiones de Cauchy

La propiedad de la existencia del supremo en los números reales nos dice que $\mathbb{R}$ es "completo", esto es, no tiene hoyos. Otra forma equivalente de decir lo mismo es:

Teorema 4.3.1 (Propiedad de los segmentos encajados). *Sea una sucesión de intervalos cerrados* $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ *tales que* $[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$ *para toda* $n\in\mathbb{N}$. *Entonces* $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]\neq\emptyset$, *esto es, existe* $x_0\in\mathbb{R}$ *tal que* $a_n\leq x_0\leq b_n$ *para toda* $n\in\mathbb{N}$.

Demostración. Se tiene que $[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$ implica que $a_n\leq a_{n+1}\leq b_{n+1}\leq b_n$ para toda $n\in\mathbb{N}$.

Sean $\alpha:=\sup\limits_n\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\beta:=\inf\limits_n\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces $a_n\leq\alpha$ para toda n. Por otro lado notemos que $a_n\leq b_m$ para cualesquiera $n,m\in\mathbb{N}$ pues si $n\leq m$, entonces $a_n\leq a_m\leq b_m$ y si $n\geq m$ entonces $a_n\leq b_n\leq b_m$.

Por tanto tenemos que $\alpha\leq b_m$ para toda m. Se sigue que $\alpha\in[a_n,b_n]$ para toda $n\in\mathbb{N}$.

Similarmente tenemos que $a_n\leq\beta\leq b_n$. De hecho se tiene $\bigcap\limits_{n+1}^{\infty}[a_n,b_n]=[\alpha,\beta]\neq\emptyset$. □

Observación 4.3.2. El Teorema 4.3.1 no se cumple para intervalos abiertos. Por ejemplo los intervalos $\left(0,\frac{1}{n}\right)$ satisfacen que $\left(0,\frac{1}{n+1}\right)\subseteq\left(0,\frac{1}{n}\right)$ para toda n pero $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(0,\frac{1}{n}\right)=\emptyset$ pues si tuviésemos $0<x<\frac{1}{n}$ para toda n, entonces se seguiría que $0<x\leq 0$ lo cual es imposible.

Observación 4.3.3. Si consideramos $\mathbb{Q}$ en lugar de $\mathbb{R}$, el Teorema 4.3.1 tampoco se cumple. Por ejemplo, si $\frac{p_n}{q_n}=a_n\in\mathbb{Q}$ y $\frac{t_n}{s_n}=b_n\in\mathbb{Q}$ son tales que $a_n\leq a_{n+1}\leq\sqrt{2}\leq b_{n+1}\leq b_n$ y además $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\sqrt{2}$ y $b_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\sqrt{2}$, entonces $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\emptyset$ (en $\mathbb{Q}$). Esto se debe a que $\mathbb{Q}$ no es completo.

Como consecuencia, tenemos

Teorema 4.3.4. *Sea a_n una sucesión creciente y b_n una sucesión decreciente tales que $a_n \leq b_n$ para toda n y $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Entonces las sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ son convergentes y se tiene $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.*

Demostración. Tenemos que si $\alpha := \sup_n \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\beta := \inf_n \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, entonces $\alpha \leq \beta$, $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$, $\beta = \lim_{n\to\infty} b_n$. Dada $\varepsilon > 0$, se tiene $0 \leq b_n - a_n < \varepsilon$. Por lo tanto

$$a_n \leq b_n < a_n + \varepsilon \quad \text{lo cual implica} \quad \alpha \leq \beta \leq \alpha + \varepsilon \ \forall\ \varepsilon > 0.$$

Se sigue que $\alpha = \beta$. □

Definición 4.3.5. Dos sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ que verifican las hipótesis del Teorema 4.3.4 se llaman *adyacentes*.

Finalizamos este capítulo con el concepto de sucesión de Cauchy.

Definición 4.3.6. Una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se llama de *Cauchy* si dada $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que para toda $n, m \geq n_0$ se tiene $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Observación 4.3.7. Notemos que si una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, entonces es de Cauchy, pues si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, dada $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que para toda $n \geq n_0$ se tiene $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Por lo tanto para toda $n, m \geq n_0$, se tiene:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

El recíproco también se cumple en $\mathbb{R}$ y de hecho es equivalente a la completitud de los números reales. Por eso mismo, el recíproco no se cumple, por ejemplo en $\mathbb{Q}$. No presentamos la demostración de este resultado.

Teorema 4.3.8. *Una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge si y sólo si es de Cauchy.* □

4.4 Ejercicios

Ejercicio 4.4.1. Comprobar los siguientes límites:

a).- $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.
b).- $\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^3+4} = 0$.
c).- $\lim_{n\to\infty} (\sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[4]{n+1}) = 0$.
d).- $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.
e).- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n} = 1$.

f).- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = \max(a,b)$, donde $a, b > 0$.

g).- $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha(n)}{n} = 0$, donde $\alpha(n)$ es el número de números primos que dividen a n.

Ejercicio 4.4.2. Supongamos que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente y $a_n \in \mathbb{Z}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. ¿Que se puede decir acerca de la sucesión?

Ejercicio 4.4.3. Demostrar que la sucesión $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$ converge y hallar el límite.

Ejercicio 4.4.4. Calcular $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n+3^n}{a^n}\right)$, con $a > 0$.

Ejercicio 4.4.5. Calcular los límites de las siguientes sucesiones:

a).- $\cos \frac{2^n}{n!}$.

b).- $\frac{n^2+(-1)^n}{n^2+\sqrt{n}}$.

c).- $\sqrt[n]{3-\operatorname{sen}^2 n}$.

d).- $\frac{n^3+2^n}{3^n}$.

e).- $(\cos n) \operatorname{sen} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Ejercicio 4.4.6. Sea $a_n = \frac{1\cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{4^n n!}$. Probar que $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{2}$ y deducir el valor de $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Ejercicio 4.4.7. Probar que $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) = \infty$.

Ejercicio 4.4.8. ¿Cuál es es $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$?

Ejercicio 4.4.9. Sea $a_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$. Hallar $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Ejercicio 4.4.10. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para toda x, $f(x) = f(2x)$. Probar que si f es continua en 0, entonces f es constante.

Ejercicio 4.4.11. Probar que $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$.

Ejercicio 4.4.12. Sea $f\colon [a,b] \to [a,b]$ tal que para todo $x, y \in [a,b]$ se cumple

$$|f(x)-f(y)| \leq c|x-y|$$

para algún $0 \leq c < 1$.

a).- Demostrar que f es continua.

b).- Demostrar que f tiene a lo sumo un punto fijo, esto es, un punto $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

c).- Considerando la sucesión $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots$ para cualquier $x \in [a,b]$, demostrar que f tiene un punto fijo. (**Sugerencia:** Probar que la sucesión $a_1 = x$, $a_n = f(a_{n-1})$ es de Cauchy).

Ejercicio 4.4.13. Sea $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$, $n \geq 1$, $a_1 > -1$. Probar que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente y hallar $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

5

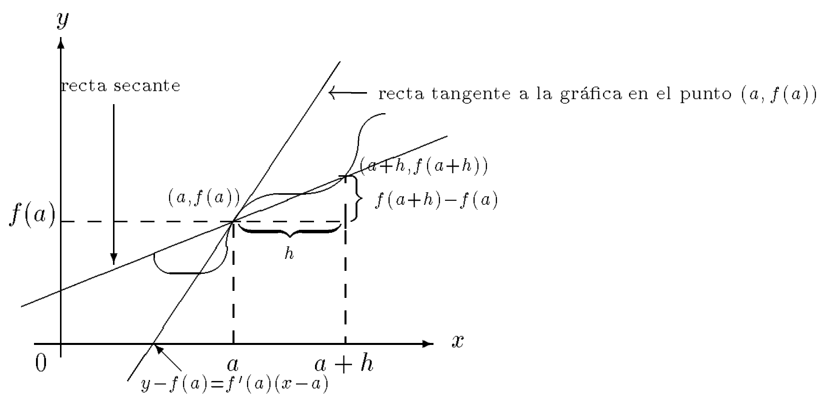
Derivada de una función

5.1 Definiciones y ejemplos

Recordemos la definición de derivada de una función.

Definición 5.1.1. Sean $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathring{A}$. Se dice que f es *derivable* o *diferenciable* en a si $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe y en este caso este límite se la llama la *derivada* o la *diferencial* de f en a y se denota por $f'(a)$. Se tiene

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) = \frac{df}{dx}(a).$$



Ejemplo 5.1.2. Sea $f(x) = c =$ constante. Entonces:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0.$$

Ejemplo 5.1.3. Sea $f(x) = x$. Entonces

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a+h-a}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1.$$

Ejemplo 5.1.4. Sea $f(x) = x^2$. Entonces

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2a+h) = 2a. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.1.5. Sea $f(x) = |x|$. Entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}.$$

Consideremos $h > 0$. Entonces $\frac{|h|}{h} = \frac{h}{h} = 1$. Ahora, si $h < 0$, tendremos $\frac{|h|}{h} = \frac{-h}{h} = -1$. Es decir:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1.$$

Por lo tanto $\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$ no existe.

La relación entre diferenciabilidad y continuidad nos la proporciona el siguiente resultado.

Teorema 5.1.6. *Si una función f es derivable en un punto a, entonces f es continua en a.*

Demostración. Se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a}(f(x) - f(a)) &= \lim_{x\to a} \left(\frac{(f(x) - f(a))}{(x-a)} \cdot (x-a) \right) = \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \cdot \lim_{x\to a}(x-a) = f'(a) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ y f es continua en a. □

Observación 5.1.7. El recíproco del Teorema 5.1.6 no se cumple. Por ejemplo, $f(x) = |x|$ es continua en 0 pero no es derivable en 0. De hecho, es posible construir una función continua en todo $\mathbb{R}$ pero que no sea derivable en ningún $a \in \mathbb{R}$.

Definición 5.1.8. Se define la *derivada por la derecha de f en x_0* por

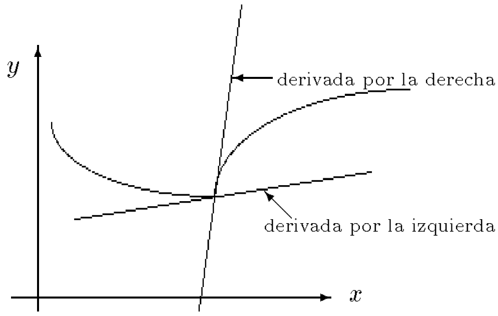
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell := f'(x_0+).$$

Es decir, si para cada $\varepsilon > 0$ dada, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < x-a < \delta$, es tiene $\left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - \ell\right| < \varepsilon$.

Análogamente, definimos la *derivada por la izquierda de f en x_0* por:

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell := f'(x_0-).$$

Observación 5.1.9. Se tiene que f es derivable en x_0 si y sólo si existen las derivadas de f tanto por la izquierdo como por la derecha en x_0 y son iguales.



Ejemplo 5.1.10. Sea $f(x) = |x|$. Entonces

$$f'(0+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$
$$f'(0-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Puesto que $f'(0+) \neq f'(0-)$ se tiene que f no es derivable en 0.

5.2 Propiedades de las funciones derivables

Las propiedades algebraicas de las funciones derivables son:

Teorema 5.2.1. *Sean $f,g\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathring{A}$, f y g derivables en a. Sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces $f \pm g$, $f \cdot g$ y cf son derivables en a. Adicionalmente, si $g(a) \neq 0$, entonces $\dfrac{1}{g}$ es derivable en a. Además tenemos*

(1) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$.
(2) $(cf)'(a) = cf'(a)$.

(3) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

(4) *Si* $g(a) \neq 0$, $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{(g(a))^2}$.

Como consecuencia de (3) *y* (4), *se tiene:*

(5) *Si* $g(a) \neq 0$, *entonces* $\left(\frac{f}{g}\right)$ *es derivable en* a *y se tiene*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Demostración. (3): Tenemos que

$$\frac{(f \cdot g)(a+h) - (f \cdot g)(a)}{h} = \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} =$$
$$= \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a+h) + f(a)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} =$$
$$= g(a+h) \cdot \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + f(a) \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{}$$
$$\xrightarrow[h \to 0]{} g(a)f'(a) + f(a)g'(a).$$

(4): Para la inversa procedemos igual:

$$\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(a+h) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{h} = \frac{\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)}}{h} = \frac{g(a) - g(a+h)}{hg(a+h)g(a)} =$$
$$= -\left(\frac{g(a+h) - g(a)}{h}\right) \cdot \frac{1}{g(a+h)g(a)} \xrightarrow[h \to 0]{} \frac{-g'(a)}{g(a)^2}.$$

□

Como consecuencia de estos resultados tenemos:

Ejemplo 5.2.2. Sea $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Entonces si $n \geq 0$, $f'(x) = nx^{n-1}$ para toda $x \in \mathbb{R}$ y si $n < 0$, $f'(x) = nx^{n-1}$ para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

En efecto, si $n = 0$, $f(x) = x^0 = 1 =$ constante. Por lo tanto $f'(x) = 0$.

Si $n > 0$, entonces probaremos lo afirmado por inducción.

Para $n = 1$, tenemos $f(x) = x$ y $f'(x) = 1 = nx^{n-1} = 1 \cdot x^{1-1} = 1$.

Suponemos que para $n \geq 1$ se cumple que si $f(x) = x^n$, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$. Ahora para $n+1$, sea $f(x) = x^{n+1}$. Queremos probar que $f'(x) = (n+1)x^n$. Se tiene $f(x) = x^{n+1} = x \cdot x^n$ por lo que

$$f'(x) = (x)' \cdot x^n + x(x^n)' = 1 \cdot x^n + x \cdot nx^{n-1} = x^n + nx^n = (n+1)x^n.$$

Finalmente, si $n < 0$, entonces $-n > 0$ y $f(x) = x^n = \frac{1}{x^{-n}}$ por lo que $f'(x) = \frac{-(x^{-n})'}{(x^{-n})^2} = -\frac{(-n)x^{-n-1}}{x^{-2n}} = +nx^{-n-1+2n} = nx^{n-1}$.

Ejemplo 5.2.3. Sea $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x + 1}{x^3 + 7}$. Entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2 - 4x + 1)'(x^3 + 7) - (3x^2 - 4x + 1)(x^3 + 7)'}{(x^3 + 7)^2} = \\ &= \frac{(6x - 4)(x^3 + 7) - (3x^2 - 4x + 1)(3x^2)}{(x^3 + 7)^2}. \end{aligned}$$

Un resultado básico para diferenciabilidad es la llamada *Regla de la Cadena* la cual nos permite calcular la derivada de una composición de funciones derivables.

Teorema 5.2.4 (Regla de la Cadena). *Sean $f : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : (c, d) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones tales que $f((a, b)) \subseteq (c, d)$, $x_0 \in (a, b)$, $f(x_0) = y_0 \in (c, d)$ con f derivable en x_0 y g derivable en y_0. Entonces $g \circ f$ es derivable en x_0 y se tiene*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

Demostración. Sea $h \neq 0$ y sea $k = f(x_0 + h) - f(x_0)$. Notemos que si $k = 0$, entonces $f(x_0 + h) - f(x_0) = 0$ por lo que $\dfrac{g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0))}{h} = 0$. Definimos

$$\begin{aligned} I_h :&= \frac{g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0))}{h} = \\ &= \begin{cases} \dfrac{g(y_0 + k) - g(y_0)}{k} \cdot \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} & \text{si } k \neq 0 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Consideremos dos situaciones. La primera, si para cada $\varepsilon > 0$ existe x_ε tal que $0 < |x_\varepsilon - x_0| < \varepsilon$ y $f(x_\varepsilon) = f(x_0)$. En este caso

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{f(x_\varepsilon) - f(x_0)}{x_\varepsilon - x_0} = 0,$$

por lo que $f'(x_0) = 0$ y $g'(y_0) \cdot f'(x_0) = 0$.

Por otro lado, $\lim\limits_{h \to 0} I_h = 0$ por lo que

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0))}{h} = 0 = (g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

El teorema queda probado en este caso.

Consideremos el caso complementario, esto es, supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $0 < |x - x_0| < \varepsilon$, $f(x) \neq f(x_0)$. Entonces poniendo $k := f(x_0 + h) - f(x_0)$, $f(x_0 + h) = y_0 + k$, se tiene

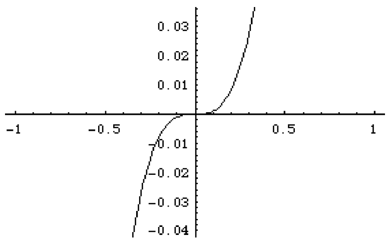
$$\begin{aligned}\frac{(g\circ f)(x_0+h)-(g\circ f)(x_0)}{h} &= \frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h} = \\ &= \frac{g(y_0+k)-g(y_0)}{k}\cdot\frac{k}{h} = \\ &= \frac{g(y_0+k)-g(y_0)}{k}\cdot\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.\end{aligned}$$

Cuando $h \to 0$ se tiene que $k = f(x_0+h) - f(x_0) \to 0$, por lo tanto

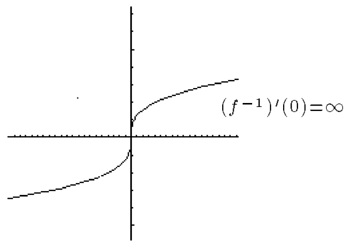
$$\lim_{h\to 0}\frac{(g\circ f)(x_0+h)-(g\circ f)(x_0)}{h} = g'(y_0)\cdot f'(x_0). \qquad \square$$

Observación 5.2.5. Puede haber funciones $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 1 a 1, derivables pero la derivada ser 0 en algunos puntos. En la imagen bajo f de esos puntos, $(f^{-1})'$ no existe.

Ejemplo 5.2.6. Sea $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^3$. Entonces f satisface que es creciente (ver Definición 5.3.1 más adelante) pues $f'(x)=3x^2$ es positiva para $x\neq 0$ y $f'(0)=0$. Ahora bien $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$ y $(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, por lo que $(f^{-1})'(0)\text{“}=\text{”}\infty$, es decir $(f^{-1})'(0)$ no existe.



$f(x)=x^3$

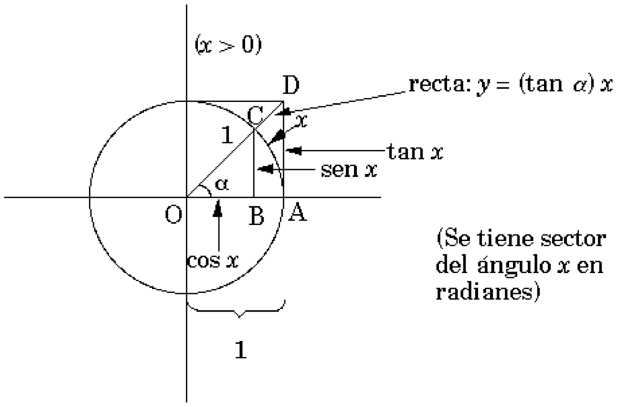


$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$

Con el fin de dar un tipo más general de ejemplos y resultados, debemos calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$. Este límite lo calcularemos utilizando las propiedades intuitivas que tiene la función $\operatorname{sen} x$ aunque nosotros no hemos introducido formalmente tal función.

Lema 5.2.7. *Se tiene* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$

Demostración. Consideremos primero $x>0$. Denotamos $\Delta(XYZ)$ al triángulo con vértices X, Y y Z. Entonces:



$$\text{Area } \Delta(OAC) < \text{ Area sector } (OAC) < \text{ Area } \Delta(OAD);$$

$$\text{Area } \Delta(OAC) = \frac{1}{2}(\overline{OA})(\overline{CB}) = \frac{1}{2}(1)(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x,$$

$$\text{Area sector } (OAC) = \pi \cdot \underbrace{(1)^2}_{\substack{\uparrow \\ \text{radio}}} \frac{\hat{AC}}{2\pi} = \frac{1}{2}(\hat{AC}) = \frac{1}{2}x,$$

$$\text{Area } \Delta(OAD) = \frac{1}{2}(\overline{OA})(\overline{DA}) = \frac{1}{2}(1)\tan x = \frac{1}{2}\tan x.$$

Se sigue que

$$\operatorname{sen} x < x < \tan x.$$

Por lo tanto

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1.$$

Ahora bien, tenemos $1 - \cos x = 2\operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{2}$ por lo que $|1-\cos x| \leq 2\left|\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\right|^2 \leq 2\dfrac{x^2}{4} = \dfrac{x^2}{2}$. En particular, se tiene que:

$$0 \leq \lim_{x\to 0}(1-\cos x) \leq \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}x^2 = 0.$$

Por lo tanto $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$.

Se sigue que $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

Ahora, para $x < 0$, $-x > 0$ y $\dfrac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} 1$.

Por lo tanto $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1}$. □

Como veremos inmediatamente, el límite anterior nos permite calcular las derivadas de las funciones trigonométricas.

Recordemos que si $A, B \in \mathbb{R}$, entonces: $\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B$. Se sigue que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(A+B) &= \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B, \\ \operatorname{sen}(A-B) &= \operatorname{sen} A \cos B - \cos A \operatorname{sen} B, \end{aligned}$$

por lo que

$$\operatorname{sen}(A+B) - \operatorname{sen}(A-B) = 2 \cos A \operatorname{sen} B.$$

Poniendo $A+B=\alpha$ y $A-B=\beta$, entonces $A = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $B = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$ y

$$\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Usamos las identidades anteriores para probar:

Proposición 5.2.8. *Se tiene* $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$ *y* $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$.

Demostración. Tenemos:

$$\begin{aligned} (\operatorname{sen} x)' &= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2 \operatorname{sen}\left(\frac{x+h-x}{2}\right) \cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \lim_{h \to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = 1 \cdot \cos(x+0) = \cos x. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\boxed{(\operatorname{sen} x)' = \cos x}$.

Ahora bien, $\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Por lo tanto, por la Regla de la Cadena, $(\cos x)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-1) = -\operatorname{sen} x$, esto es, $\boxed{(\cos x)' = -\operatorname{sen} x.}$ $\square$.

Ejemplo 5.2.9. Calculemos $(\operatorname{sen}(x^3+2))'$. Sea $f(x) = x^3+2$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$. Entonces $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3+2) = \operatorname{sen}(x^3+2)$. Por lo tanto

$$(\operatorname{sen}(x^3+2))' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = (\cos(x^3+2)) \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos(x^3+2).$$

Continuamos probando que la inversa de una función diferenciable también es diferenciable bajo ciertas circunstancias.

Teorema 5.2.10. *Sea $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una función 1-1 y supongamos que $f((a,b)) = (c,d)$, $g = f^{-1}\colon (c,d) \to \mathbb{R}$. Si f es derivable en ${}_0 \in (a,b)$ y $f'(x_0) \neq 0$, entonces $f^{-1} = g$ es derivable en $y_0 = f(x_0)$ y $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.*

Demostración. Se tiene $f^{-1}(y_0) = x_0$, $f^{-1}(y_0 + k) = x_0 + h$. Entonces $h = f^{-1}(y_0 + k) - f^{-1}(y_0) \xrightarrow[k \to 0]{} 0$.

Se tiene

$$\begin{aligned}\frac{f^{-1}(y_0+k) - f^{-1}(y_0)}{k} &= \frac{x_0 + h - x_0}{k} = \frac{h}{k} = \frac{h}{f(x_0+h) - f(x_0)} = \\ &= \frac{1}{\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}} \xrightarrow[\substack{k \to 0\\ h \to 0}]{} \frac{1}{f'(x_0)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto $(f^{-1}(y_0))' = \dfrac{1}{f'(x_0)}$. □

Observación 5.2.11. El cálculo de la derivada de la función inversa, suponiendo que ya se sabe que es derivable, es la siguiente: $f^{-1} \circ f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, por lo tanto $(f^{-1} \circ f)'(x) = 1 = (f^{-1})'(f(x))f'(x)$ lo cual implica que $(f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$. □

Ejemplo 5.2.12. Se tiene que $\operatorname{sen}\colon \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ es 1-1, $\operatorname{sen}\left(\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)\right) = (-1,1)$ y $(\operatorname{sen} x)' = \cos x \neq 0$.

Sea $\operatorname{arcsen}\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ la función inversa. Sea $x = \operatorname{sen} y \in (-1,1)$. Entonces

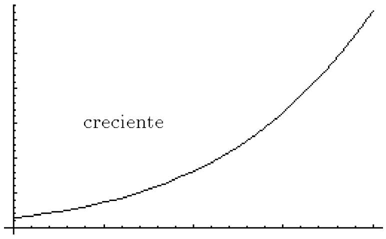
$$(\operatorname{arcsen})'(x) = \frac{1}{(\operatorname{sen} y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

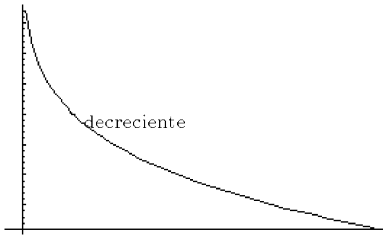
Aquí hemos usado que $\cos y = \sqrt{1-y^2}$ es la raíz cuadrada positiva pues la función $\operatorname{sen} y$ en $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ es creciente y por tanto su derivada, $\cos y$, es positiva. Inmediatamente recordamos este concepto.

Por lo tanto $\boxed{(\operatorname{arcsen} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$.

5.3 Máximos y mínimos locales

Definición 5.3.1. Una función $f\colon I \to \mathbb{R}$ es *creciente* (respectivamente *decreciente*) si $x < y$ implica $f(x) \leq f(y)$ (respectivamente si $x < y$ implica $f(x) \geq f(y)$). Una función que es creciente o decreciente, se llama *monótona*.





Definición 5.3.2. Sea $f\colon I \to I = [a, b] \to \mathbb{R}$ una función cualquiera, $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ se llama *máximo local de la función* f (respectivamente *mínimo local de la función* f) si $f(x_0) \geq f(x)$ (respectivamente $f(x_0) \leq f(x)$) para toda $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ para algún $r > 0$.

Teorema 5.3.3. *Si* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *tiene un máximo ó un mínimo local en* x_0 *y* f *es derivable en* x_0*, entonces* $f'(x_0) = 0$*.*

Demostración. Sea x_0 punto donde f alcanza un máximo local. Para $|h| < r$, se tiene que $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$. Para $h > 0$ tenemos: $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0$ por lo tanto $\displaystyle\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0$.

Para valores negativos $h < 0$ tenemos que $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0$ por lo tanto $\displaystyle\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0$.

Puesto que f es derivable, tenemos:

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0, \end{aligned}$$

lo cual implica que $f'(x_0) = 0$. □

Observación 5.3.4. El recíproco del Teorema 5.3.3 no se cumple en general. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ satisface que $f'(0) = 0$ pero $f(-h) = -h^3 < 0 < h^3 = f(h)$ para toda $h > 0$, es decir, f no alcanza ni máximo ni mínimo local. También notemos que la función $f(x) = |x|$ en $[-1, 1]$ tiene un mínimo local en 0 pero f no es derivable en 0.

Definición 5.3.5. Un *punto singular* o *punto crítico* de una función f es un punto x_0 tal que $f'(x_0) = 0$.

En consecuencia, si queremos hallar el máximo o el mínimo de una función $f\colon I \to \mathbb{R}$ debemos considerar los puntos x_0 tales que $f'(x_0) = 0$ así como los extremos a y b de I y finalmente en los puntos en que f no sea derivable.

Ejemplo 5.3.6. Sea $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 4$ en $[-2, 3]$. ¿Cuál es el máximo y el mínimo de f?

Tenemos que f es derivable en todo $[-2, 3]$ y la derivada de f se anula en:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0 \iff$$

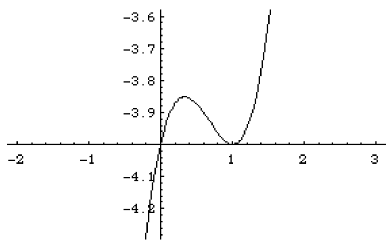
$$\iff x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(3)}}{2(3)} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} = \begin{cases} 1 \\ \dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

Ahora bien tenemos:

$$\begin{aligned} f(-2) &= -8 - 8 - 2 - 4 = -22, \\ f(3) &= 27 - 18 + 3 - 4 = 8, \\ f(1) &= 1 - 2 + 1 - 4 = -4, \\ f\left(\frac{1}{3}\right) &= \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} - 4 = \frac{1 - 6 + 9}{27} - 4 = \frac{4 - 108}{27} = -\frac{104}{27}. \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos: $\boxed{\begin{array}{ll} \text{máximo:} & f(3) = 8, \\ \text{mínimo:} & f(-2) = -22. \end{array}}$

Por otro lado tenemos que f alcanza un máximo local en $x = \frac{1}{3}$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{104}{27}$ y alcanza un mínimo local en $x = 1$, $f(1) = -4$.



En $\left[0, \frac{3}{2}\right]$, tenemos $f(0) = -4 = f(1)$; $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{8} - 2 \cdot \frac{9}{4} + \frac{3}{2} - 4 = \frac{27 - 36 + 12 - 32}{8} = \frac{12 - 41}{8} = \frac{-29}{8} > -\frac{104}{27} > -4$.

Por tanto: $\boxed{\begin{array}{ll} \text{máximo:} & f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{29}{8}, \\ \text{mínimo:} & f(0) = f(1) = -4. \end{array}}$

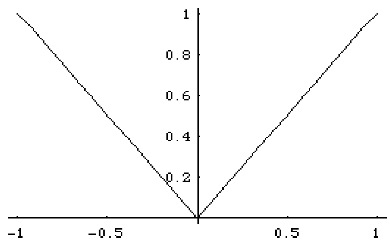
Teorema 5.3.7 (Teorema de Rolle). *Si $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en todo $[a, b]$ y $f(a) = f(b)$, entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$.*

Demostración. Por ser f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, f tiene máximo y mínimo en $[a, b]$. Si el máximo y/o el mínimo está(n) en el intervalo abierto (a, b), entonces $f'(x_0) = 0$.

Ahora bien, si el máximo y el mínimo se encuentran en los extremos, esto es, el máximo y el mínimo valor de la función es simultaneamnete $f(a) = f(b)$, entonces la función es constante en $[a, b]$ y por tanto $f'(x) = 0$ para toda $x \in (a, b)$. □.

Observación 5.3.8. Si f no es derivable en todo punto de (a, b) el Teorema de Rolle no necesariamente se cumple.

Ejemplo 5.3.9. Sea $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$. Entonces $f(1) = f(-1) = 1$ pero $f'(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x < 0 \\ \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ y f no es derivable en 0.

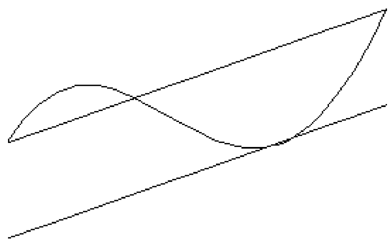


Una consecuencia y a su vez generalización del Teorema de Rolle es:

Teorema 5.3.10 (Teorema del Valor Medio). *Si f es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demostración. Definimos la función $h(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. Entonces $h(x)$ satisface $h(a) = h(b) = f(a)$. Por el Teorema de Rolle, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $h'(x_0) = 0 = f'(x_0) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. □



Observación 5.3.11. De la demostración del Teorema del Valor Medio, tenemos que éste es consecuencia inmediata del Teorema de Rolle, el cual a su vez, es un caso particular del Teorema del Valor Medio (cuando $f(a) = f(b)$).

Corolario 5.3.12. *Si I es cualquier intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y $f\colon I \to \mathbb{R}$ es tal que $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$, entonces f es constante.*

Demostración. Sea $a, b \in I$ cualesquiera con $a < b$. Entonces existe $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$0 = f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

de donde obtenemos que $f(a) = f(b)$. □

Corolario 5.3.13. *Si $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ son dos funciones tales que $f'(x) = g'(x)$ para toda $x \in (a, b)$. Entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f = g + c$, es decir, $f(x) = g(x) + c$ para toda $x \in (a, b)$.*

Demostración. Se sigue inmediatamente del Corolario 5.3.12 pues $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ para toda $x \in (a, b)$. □

El concepto de *creciente* o *decreciente* se puede refinar o enriquecer con los conceptos de *no creciente* o *no decreciente*. Esto lo hacemos para poder ser más precisos en los resultados sobre máximos y mínimos.

Definición 5.3.14. Una función se dice que es

(i) *estrictamente creciente* is para toda $a < b$ se tiene $f(a) < f(b)$.
(ii) *estrictamente decreciente* is para toda $a < b$ se tiene $f(a) > f(b)$.
(iii) *no creciente* is para toda $a < b$ se tiene $f(a) \geq f(b)$.
(iv) *no decreciente* is para toda $a < b$ se tiene $f(a) \leq f(b)$.

Corolario 5.3.15. *Si una función definida en un intervalo abierto I, $f\colon I \to \mathbb{R}$ satisface que $f'(0) > 0$ para toda $x \in I$, entonces f es estrictamente creciente (respectivamente, si $f'(x) < 0$ para toda $x \in I$, entonces f es estritamente decreciente).*

Demostración. Hacemos el caso $f'(x) > 0$. Sea $a < b$. Entonces, por el Teorema del Valor Medio, existe $a < x_0 < b$ tal que $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$ lo cual implica que $f(b) - f(a) > 0$. □

El recíproco parcial del Corolario 5.3.15 es:

Proposición 5.3.16. *Si f es creciente y derivable, entonces $f'(x) \geq 0$ para toda x (respectivamente, si f es decreciente y derivable, entonces $f'(x) \leq 0$ para toda x).*

Demostración. Fijamos x_0. Entonces

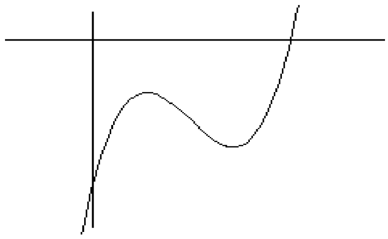
$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0. \qquad \square$$

Observación 5.3.17. El recíproco completo del Corolario 5.3.15 no se cumple. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente (ver Ejercicio 1.6.6) y derivable pero $f'(0) = 0$.

Ejemplo 5.3.18. Consideremos la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 18$. Veamos como es la gráfica de esta función.

Se tiene que $f'(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x+3)$. Por lo tanto $f'(x) = 0 \iff x = 2, 3$. Tenemos lo siguiente:

- Para $x < 2$, $f'(x) > 0$ por lo que f es estrictamente creciente.
- Para $2 < x < 3$, $f'(x) < 0$ por lo que f es estrictamente decreciente.
- Para $x > 3$, $f'(x) > 0$ por lo que f es estrictamente creciente.
- $f(2) = \frac{8}{3} - 10 + 12 - 18 = -\frac{40}{3}$ es un máximo local.
- $f(3) = 9 - \frac{45}{2} + 18 - 18 = -\frac{27}{2}$ es un mínimo local.
- $f(0) = -18$, $f(-\infty) = -\infty$, $f(\infty) = \infty$.



En consecuencia, f sólo tiene una raíz real.

.

5.4 Criterios de la segunda derivada para máximos y mínimos locales

Los ejemplos anteriores nos muestran que los máximos y mínimos locales están relacionados con los puntos donde la derivada de la función se anula, pero si la derivada de una función se anula, no podemos determinar si es un máximo o un mínimo local o ninguno de estos (por ejemplo considérense las funciones: x^2, $-x^2$ y x^3 en $x = 0$). Como veremos a continuación, la segunda derivada de la función en el punto en cuestión, en caso de existir, proporciona, en algunas ocasiones más información. No siempre es suficiente la segunda derivada sino que tendría uno que continuar con derivadas de orden superior y aún así, hay funciones que aunque sean infinitamente diferenciables en el punto, no podemos determinar la naturaleza del punto.

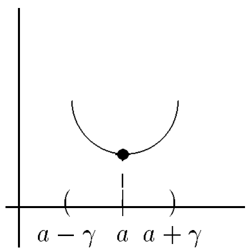
Teorema 5.4.1. *Supongamos que f es derivable en una vecindad del punto $a \in \mathbb{R}$ (es decir, f es derivable en un intervalo abierto del tipo $(a-r, a+r)$). Si $f'(a) = 0$ y*

(i) $f''(a) > 0$, *entonces f tiene un mínimo local en a.*
(ii) $f''(a) < 0$, *entonces f tiene un máximo local en a.*

Demostración. Por definición tenemos que

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h)}{h}.$$

Por tanto, si $f''(a) > 0$, entonces para algún $r > 0$ y $h \in (a-r, a+r) \setminus \{a\}$ tenemos que $\dfrac{f'(a+h)}{h} > 0$. Esto implica que si $h > 0$, entonces $f'(a+h) > 0$, es decir, f es creciente en $(a, a+r)$ y si $h < 0$, entonces $f'(a+h) < 0$, esto es, f es decreciente en $(a-r, a)$. Por lo tanto tenemos que $f(a) \leq f(x)$ para toda $x \in (a-r, a+r)$, lo cual nos dice que a es un mínimo local de f.



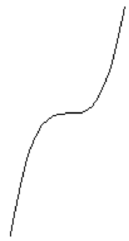
El caso $f''(a) < 0$ es totalmente análogo y no lo haremos. □

Ejemplo 5.4.2. Para la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 18$ estudiada en el Ejemplo 5.3.18, tenemos que $f'(x) = x^2 - 5x + 6$ y $f''(x) = 2x - 5$. Entonces $f'(2) = 0$, $f''(2) = -1 < 0$ por lo que f alcanza un máximo local en $x = 2$. También tenemos que $f'(3) = 0$, $f''(3) = 1 > 0$ lo cual nos dice que f alcanza un mínimo local en $x = 3$.

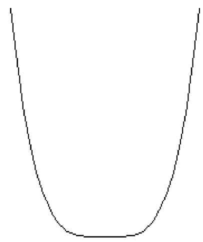
Observación 5.4.3. Hay puntos x_0 tales que $f'(x_0) = 0$ pero que f no tiene ni máximo ni mínimo local en x_0. Notemos que si x_0 es uno de estos puntos y $f''(x_0)$ existe, entonces, necesariamente se tiene que $f''(x_0) = 0$ pues si $f''(x_0) > 0$, f tendría un mínimo local en x_0 y si $f''(x_0) < 0$, entonces f tendría un máximo local en x_0.

Por otro lado, existen funciones f y puntos x_0 tales que $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ y f alcanza un máximo ó un mínimo en x_0.

Ejemplo 5.4.4. Sea $f(x) = x^3$, entonces f es creciente por lo que f no tiene ni máximos ni mínimos locales y se tiene que $f'(x) = 3x^2$ y $f''(x) = 6x$, por lo que $f'(0) = f''(0) = 0$.



Ejemplo 5.4.5. Sea $f(x) = x^4$. Entonces f alcanza un mínimo local en 0 que de hecho es el mínimo global de la función pues para toda $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 0 \leq x^4 = f(x)$. Por otro lado tenemos $f'(x) = 4x^3$ y $f''(x) = 12x^2$ lo cual implica que $f'(0) = f''(0) = 0$.



Considerando $f(x) = -x^4$ tenemos la misma conclusión que la anteriro para un máximo local y global.

En resumen, si $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, no podemos decidir con los criterios anteriores si f alcanza un máximo, un mínimo o ni máximo ni mínimo en x_0.

A continuación estudiamos una consecuencia del Teorema de Rolle, el cual a su vez es una generalización del Teorema del Valor Medio, es decir, finalmente los tres son equivalentes.

Teorema 5.4.6 (Teorema del Valor Medio de Cauchy). *Sean f y g continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Entonces existe $x \in (a, b)$ tal que*

$$[f(b) - f(a)]g'(x) = [g(b) - g(a)]f'(x).$$

Demostración. Sea $h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)]$. Entonces h es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y tenemos

$$h(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b) = h(b).$$

Se sigue del Teorema de Rolle que existe $x \in (a, b)$ tal que $h'(x) = f'(x)[g(b) - g(a)] - g'(x)[f(b) - f(a)] = 0$. □

Observación 5.4.7. El Teorema del Valor Medio de Cauchy generaliza el Teorema del Valor Medio. Basta tomar $g(x) = x$ y por lo tanto $g'(x) = 1$.

Un uso inmediato del Teorema del Valor Medio de Cauchy es la mal llamada *Regla de L'Hopital*. Este resultado cuyo nombre lleva el de L'Hopital, por haber sido publicado en el libro de Guillaume François Antoine Marquis de L'Hôpital titulado "*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*" (1696), se debe en realidad a Johann Bernoulli.

La Regla de L'Hopital sirve para calcular líimites del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Teorema 5.4.8 (Regla de L'Hopital). *Supongamos que* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. *Si* $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existe, entonces* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *existe y*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demostración. Puesto que $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, entonces $f'(x)$ y $g'(x)$ existen en un intervalo $(a-r, a+r)$ excepto posiblemente en a y además $g'(x) \neq 0$ en ese intervalo.

Podemos definir $f(a) := \lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $g(a) := \lim_{x\to a} g(x) = 0$ aunque f y/o g no estén originalmente definidas de esta forma.

Para $a < x < a + r$, se tiene por el Teorema del Valor Medio de Cauchy que:

$$[f(x) - f(a)]g'(y_x) = [g(x) - 0]f'(y_x)$$

para algún $a < y_x < x$. Notemos que si $x \to a$ entonces $y_x \to a$. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(y_x)}{g'(y_x)} = \lim_{y\to a} \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

Procedemos de manera análoga para $a - r < x < a$. □

Observación 5.4.9. El caso en que $\lim_{x\to a} f(x) = \pm \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ es similar aunque requiere de algún manejo de tipo algebraico adicional.

Ejemplo 5.4.10. Tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen} x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1.$$

Este ejemplo sólo sirve para indicar como se usa la Regla de L'Hopital pero estamos siendo circulares pues precisamene usamos que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ para hallar $(\operatorname{sen} x)'$.

Ejemplo 5.4.11. Calculemos $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{2x^2 - 4x + 2}$. Se tiene

$$\lim_{x\to 1}(x^3-3x^2+3x-1) = 1-3+3-1=0;$$
$$\lim_{x\to 1}(2x^2-4x+2) = 2-4+2=0.$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+3x-1}{2x^2-4x+2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^3-3x^2+3x-1)'}{(2x^2-4x+2)'} = \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-6x+3}{4x-4}.$$

Nuevamente tenemos que

$$\lim_{x\to 1}(3x^2-6x+3) = 3-6+3=0; \quad \lim_{x\to 1}(4x-4)=4-4=0.$$

Aplicamos nuevamente la Regla de L'Hopital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-6x+3}{4x-4} = \lim_{x\to 1}\frac{6x-6}{4} = \frac{6-6}{4} = 0.$$

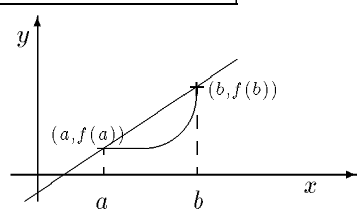
Ejemplo 5.4.12. Suponiendo conocido que $(e^x)' = e^x$, calculemos $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$, $n\in\mathbb{N}$. Se tiene $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = \infty = \lim\limits_{x\to\infty} e^x$. Entonces:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x} = 0.$$

Observación 5.4.13. Hay muchas versiones de la Regla de L'Hopital. Tenemos: Si $\lim\limits_{x\to\Box} f(x) = \pm\lim\limits_{x\to\Box} g(x) = \triangle$ y $\lim\limits_{x\to\Box}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \spadesuit$, entonces $\lim\limits_{x\to\Box}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\Box}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ donde $\Box = a, a^+, a^-, \infty, -\infty$; $\triangle = 0, \infty, -\infty$; $\spadesuit = \ell, \infty, -\infty$.

5.5 Funciones cóncavas y funciones convexas

Definición 5.5.1. Una función f se llama *convexa* o *cóncava hacia arriba* si para cualesquiera $a < x < b$, $f(x) < h(x)$ donde $h(x)$ es la recta que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, esto es $h(x) - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Por lo tanto $f(x) < h(x)$ es equivalente a $f(x) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$ o $\boxed{\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \text{ para } a < x < b}$.



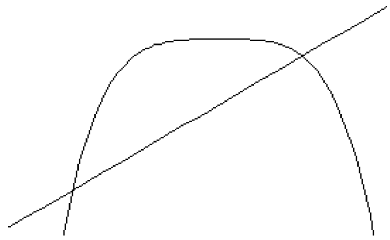
Observación 5.5.2. Notemos que en el caso de que la función sea convexa y derivable, de la desiguladad obtenemos $f'(a) < f'(x) < f'(b)$, es decir, f' es estrictamente creciente.

Recíprocamente, si f' es estrictamente creciente, entonces f es convexa.

Análogamente, tenemos la definición de *función cóncava.*

Definición 5.5.3. Una función f se llama *cóncava* o *cóncava hacia abajo* si $f(x) > h(x)$ donde $h(x)$ es la recta que para por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, para $a < x < b$. Equivalentemente, si

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{para} \quad a < x < b.$$

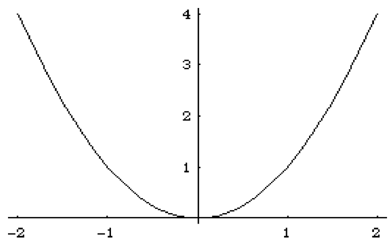


Observación 5.5.4. Notemos que f es cóncava $\Longleftrightarrow$ $-f$ es convexa.

Definición 5.5.5. Un punto donde una función f cambia el sentido de concavidad, es decir, de convexa a cóncava o de cóncava a convexa, recibe el nombre de *punto de inflexión.*

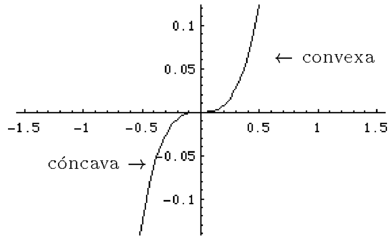
Observación 5.5.6. Notemos que si x_0 es un punto de inflexión de la función f y existe $f''(x_0)$, entonces necesariamente tenemos que $\boxed{f''(x_0) = 0}$ puesto que f' cambia de creciente a decreciente o de decreciente a creciente y por lo tanto f'' cambia de signo de $+$ a $-$ en caso de que f' cambia de creciente a decreciente o de $-$ a $+$ en caso de que f' cambia de decreciente a creciente.

Ejemplo 5.5.7. Consideremos la función $f(x) = x^2$. Entonces $f'(x) = 2x$. Se sigue que f' es creciente puesto que $f''(x) = (f'(x))' = 2 > 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Se sigue que f es convexa.



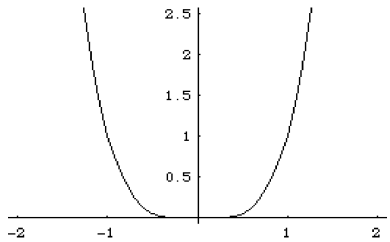
En general, si $f''(x) > 0$ en (a, b), entonces f es convexa en $[a, b]$.

Ejemplo 5.5.8. Consideremos la función $f(x) = x^3$. Tenemos que $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ por lo que f es creciente. Ahora bien, $f''(x) = 6x \begin{cases} > 0 \text{ si } x > 0 \\ < 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$.



Por lo tanto f' es creciente en $(0, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0)$. Se sigue que f es cóncava en $(-\infty, 0)$ y convexa en $(0, \infty)$. Finalmente tenemos que $f''(0) = 6(0) = 0$ y 0 es entonces un punto de inflexión de f.

Ejemplo 5.5.9. Consideremos la función $f(x) = x^4$. Entonces $f''(x) = 12x^2 \geq 0$. Por lo tanto f' es creciente y por tanto f es convexa. Sin embargo $f''(0) = 0$ y 0 no es punto de inflexión de f.



5.6 Ejercicios

Ejercicio 5.6.1. Hallar f' para $f(x) = [x]$.

Ejercicio 5.6.2. Sea $f(x) = x^2$ si x es racional, y $f(x) = 0$ si x es irracional. Probar que f es derivable en 0 y hallar $f'(0)$.

Ejercicio 5.6.3. Sea f una función tal que $|f(x)| \leq x^2$ para todo x, Demostrar que f es derivable en 0 y hallar $f'(0)$.

Ejercicio 5.6.4. Para cada una de las siguientes funciones, hallar el máximo y el mínimo en los intervalos indicados, hallando los puntos del intervalo en que la derivada es 0 y comparando los valores en estos puntos con los valores en los extremos. Trácese la gráfica y hállense los puntos máximos y mínimos locales.

a).- $f(x) = x^5 + x + 1$ sobre $[-1, 1]$.

b).- $f(x) = \dfrac{1}{x^5 + x + 1}$ sobre $[-1/2, 1]$.
c).- $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ sobre $[0, 5]$.

Ejercicio 5.6.5. Demostrar que si $f'(x) \geq M$ para toda x en $[a, b]$, entonces $f(b) \geq f(a) + M(b - a)$.

Ejercicio 5.6.6. a).- Supongamos que que $f'(x) > g'(x)$ para toda x, y que $f(a) = g(a)$. Demostrar que $f(x) > g(x)$ para $x > a$ y $f(x) < g(x)$ para $x < a$.
b).- Demostrar mediante un ejemplo que las conclusiones anteriores no son válidas sin la hipótesis $f(a) = g(a)$.

Ejercicio 5.6.7. Hallar todas las funciones f tales que

a).- $f'(x) = \operatorname{sen} x$.
b).- $f''(x) = x^3$.
c).- $f'''(x) = x + x^2$.

Ejercicio 5.6.8. Demostrar que para cualquier m, la función $f_m(x) = x^3 - 3x + m$ no tiene nunca dos raíces en $[0, 1]$.

Ejercicio 5.6.9. Supongamos que la función f es continua y derivable en $[0, 1]$, $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ y que $f'(x) \neq 1$ para toda $x \in [0, 1]$. Demostrar que existe exactamente un número x en $[0, 1]$ tal que $f(x) = x$.

Ejercicio 5.6.10. ¿Dónde se encuentra el error en la siguiente aplicación de la regla de L'Hopital?:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = \lim_{x \to 1} = \frac{6x}{2} = 3.$$

Ejercicio 5.6.11. Hallar los siguientes límites:

a).- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x}$.
b).- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2}$.

Ejercicio 5.6.12. Hallar $f'(0)$ si

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

y $g(0) = g'(0) = 0$ y $g''(0) = 17$.

Ejercicio 5.6.13. Demostrar que si $\lim_{x \to \infty} f(x)$ y $\lim_{x \to \infty} f'(x)$ existen, entonces $\lim_{x \to \infty} f'(x) = 0$.

Ejercicio 5.6.14. Supóngase que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^n$ para $n > 1$. Demostrar que f es constante.

Ejercicio 5.6.15. Demostrar que f es convexa en un intervalo si y sólo si para toda x y y del intervalo tenemos

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y), \quad \text{para} \quad 0 < t < 1.$$

Ejercicio 5.6.16 (Teorema del incremento acotado). Demostrar: Sea I un intervalo y $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función derivable. Supongamos que existe $M > 0$ tal que $|f'(t)| \leq M$ para toda $t \in I$. Entonces $|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$ para toda $x, y \in I$.

Ejercicio 5.6.17. Probar que $x \cos x - \operatorname{sen} x < 0$ para $x \in (0, \pi)$.

Ejercicio 5.6.18. Sea $n \in \mathbb{N}$.

a).- Mostrar que la función $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{(1+x)^n}{1+x^n}$ tiene como máximo a 2^{n-1}.
b).- Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$. Probar que $(a+b)^n \leq 2^{n-1}(a^n + b^n)$.

Ejercicio 5.6.19. Demostrar que $2x/\pi < \operatorname{sen} x < x$ para $x \in (0, \pi/2)$.

Ejercicio 5.6.20. Demostrar que existe un único número real a tal que $\cos a = a$. Probar que a satisface $0 < a < 1$.

Ejercicio 5.6.21. Sea $f(x) = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{3}$. Definimos la sucesión recurrente a_n como sigue: $a_0 = 0$, $a_{n+1} := f(a_n)$. Probar que la sucesión a_n es creciente. Probar que $f(3/4) < 3/4$ y deducir que $a_n < 3/4$. Entonces a_n es convergente. Probar que su límite es un número ℓ tal que $0 \leq \ell \leq 3/4$.

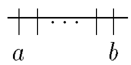
6

Integral de Riemann

6.1 Definición del concepto de integral

Intuitivamente, la integral de una función definida en un intervalo cerrado, se define como el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x, entre los puntos $x = a$ y $x = b$. Para definirla formalmente procedemos a "partir" el intervalo $[a, b]$ en una cantidad creciente de subintervalos y nos fijamos en la suma de los rectángulos que aproximen tanto por "arriba" como por "abajo" esta gráfica y nos fijamos en el límite cuando el diámetro de los subintervalos se va a 0. Más precisamente:

Definición 6.1.1. Una *partición* P del intervalo cerrado $[a, b]$ es una colección de puntos $P := \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$.

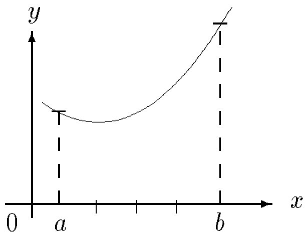


Procedemos ahora a dar el concepto formal de integral. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Sea $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición. Sean

$$m_i := \inf\{f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\},$$
$$M_i := \sup\{f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\}.$$

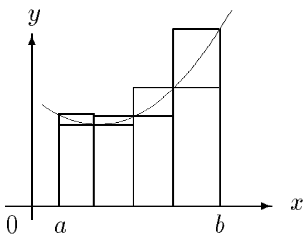
Se definen la *suma superior* y la *suma inferior* de f con respecto a P como sigue:

$$\text{suma superior} \quad S(f, P) := \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1});$$
$$\text{suma inferior} \quad I(f, P) := \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1});$$



Claramente, se tiene que para toda partición P: $I(f,P) \leq S(f,P)$. Por otro lado, notemos que si P_1 y P_2 son dos particiones de $[a,b]$ tales que $P_1 \subseteq P_2$, entonces

$$I(f,P_1) \leq I(f,P_2) \quad \text{y} \quad S(f,P_2) \leq S(f,P_1).$$



Probemos lo anterior.

Proposición 6.1.2. *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Sean P_1 y P_2 dos particiones de $[a,b]$ tales que $P_1 \subseteq P_2$. Entonces:*

$$I(f,P_1) \leq I(f,P_2) \quad \text{y} \quad S(f,P_2) \leq S(f,P_1).$$

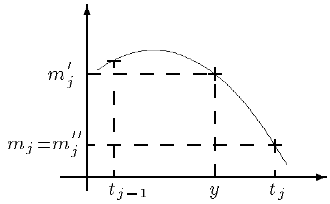
Demostración. Sea $P_2 \setminus P_1 = \{y_1, \ldots, y_t\}$ con $y_1 < y_2 < \cdots < y_t$. Definimos las particiones $Q_0, Q_1, \cdots, Q_t$ por $Q_0 = P_1$ y $Q_i := Q_{i-1} \cup \{y_i\}$ para $i = 1, 2, \ldots, t$. Entonces tenemos que:

$$Q_0 = P_1 \subset Q_1 \subset \cdots \subset Q_t = P_2.$$

Si probamos para cada $i = 1, 2, \ldots, t$ que $I(f, Q_{i-1}) \leq I(f, Q_i)$ y $S(f, Q_{i-1}) \geq S(f, Q_i)$, entonces:

$$I(f,P_1) = I(f,Q_0) \leq I(f,Q_1) \leq \cdots \leq I(f,Q_t) = I(f,P_2) \quad \text{y}$$
$$S(f,P_1) = S(f,Q_0) \geq S(f,Q_1) \geq \cdots \geq S(f,Q_t) = S(f,P_2).$$

Por lo tanto basta suponer que $P = \{a = t_0, \ldots, t_n = g\}$ y $P_2 = P_1 \cup \{y\}$ con $t_{j-1} \leq y \leq t_j$.



Sean $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\}$ y $M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\}$. Además, sean

$$m'_j = \inf\{f(x) \mid x \in [t_{j-1}, y]\}; \quad {m_j}'' = \inf\{f(x) \mid x \in [y, t_j]\};$$
$$M'_j = \sup\{f(x) \mid x \in [t_{j-1}, y]\}; \quad {M_j}'' = \sup\{f(x) \mid x \in [y, t_j]\}.$$

Se tiene

$$m'_j \geq m_j; \quad {m_j}'' \geq m_j; \quad M'_j \leq M_j; \quad {M_j}'' \leq M_j.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} I(f, P_2) = & \sum_{i=1}^{j-1} m_i (t_i - t_{i-1}) + m'_j (y - t_{j-1}) + \\ & + {m_j}''(t_j - y) + \sum_{i=j+1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1}) \geq \\ \geq & \sum_{i=1}^{j-1} m_i (t_i - t_{i-1}) + m_j (y - t_{j-1} + t_j - y)) + \sum_{i=j+1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1}) = \\ = & \sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1}) = I(f, P_1), \end{aligned}$$

por lo que $\boxed{I(f, P_1) \leq I(f, P_2)}$ y

$$\begin{aligned} S(f, P_2) = & \sum_{i=1}^{j-1} M_i (t_i - t_{i-1}) + M'_j (y - t_{j-1}) + \\ & + {M_j}''(t_j - y) + \sum_{i=j+1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1}) \leq \\ \leq & \sum_{i=1}^{j-1} M_i (t_i - t_{i-1}) + M_j (y - t_{j-1} + t_j - y) + \sum_{i=j+1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1}) = \\ = & \sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1}) = S(f, P_1), \end{aligned}$$

por lo que $\boxed{S(f,P_1) \geq S(f,P_2)}$. □

Ahora sean P_1 y P_2 dos particiones cualesquiera y se P_3 la unión de P_1 y P_2. Por lo tanto

$$I(f,P_1) \leq I(f,P_3) \leq S(f,P_3) \leq S(f,P_2).$$

Esto es, para cualesquiera dos particions P_1 y P_2 de $[a,b]$ se tiene

$$\boxed{I(f,P_1) \leq S(f,P_2)}.$$

Definición 6.1.3. Se define la *integral inferior de f en $[a,b]$* por

$$\underline{\int_a^b} f := \sup_{\substack{P \text{ partición} \\ \text{de } [a,b]}} I(f,P),$$

y la *integral superior de f en $[a,b]$* por

$$\overline{\int_a^b} f := \inf_{\substack{P \text{ partición} \\ \text{de } [a,b]}} S(f,P).$$

Como consecuencia de las desigualdades anteriores, tenemos:

Proposición 6.1.4.

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f.$$

Demostración. Puesto que $I(f,P_1) \leq S(f,P_2)$ para cualesquiera dos particiones P_1 y P_2 de $[a,b]$, se sigue que $I(f,P) \leq \overline{\int_a^b} f$ para toda partición P de $[a,b]$. Tomando el supremo en la desigualdad anterior, se sigue la desigualdad deseada. □

Definición 6.1.5. Una función $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ se llama *integrable en* $[a,b]$ si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$.

En este caso el número:

$$\int_a^b f := \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

se llama la *integral (de Riemann) de f en $[a,b]$*.

También es usual denotar la integral por $\displaystyle\int_a^b f = \int_{[a,b]} f = \int_a^b f(x)dx$.

Geométricamente $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ es el área "debajo" de la gráfica de f sobre $[a,b]$.

Observación 6.1.6. Si tomamos una sucesión de particiones $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $[a,b]$ y $\lim\limits_{n\to\infty} I(f,P_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S(f,P_n) = A$, entonces f es integrable en $[a,b]$ y se tiene que $\displaystyle\int_a^b f = A$. De hecho el siguiente resultado generaliza esta observación.

Proposición 6.1.7. *Sea $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de particiones de $[a,b]$ tales que $\lim\limits_{n\to\infty}\big(S(f,P_n)-I(f,P_n)\big) = 0$. Entonces que $\lim\limits_{n\to\infty} S(f,P_n)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} I(f,P_n)$ existen, f es integrable y tenemos:*

$$\lim_{n\to\infty} S(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} I(f,P_n) = \int_a^b f.$$

Demostración. Sean $a_n := S(f,P_n)$ y $b_n := I(f,P_n)$. Entonces tenemos que:

$$a_n \geq b_n, \quad a_n \geq \underline{\int_a^b} f, \quad b_n \leq \underline{\int_a^b} f, \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0.$$

Por lo tanto

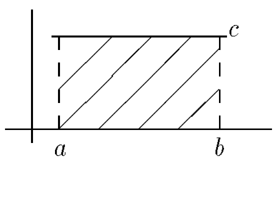
$$0 \leq a_n - \underline{\int_a^b} f \leq a_n - b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Se sigue que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\int_a^b} f \geq \overline{\int_a^b} f \geq \underline{\int_a^b} f$. Por lo tanto

$$\boxed{\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f} \quad \text{y} \quad \boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \int_a^b f}. \qquad \square$$

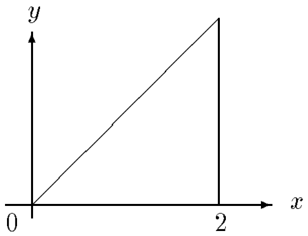
Ejemplo 6.1.8. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c$ para toda $x \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$ fijo. Es decir, f es constante. Entonces para toda partición P de $[a,b]$ se tiene que $m_i = M_i = c$ para toda i y por lo tanto

$$\begin{aligned} I(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = c\sum_{i=1}^{n} = c(t_n - t_0) = c(b-a),\\ S(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) = c\sum_{i=1}^{n} = c(t_n - t_0) = c(b-a). \end{aligned}$$

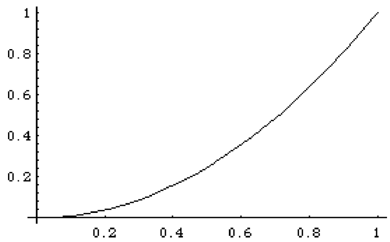


Por lo tanto $\boxed{\displaystyle\int_a^b f = c(b-a)}$.

Ejemplo 6.1.9. Sea $f(x) = x$ en $[0,2]$. Dejamos probar como ejercicio que $\displaystyle\int_0^2 f = 2$.



Ejemplo 6.1.10. Sea $f(x) = x^2$ en $[0,1]$. Para $n \in \mathbb{N}$, consideremos la partición $P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1\right\}$.



Se tiene que $t_i = \frac{i}{n}$, $0 \leq i \leq n$. Tenemos que la función es creciente en $[0,1]$ por lo que:

$$m_i = \inf\{f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\} = t_{i-1}^2 = \frac{(i-1)^2}{n^2}$$

y

$$M_i = \sup\{f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\} = t_i^2 = \frac{i^2}{n^2}.$$

Además tenemos para toda i que $t_i - t_{i-1} = \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n}$. Se sigue que:

$$I(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)^2}{n^2}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n-1} i^2.$$

Análogamente, tenemos:

$$S(f, P_n) = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2.$$

Por lo tanto

$$S(f, P_n) - I(f, P_n) = \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

de donde

$$\underline{\int_0^1} x^2 = \overline{\int_0^1} x^2 = \int_0^1 x^2 = \lim_{n\to\infty} S(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2.$$

Ahora, probemos por inducción que $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$.

Para $n = 1$: $1^2 = \frac{(2(1)+1)(1+1)(1)}{6} = \frac{3(2)(1)}{6} = 1$, es decir tenemos la igualdad.

Suponemos cierto el resultado para $n \geq 1$, esto es $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$.

Para $n+1$ debemos probar que

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(2n+3)(n+2)(n+1)n}{6}.$$

Tenemos:

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{(2n+1)(n+1)n}{6} + (n+1)^2 = \\
&= \frac{(2n+1)(n+1)n + 6(n+1)^2}{6} = \\
&= \frac{(n+1)((2n+1)(n) + 6(n+1))}{6} = \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} = \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \\
&= \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6},
\end{aligned}$$

lo cual es lo que queríamos demostrar.

Por curiosidad, presentamos otra demostración de la fórmula anterior que tiene la ventaja de ser más constructiva, en el sentido de que si conocemos una fórmula para $1 + 2 + \cdots + n$, lo cual es igual a $\frac{n(n+1)}{2}$, podemos deducir la fórmula para $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$. Tenemos $(i+1)^3 - i^3 = 3i^2 + 3i + 1$. Por lo tanto:

$$(n+1)^3 - 1 = n^3 + 3n^2 + 3n = \sum_{i=1}^{n} \big((i+1)^3 - i^3)\big) =$$
$$= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} + \sum_{i=1}^{n} 1 = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n$$

lo cual implica que:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n - n - \dfrac{3n^2+3n}{2}}{3} = \frac{2n^3 + 6n^2 + 4n - 3n^2 - 3n}{6} =$$
$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Regresendo a la integral, tenemos:

$$\int_0^1 x^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\Big(\frac{(2n+1)(n+1)n}{6}\Big) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{\Big(2+\dfrac{1}{n}\Big)\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)(1)}{6}\Big) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Ejemplo 6.1.11. Sea $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 \text{ si } x \in \mathbb{I} \end{cases}$, $f(x)\colon [0,1] \to \mathbb{R}$.

Para toda partición P de $[0,1]$, tenemos que existe un racional y un irracional en (t_{i-1}, t_i) por lo que $m_i = 0$ y $M_i = 1$, por lo tanto

$$I(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = 0 \quad \text{por lo que} \quad \underline{\int_0^1} f = 0,$$
$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) =$$
$$= t_n - t_0 = 1 - 0 = 1 \quad \text{por lo que} \quad \overline{\int_0^1} f = 1.$$

Por lo tanto f no es integrable y tenemos

$$\boxed{\underline{\int_0^1} f = 0 < 1 = \overline{\int_0^1} f}.$$

Los siguientes resultados son rutinarios y los presentamos sin demostación.

Teorema 6.1.12. *Si $a < c < b$ y f es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$ y se tiene*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \qquad \square$$

Teorema 6.1.13. *Si f y g son integrables en $[a,b]$ y si $c \in \mathbb{R}$ entonces*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g \quad \text{y} \quad \int_a^b cf = c\int_a^b f.$$ □

Notación 6.1.14. Si f es integrable en $[a,b]$ denotamos

$$\int_b^a f := -\int_a^b f.$$

6.2 Resultados fundamentales de integración

Primero hacemos notar que la integral preserva orden.

Proposición 6.2.1. *Sean $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones integrables y tales que $f(x) \leq g(x)$ para toda $x \in [a,b]$. Entonces*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Demostración. Primero consideremos una función integrable $h(x)$ tal que $h(x) \geq 0$ para toda $x \in [a,b]$. Entonces para cualquier partición P de $[a,b]$ se tiene que para toda i, $m_i \geq 0$. Por lo tanto $I(f,P) \geq 0$. Por lo tanto $\underline{\int_a^b} h = \int_a^b h \geq 0$.

Ahora consideremos $h = g - f \geq 0$. Entonces $g - f$ es integrable y $\int_a^b h = \int_a^b (g-f) = \int_a^b g - \int_a^b f \geq 0$. Por lo tanto $\boxed{\int_a^b f \leq \int_a^b g}$. □

Corolario 6.2.2. *Si f es integrable en $[a,b]$ y además $m \leq f(x) \leq M$ para toda $x \in [a,b]$. Entonces*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

Demostración. Puesto que $m \leq f(x) \leq M$ se sigue que $\int_a^b m = m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a) = \int_a^b M$. □

El siguiente resultado nos muestra que la integal de funciones integrables nos proporcionan funciones continuas.

Teorema 6.2.3. *Sea f integrable en $[a,b]$ y sea $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dado por $F(x) : \int_a^x f$. Entonces F es continua en $[a,b]$.*

Demostración. Puesto que f es integrable, f es acotada. Sea M tal que $|f(x)| \leq M$ para toda $x \in [a, b]$. Consideremos $h > 0$ y la diferencia:

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f - \int_a^x f = \int_x^{x+h} f.$$

Puesto que $|f(x)| \leq M$ se tiene $-M \leq f(x) \leq M$ y por tanto

$$-Mh = M(x+h-x) \leq \int_x^{x+h} f \leq M(x+h-x) = Mh.$$

Se sigue que

$$|F(x+h) - F(x)| \leq M|h|.$$

Ahora considermos $h < 0$. Entonces $F(x) - F(x+h) == \int_{x+h}^{x} f$ y $|F(x) - F(x+h)| \leq M|h|$.

En resumen, para cualquier h se tiene $|F(x+h) - F(x)| \leq M|h|$.

Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$, entonces para $|h| < \delta$ se tiene que $|F(x+h) - F(x)| \leq M|h| < M\delta = \varepsilon$ probando que $\boxed{F \text{ es continua}}$. □

En el siguiente corolario, usaremos que una función continua es integrable. Este resultado lo probaremos más adelante (ver Teorema 6.2.13).

Corolario 6.2.4 (Teorema del valor medio para integrales). *Sea f una función continua, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Entonces existe $c \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f = (b-a)f(c).$$

Demostración. Como mencionamos anteriormente, usaremos que la función es integrable por ser continua. Sea $f([a, b]) = [m, M]$. Entonces $m \leq f(x) \leq M$ para toda $x \in [a, b]$. Por lo tanto

$$\int_a^b m \leq \int_a^b f \leq \int_a^b M \quad \text{por lo que} \quad m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

Se sigue que

$$f(x) = m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq M = f(y)$$

con $x, y \in [a, b]$. Por lo tanto existe $c \in [x, y]$ o $c \in [y, x]$ dependiendo si $x < y$ o $x > y$, tal que $f(c) = \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f$. □

Teorema 6.2.5. *Si f es una función monótona, es decir, creciente o decreciente, entonces f es integrable.*

Demostración. Supongamos que f es creciente. Sea $P = \{t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ cualquier partición de $[a,b]$. Puesto que f es creciente, para toda $x \in [t_{i-1}, t_i]$ se tiene $f(t_{i-1}) \leq f(x) \leq f(t_i)$, por lo que $m_i = f(t_{i-1})$ y $M_i = f(t_i)$. Se sigue que

$$\begin{aligned} S(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(t_i - t_{i-1}), \\ I(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}), \\ S(f,P) - I(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1}))(t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

En particular, tomemos $t_i = a + \dfrac{i(b-a)}{n}$. En este caso tendremos $t_i - t_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} S(f,P) - I(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1})\frac{b-a}{n} = \\ &= \frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} f(t_i) - \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\right) = \\ &= \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Se sigue que $\boxed{\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f}$. □

Teorema 6.2.6 (Teorema Fundamenal del Cálculo). *Sea f integrable en $[a,b]$ y sea $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) := \int_a^x f$. Entonces si f es continua, entonces F es derivable y $F'(x) = f(x)$.*

Demostración. Se tiene

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f - \int_a^x f\right] = \\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f = \frac{1}{h} \cdot f(\alpha_h) \cdot h \end{aligned}$$

con $\alpha_h \in [x, x+h]$ si $h > 0$ o $\alpha_h \in [x+h, x]$ si $h < 0$. Ahora bien tomando $h \to 0$, tendremos

$$x \underset{0 \leftarrow h}{\longleftarrow} x \leq \alpha_h \leq x + h \underset{h \to 0}{\longrightarrow} x.$$

Por lo tanto $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$, es decir, $\boxed{F'(x) = f(x)}$. □

Corolario 6.2.7. *Si f es continua en $[a, b]$ y si $f = g'$ para alguna función g, entonces*

$$\int_a^b f = g(b) - g(a) := \big[g(x)\big]_a^b.$$

Demostración. Sea $F(x) = \displaystyle\int_a^x f$. Entonces $F'(x) = f(x) = g'(x)$. Por lo tanto existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = g(x) + c$ para toda $x \in [a, b]$. Por lo tanto $\displaystyle\int_a^b f = F(b) = g(b) + c$. Ahora bien, $F(a) = 0 = g(a) + c$ por lo que $c = -g(a)$. Por lo tanto $\boxed{\displaystyle\int_a^b f = g(b) + c = g(b) - g(a)}$. □

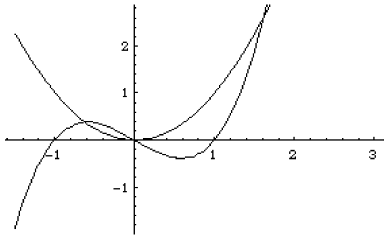
Ejemplo 6.2.8. Si $n \in \mathbb{Z}$, entonces consideremos $a < b$ y $\displaystyle\int_a^b x^n dx$. Para $n \neq -1$, se tiene $\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n$, por lo que

$$\int_a^b x^n dx = \Big[\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big]_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

Ejemplo 6.2.9. Tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (x^4 - 3x^3 + 4x + 5)dx &= \int_0^1 x^4 + \int_0^1 (-3x^3)dx + \int_0^1 (4x)dx + \int_0^1 5dx = \\
&= \int_0^1 x^4 dx - 3\int_0^1 x^3 dx + 4\int_0^1 x dx + 5\int_0^1 dx = \\
&= \Big[\frac{x^5}{5}\Big]_0^1 - 3\Big[\frac{x^4}{4}\Big]_0^1 + 4\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^1 + 5\big[x\big]_0^1 = \\
&= \Big(\frac{1}{5} - 0\Big) - \frac{3}{4}(1-0) + \frac{4}{2}(1-0) + 5(1-0) = \\
&= \frac{1}{5} - \frac{3}{4} + 2 + 5 = \frac{4 - 15 + 140}{20} = \boxed{\frac{129}{20}}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 6.2.10. Hallemos el área de la región limitada por las gráficas de las fuciones $f(x) = x^3 - x$ y $g(x) = x^2$.



Los puntos de intersección están dadas por las soluciones de la ecuación: $x^3 - x = x^2$, esto es $x(x^2-1) = x^2$. Las soluciones son $x_1 = 0$, y $x^2 - 1 = x$. Las soluciones de esta última, es decir, de $x^2 - x - 1 = 0$, son $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Entonces el área A buscada, es:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{0} (f-g) + \int_{0}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} (g-f) = \\
&= \int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{0} (x^3 - x^2 - x)dx + \int_{0}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} (x^2 - x^3 + x)dx = \\
&= \Big[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\Big]_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{0} + \Big[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\Big]_{0}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \\
&= -\Big[\frac{(\sqrt{5}-1)^4}{4 \cdot 16} + \frac{(\sqrt{5}-1)^3}{3 \cdot 8} - \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{2 \cdot 4}\Big] + \\
&\qquad + \Big[-\frac{(1+\sqrt{5})^4}{4 \cdot 16} + \frac{(1+\sqrt{5})^3}{3 \cdot 8} + \frac{(1+\sqrt{5})^2}{2 \cdot 4}\Big].
\end{aligned}$$

Ejemplo 6.2.11. Sea $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^4} \frac{1}{2 - \cos^3 t} dt$. Hallemos $f'(x)$.

Sean $F(x) = \displaystyle\int_0^{x} \frac{dt}{2 - \cos^3 t}$ y $G(x) = x^4$. Por lo tanto $f(x) = (F \circ G)(x) = F(G(x))$, de donde, $f'(x) = F'(G(x)) \cdot G'(x) = \dfrac{1}{2 - \cos^3 x^4} \cdot 4x^3 = \boxed{\dfrac{4x^3}{2 - \cos^3 x^4}}$.

Ejemplo 6.2.12. Sea $f(x) = \left[\int_0^{\left(\int_3^x (u^4 - u^3 - 3u + 4)du\right)} \operatorname{sen}^3\left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt\right]^4$. Hallemos $f'(x)$.

Sea $F(x) = \displaystyle\int_0^{x} \operatorname{sen}^3\Big(\frac{1}{1+t^2}\Big) dt$, $H(x) = \displaystyle\int_3^{x} (u^4 - u^3 - 3u + 4)du$, $G(x) = x^4$. Entonces $f(x) = (G \circ F \circ H)(x) = G(F(H(x)))$ de donde

$$f'(x) = G'(F(H(x))) \cdot (F \circ H)'(x) = G'(F(H(x))) \cdot F'(H(x)) \cdot H'(x) =$$

$$= 4\left[\int_0^{\left(\int_3^x (u^4-u^3-3u+4)\,du\right)} \operatorname{sen}^3\left(\frac{1}{1+t^2}\right) dt\right]^3 \cdot$$

$$\cdot \operatorname{sen}^3\left(\frac{1}{1+\left(\int_3^x (u^4-u^3-3u+4)du\right)^2}\right) \cdot (x^4-x^3-3x+4).$$

El siguiente resultado nos prueba que las funciones continuas son integrables. Esto ya lo usamos en el Corolario 6.2.4.

Teorema 6.2.13. *Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces f es integrable.*

Demostración. Definimos $g(x) := \underline{\int_a^x} f(t)dt$ y $p(x) := \overline{\int_a^x} f(t)dt$. Sea $h > 0$ y

$$\begin{aligned} m_h &:= \inf\{f(t) \mid x \le t \le x+h\}, \\ M_h &:= \sup\{f(t) \mid x \le t \le x+h\}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{gathered} m_h \cdot h \le \underline{\int_x^{x+h}} f(t)dt \le \overline{\int_x^{x+h}} f(t)dt \le M_h \cdot h, \\ m_h \cdot h \le g(x+h) - g(x) \le p(x+h) - p(x) \le M_h \cdot h. \end{gathered}$$

Por lo tanto

$$f(x) \xleftarrow[0 \leftarrow h]{} m_h \le \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \le \frac{p(x+h)-p(x)}{h} \le M_h \xrightarrow[h \to 0]{} f(x),$$

por ser f continua. Se sigue que

$$\lim_{h \to 0+} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{p(x+h)-p(x)}{h} = f(x) = g'(x+) = p'(x+),$$

Similarmente para $h < 0$ y tenemos $f(x) = g'(x) = p'(x)$.

Por lo tanto existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = p(x) + c$. Ahora bien, $g(a) = p(a) = 0$ por lo que $c = 0$ y obtenemos que $g(x) = p(x)$, es decir,

$$\underline{\int_a^x} f = \overline{\int_a^x} f = \int_a^x f.$$

Por lo tanto $\boxed{f \text{ es integrable}}$. □

6.3 Algunas funciones elementales

Empecemos considerando $x > 0$. Definimos $p(x) := \int_1^x \frac{dt}{t}$. Puesto que la función $f(t) = \frac{1}{t}$ es continua en $(0, \infty)$, se sigue que $p(x)$ es derivable y $p'(x) = \frac{1}{x}$.

Definición 6.3.1. Se define la función *logaritmo* $\ln\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ como la función derivable

$$\ln x := \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Tenemos que $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$ por lo que $\ln x$ es creciente y en particular 1-1.

Por otro lado, se tiene: $\ln\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ y

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{rm y} \quad \lim_{x \to \infty} \ln x = \infty,$$

cuya verificación dejamos como ejercicio.

En particular, lo anterior implica que $\ln\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ es suprayectiva.

Lema 6.3.2. *Para $x, y > 0$, se tiene que $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.*

Demostración. Sea $h(x) := \ln(xy)$ con y fija. Entonces $h'(x) = y(\ln(xy))' = \frac{1}{x} = (\ln x)'$. Por lo tanto $h(x) = \ln x + c$ para algún $c \in \mathbb{R}$.

Ahora bien, $h(1) = \ln y = \ln 1 + c = \int_1^1 \frac{dt}{t} + c = 0 + c = c$. Por tanto $c = \ln y$ y $\boxed{h(x) = \ln(xy) = \ln x + \ln y}$. □.

En particular obtenemos que para $n \in \mathbb{N}$, $\ln x^n = n \ln x$.

Sea $e\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ la función inversa de $\ln x$. Por lo tanto

$$e^{\ln x} = x \quad \text{para} \quad x > 0 \quad \text{y} \quad \ln e^x = x \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Se tiene:

Lema 6.3.3. *Para $x, y \in \mathbb{R}$, $e^{x+y} = e^x e^y$.*

Demostración. Sea $a := e^{x+y}$, $b = e^x$, $c = e^y$. Entonces $\ln a = x + y = \ln b + \ln c = \ln bc$ lo cual implica que $e^{x+y} = a = bc = e^x e^y$. □

Proposición 6.3.4. *Para toda $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $(e^x)' = e^x$.*

Demostración. Sean $f(x) = \ln x$ y $g(x) = f^{-1}(x) = e^x$. Entonces $x = (f \circ g)(x)$ y $1 = f'(g(x))g'(x)$. Esto implica que $(e^x)' = (g'(x)) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{1/g(x)} = g(x) = e^x$. □

6.4 Ejercicios

Ejercicio 6.4.1. Decidir cuáles de las siguientes funciones son integrables sobre $[0,2]$, y calcular la integral cuando sea posible.

a).- $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ x-2, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$.
b).- $f(x) = x + [x]$.
c).- $f(x) = \begin{cases} x+[x], & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional} \end{cases}$.

Ejercicio 6.4.2. Hallar las áreas de las regiones limitadas por

a).- Las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2$.
b).- Las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = 1 - x^2$.

Ejercicio 6.4.3. Demostrar que si f es integrable sobre $[a,b]$ y $f(x) \ge 0$ para toda x de $[a,b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b f \ge 0$.

Ejercicio 6.4.4. Supongamos que f está acotada sobre $[a,b]$ y que f es continua en todo $[a,b]$ con excepción de $x_0 \in (a,b)$. Demostrar que f es integrable en $[a,b]$.

Ejercicio 6.4.5. Sea f continua en $[a,b]$ y $\displaystyle\int_a^b fg = 0$ para toda función continua en $[a,b]$. Probar que $f = 0$.

Ejercicio 6.4.6. Sean f continua en $[a,b]$ y g integrable y no negativa sobre $[a,b]$. Demostrar que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

para algún $\xi \in [a,b]$.

Ejercicio 6.4.7. Identificando una integral adecuada, calcular los siguientes límites:

a).- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \cdots + \sqrt[n]{e^n}}{n}$.
b).- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$.
c).- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

Ejercicio 6.4.8. Demostrar que $\dfrac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \dfrac{1}{n}$. Deducir de esto que la sucesión

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

es decreciente y $a_n \geq 0$, por lo que es convergente. El límite se conoce como la *constante de Euler.*

Ejercicio 6.4.9. Probar que la hipótesis sobre g en el problema 6.4.6 es indispensable. (**Sugerencia:** Considerar $g(x) = x$ en $[-1, 1]$).

Ejercicio 6.4.10. Demostrar que si f es integrable sobre $[a, b]$ entonces $|f|$ es integrable y

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

Ejercicio 6.4.11. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

a).- $F(x) = \displaystyle\int_a^{x^3} \operatorname{sen}^3 t dt.$

b).- $F(x) = \displaystyle\int_3^{\left(\int_1^x \operatorname{sen}^3 t\, dt\right)} \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^6 t + t^2} dt.$

c).- $F(x) = \operatorname{sen}\left(\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}\left(\int_0^y \operatorname{sen} t^3 dt \right) dy \right).$

d).- $(F^{-1})'(x)$, donde $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt.$

Ejercicio 6.4.12. Hallar $(f^{-1})'(0)$ si $f(x) = \displaystyle\int_0^x (1 + \operatorname{sen}(\operatorname{sen} t))dt.$

Ejercicio 6.4.13. Hallar $F'(x)$ si $F(x) = \displaystyle\int_0^x x f(t)dt$ donde f es una función continua.

Ejercicio 6.4.14. Demostrar que si f es continua, entonces $\displaystyle\int_0^x f(u)(x - u)du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt \right) du.$

Ejercicio 6.4.15. Hallar $\displaystyle\int_a^b \sqrt[n]{x} dx$ con $b > a > 0$.

Ejercicio 6.4.16. Demostrar que si $h(x)$ es continua, y f y g son derivables y $F(x) = \displaystyle\int_{f(x)}^{g(x)} h(t)dt$, entonces $F'(x) = h(g(x))g'(x) - h(f(x))f'(x)$.

Ejercicio 6.4.17. Hallar los siguientes límites:

a).- $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x - x^2/2}{x^2}$.
b).- $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x + x^2/2}{x^3}$.

Ejercicio 6.4.18. Hallar la derivada de las siguientes funciones:

a).- $f(x) = e^{e^{e^x}}$.
b).- $f(x) = a^x$, $a > 0$ (aquí se define $a^x := e^{x \ln a}$).
c).- $f(x) = e^{\left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)}$.

Ejercicio 6.4.19. Hallar $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{(\ln x)^n}$.

Ejercicio 6.4.20. Hallar $\lim_{x\to 0+} x(\ln x)^n$.

Ejercicio 6.4.21. Hallar $\lim_{x\to 0+} x^x$.

Ejercicio 6.4.22. Demostrar $e^a = \lim_{x\to\infty}(1 + a/x)^x$.

Ejercicio 6.4.23. Demostrar que si α es una raíz de la ecuación: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, entonces la función $y(x) = e^{\alpha x}$ satisface la ecuación diferencial: $a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$.

Programa

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.
Departamento de Control Automático

Análisis Real. Propedéutico

Programa

1.- **Números reales y funciones.** 4 horas.
   1.1).- Operaciones de los números reales.
   1.2).- Funciones de variable real.
   1.3).- Valor absoluto y parte entera.
   1.4).- Supremo e ínfimo de conjuntos reales.

2.- **Límites y continuidad.** 7 horas.
   2.1).- Límite de una función.
   2.2).- Propiedades y operaciones de límites de funciones.
   2.3).- Límite por la izquierda y por la derecha.
   2.4).- Funciones continuas.
   2.5).- Funciones continuas en un intervalo.
   2.6).- Imagen de intervalos cerrados y de intervalos abiertos bajo funciones continuas.
   2.7).- Funciones monótonas.

3.- **Sucesiones reales.** 7 horas.
   3.1).- Límite de una sucesión.

3.2).- Teoremas de límites.

3.3).- Ejemplos importantes: $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $\sqrt[n]{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$, $\dfrac{r^n}{n^m}$, r^n.

3.4).- Propiedad de la intersección de intervalos encajados.

3.5).- Sucesiones recurrentes.

4.- **Derivada de una función.** 9 horas.

4.1).- Definición de derivada. Interpretación geométrica de la derivada.

4.2).- Derivada por la derecha y por la izquierda.

4.3).- Extremos de una función. Máximos y mínimos locales.

4.4).- Teoremas de Rolle, valor medio y de crecimiento acotado.

4.5).- Funciones convexas y cóncavas.

5.- **Integral de Riemann de funciones de variable real.** 6 horas.

5.1).- Integral superior e inferior. Definición de integral de Riemann.

5.2).- Funciones integrables.

5.3).- Propiedades de la integrales. Teorema del valor medio.

5.4).- Primitivas. Teorema fundamental del cálculo.

Referencias

1.- Apostol, Tom M., *Análisis Matemático*, Reverté, 1960.

2.- Bartle, Robert G., *The elements of Real Analysis*, Wiley, 1964.

3.- Liret, François y Martinais Dominique, *Mathématiques pour le DEIG. Analyse* 1^re^ *année*, Dunod, Paris, 1997.

4.- Rudin, Walter, *Principles of Mathematics Analysis*, Second Edition, McGraw-Hill, 1964. (*Análisis Matemático*, Mc. Graw Hill).

5.- Spivak, Michael, *Calculus. Cálculo Infinitesimal*, Reverté, S.A., 1970.

Notaciones

$|A|$ = cardinalidad del conjunto A.
$\mathbb{C}$ = campo de los números complejos.
$\dfrac{df}{dx}(a) = f'(a)$ = derivada de la función f en el punto a.
$\displaystyle\int_a^b f$ = integral de la función f en el intervalo $[a, b]$.
$\displaystyle\overline{\int_a^b} f$ = integral superior de la función f en el intervalo $[a, b]$.
$\displaystyle\underline{\int_a^b} f$ = integral inferior de la función f en el intervalo $[a, b]$.
$\displaystyle\lim_{x \to a} f(x)$ = límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a a.
$\displaystyle\lim_{x \to a^+} f(x)$ = límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a a por la dercha.
$\displaystyle\lim_{x \to a^-} f(x)$ = límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a a por la izquierda.
$\mathbb{N}$ = conjunto de los números naturales.
$\mathbb{Q}$ = campo de los números racionales.
$\mathbb{R}$ = campo de los números reales.
$\mathbb{Z}$ = anillo de los números enteros.
$\emptyset$ = conjunto vacío.
$\square$ = final de una demostración.
$|\cdot|$ = función valor absoluto.
$[\cdot]$ = función parte entera.

Referencias

1. Apostol, Tom M., *Análisis Matemático*, Reverté, 1960.
2. Bartle, Robert G., *The elements of Real Analysis*, Wiley, 1964.
3. Liret, François y Martinais Dominique, *Mathématiques pour le DEIG. Analyse* 1^re^ *année*, Dunod, Paris, 1997.
4. Rudin, Walter, *Principles of Mathematics Analysis*, 2nd. Edition, McGraw-Hill, 1964. (*Análisis Matemático*, Mc. Graw Hill).
5. Spivak, Michael, *Calculus. Cálculo Infinitesimal*, Reverté, S.A., 1970.

Indice alfabético

ínfimo, 4

Axioma del infimo, 29
Axioma del supremo, 29

Binomio de Newton, 13

composición de funciones, 7
continuidad en un punto, 27
convergencia de una sucesión, 35
cota inferior, 4
cota superior, 4

derivada de una funci'on, 51
derivada de una función, 51
derivada por la derecha de una función, 53
derivada por la izquierda de una función, 53
diferenciabilidad de una función, 51
diferencial de una función, 51
divergencia de una sucesión, 35
dominio de una función, 6

función 1 a 1, 7
función cóncava, 69
función continua en un conjunto, 29
función convexa, 68
función creciente, 59
función decreciente, 59
función estrictamente creciente, 63
función estrictamente decreciente, 63
función integrable, 76
función inversa, 9
función inyectiva, 7
función logaritmo, 87
función monótona, 59, 83
función no creciente, 63
función no decreciente, 63
función parte entera, 10
función sobre, 7
función suprayectiva, 7

imagen de una función, 6
integral de Riemann de una función, 76
integral de una función, 76
integral inferior, 76
integral superior, 76
interior de un conjunto, 42
intervalo, 5
intervalo abierto, 5
intervalo cerrado, 5
intervalo semiabierto, 6
intervalo semicerrado, 6

Johann Bernoulli, 67

límite de una función, 16
límite por la derecha, 28
límite por la izquierda, 28
límites laterales, 28

máximo local, 60
mínimo local, 60

números enteros, 3
números irracionales, 3
números naturales, 3
números racionales, 3

orden en los reales, 2

partición de un intervalo, 73
punto crítico, 60
punto de inflexión, 69
punto singular, 60

reales extendidos, 5
Regla de L'Hopital, 67
Regla de la Cadena, 55

subsucesión, 37
sucesión acotada, 37, 43
sucesión creciente, 43
sucesión de Cauchy, 47
sucesión decreciente, 43
sucesión monótona, 43
sucesiones adyacentes, 47
suma inferior de una función con respecto a una partición, 73
suma superior de una función con respecto a una partición, 73
supremo, 4

Teorema de Rolle, 61
Teorema del "sandwich", 38
Teorema del incremento acotado, 72
Teorema del Valor Intermedio, 30
Teorema del Valor Medio, 62
Teorema del Valor Medio de Cauchy, 66
Teorema del valor medio para integrales, 82
Teorema Fundamental del Cálculo, 83

valor absoluto, 10